Chapitre 1

Intégrales simples et multiples

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

1.1.1 Intégrale de Riemann

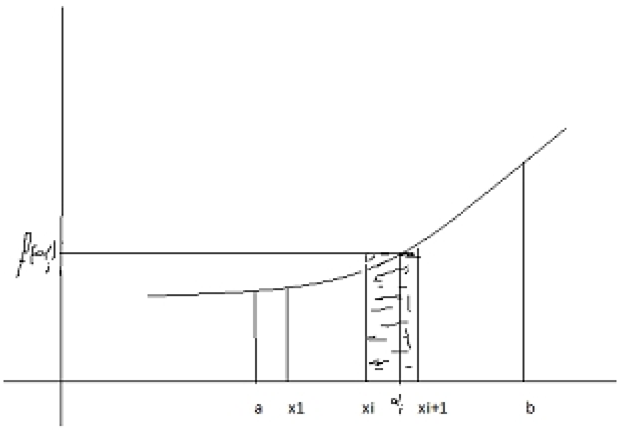
On appelle subdivision $\triangle$ de l'intervalle $[a, b]$ un ensemble fini de $n+1$ réels $\{x_p \in [a, b] / 0 \leq p \leq n\}$, avec $x_0 = a, x_n = b, \forall p, x_p \leq x_{p+1}$.

$\delta(\triangle) = \max\limits_{0 \leq p \leq n-1} (x_{p+1} - x_p)$ s'appelle le "pas" de $\triangle$.

Définition 1.1.1 *On considère une subdivision $\triangle$ sur $[a, b]$ et on choisit $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}[$,on appelle somme de riemann relative a la subdivision $\triangle$ au choix des $\alpha = (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ la somme:*

$$\mathfrak{R}(f, \triangle, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Géométriquement



Définition 1.1.2 *On dit la fonction f est intégrable au sens de Riemann si* $\lim\limits_{\delta(\triangle)\to 0} \mathfrak{R}(f, \triangle, \alpha) = I$ *est finie* $\forall\alpha$,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

Exemple 1.1.3 $\left\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, ..., n\right\}$ *est une subdivision de l'intervalle* $[0, 1]$

$f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$, *on a*

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, ..., n$$

la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2},$$

est une somme de Riemann da la fonction $f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$.

1.1.2 Sommes de Darboux

Définition 1.1.4 *On considère une subdivision* $\triangle$ *sur* $[a,b]$ *et on choisit* $I_i + [x_i, x_{i+1}[$ *,on choisit*

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| \\ M_i &= \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| \end{aligned}$$

Les deux sommes suivantes

$$\begin{aligned} S(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{p+1} - x_p) \\ s(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{p+1} - x_p) \end{aligned}$$

appelées respectivement sommes de Darboux inférieure et supérieure.

Théorème 1.1.5 *Si* $\lim\limits_{\delta(\triangle)\to+\infty} S(f,\triangle) = \lim\limits_{\delta(\triangle)\to+\infty} s(f,\triangle)$ *alors* f *est intégrable en sens de Riemann.*

Proposition 1.1.6 *Toute fonction continue sur un intervalle I est une fonction intégrable en sens de Riemann sur I.*

Exemple 1.1.7 $\left\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, ..., n\right\}$ *est une subdivision de l'intervalle* $[0,1]$

$f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$ *, on a*

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, ..., n$$

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i}{n} \\ M_i &= \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i+1}{n} \end{aligned}$$

on calcule les deux sommes de Darboux

$$\begin{aligned} S(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(x_{p+1}-x_p\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ s(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(x_{p+1}-x_p\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\triangle) = \lim\limits_{n\to+\infty} s(f,\triangle) = \frac{1}{2}$

donc f est intégrable en sens de Riemann.

1.1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient f et g deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a,b,c \in \mathbb{R}\,(a \leq c \leq b)$ on a:

1) Si la fonction f intégrable sur les intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$ elle est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\,dx$$

2) Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ et $f \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

3) Si les fonctions f est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction λf est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

4) Si les fonctions f et g sont intégrables sur l'intervalle $[a,b]$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\,dx$$

Soit$f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$

Valeur moyenne

On appelle moyen de f dans $[a, b]$ le nombre $m = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Exemple 1.1.8 *On calcule le moyen des carrés des réels copmris entre 0 et 1.*
$\int\limits_0^1 x^2 dx = \int\limits_0^1 m dx \Longrightarrow m = \frac{1}{3}$

Valeur efficace

On appelle valeur efficace de f dans $[a, b]$ le nombre v tel que $v^2 = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx$.

Exemple 1.1.9 *On calcule la valeur efficace de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ dans $[0, 1]$*
$\int\limits_0^1 x dx = \int\limits_0^1 v^2 dx \Longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.2 Calcul de primitives (Intégrale indéfinie)

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction continue sur I.*

On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ssi la dérivée de F donne f ($F\prime = f$). On prend alors l'habitude de noter toute primitive de f sous forme

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f.

Remarque 1.2.2 *La primitive d'une fonction s'il existe n'a pas unique.*

Exemple 1.2.3 *1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f,*

aussi la fonction définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ est une primitive de f .

1.2.1 Primitives des fonctions usuelles

La fonction f	La primitive de f définie par: $(k \in \mathbb{R})$	l'intervalle I
$f(x) = c$	$F(x) = cx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \diagup \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$	$\mathbb{R} / \{0\}$ si $\alpha \lneqq -1$ $\mathbb{R}$ si $\alpha \gneqq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = In\lvert x\rvert + k$	$]-\infty, 0[\, ou\,]0, +\infty[$
$f(x) = e^{x}$	$F(x) = e^{x} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Proposition 1.2.4 *Soient f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:*

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x) + \int g(x)\, dx, \int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx.$$

1.2.2 Intégration par parties – Changement de variable

Intégration par parties

Théorème 1.2.5 *Soient u et v deux fonctions dérivables. On a*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Preuve. On a $(u(x)v(x))^{'} = u^{'}(x)v(x) + u(x)v^{'}(x)$
alors $\int (u(x)v(x))^{'}\, dx = \int u^{'}(x)v(x)dx + \int u(x)v^{'}(x)dx$
donc

$$u(x)\, v(x) = \int u^{'}(x)v(x)dx + \int u(x)v^{'}(x)dx$$

c'est à dire

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$\square$

Exemple 1.2.6 *calculons* $\int x^2e^xdx$

On a

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx = \int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\ \int xe^xdx$$

$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx = xe^x - \ e^xdx$

alors $\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\ \int xe^xdx = x^2e^x - 2\ xe^x + 2e^x + c, c \in \mathbb{R}$

Changement de variable

Théorème 1.2.7 *Soient* u *une fonction dérivable et* f *une fonction continue avec*

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

On a $\int u' f(u)\, dx = \int f(u)\, du = F(u)$

Exemple 1.2.8 *Calculons la primitive*

$$K(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

on choisit $u(x) = \cos x, f(x) = \dfrac{1}{x}, u'(x) = -\sin x, F(x) = In\ |x|\ + c, c \in \mathbb{R}.$

$\int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = -\int u' f(u)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) = -\ln|\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$

$$K(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

1.3 Intégrale doubles

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$

L'intégrale sur D de $f : D \to \mathbb{R}$, s'appelle une intégrale double, on la note $\iint_D f = \iint_D f(x,y)dxdy$.

1.3.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.3.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1) Cas où $D = [a,b] \times [c,d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a:

$\iint_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx \right] dy.$

2)Cas où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$, où $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues, alors:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Proposition 1.3.2 *Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ avec $D = [a,b] \times [c,d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \left[\int\limits_a^b g(x)\, dx \right] \times \left[\int\limits_c^d h(y)dy \right].$$

Exemple 1.3.3 *On calcule $I = \iint_D (xy)\, dxdy$, où $D = [1,2] \times [3,5]$*

$I = \left[\int\limits_1^2 xdx \right] \times \left[\int\limits_3^5 ydy \right] = \frac{3}{2} \times \frac{16}{2} = 12.$

Exemple 1.3.4 *On calcule $I = \iint_D dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$*

$\iint_D dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{1-x} dy \right] dx = \int\limits_0^1 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}$

1.3.2 Changement de variable

Soient$U$ et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \varphi : U &\to V \\ (u,v) &\to (x,y) \end{aligned}$$

une application de classe C^1, et $\triangle \subset U$ et $D \subset V$

La matrice jacobien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Si $\varphi(\triangle) = D$, on obtient:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\triangle f(\varphi(u,v)) \det(j(\varphi))\, dudv$$

1.3.3 Coordonnées polaires

$\varphi : (r,\theta) \to (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

La matrice jacobien de φ est $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

et $\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| = r$

Si $\varphi(\triangle) = D$, on obtient:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\triangle f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\, drd\theta$$

Exemple 1.3.5 *On calcule* $I = \iint_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ *où* $D = \{(x,y)\,/x^2+y^2 \leq 1\}$

et $\triangle = \{(r,\theta)\,/0 \leq r \leq 1$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$I = \iint_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy = \iint_\triangle \dfrac{r}{1+r^2}drd\theta = \pi \ln 2$

1.4 Intégrales triples

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$

L'intégrale sur D de $f : D \to \mathbb{R}$, s'appelle une intégrale double, on la note $\iiint_D f = \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$.

1.4.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.4.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1) Cas où $D = [a,b] \times [c,d] \times [s,t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$, on a:
$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d \left[\int\limits_s^t f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx.$

2)Cas où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in \triangle, u(x,y) \leq z \leq v(x,y)\}$, où $u, v : D \to \mathbb{R}$ sont continues, D est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$, alors:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\triangle \left[\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy.$$

3)Cas où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b, (x,y) \in \triangle(z)\}$, où $u, v : D \to \mathbb{R}$ sont continues, $D(z)$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2, \forall z \in [a,b]$, alors:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\iint_{\triangle(z)} f(x,y,z)dxdy\right] dz.$$

Proposition 1.4.2 *Si $f(x,y) = g(x)h(y)k(z)$ avec $D = [a,b] \times [c,d] \times [s,t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$ on a:*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \left[\int\limits_a^b g(x)\,dx\right] \times \left[\int\limits_c^d h(y)dy\right] \times \left[\int\limits_s^t k(z)dz\right].$$

Exemple 1.4.3 *On calcule $\iiint_D (xyz)\,dxdydz, D = [0,1]^3$*
$\iiint_D (xyz)\,dxdydz = \left[\int\limits_0^1 xdx\right] \times \left[\int\limits_0^1 ydy\right] \times \left[\int\limits_0^1 zdz\right] = \frac{1}{8}.$

Exemple 1.4.4 *On calcule $\iiint_\triangle dxdydz, \triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in D = [0,1]^2, 0 \leq z \leq x\}$*