Contenu de la matière :

Chapitre 1 : *Introduction aux équations de Lagrange*

I. Définition d'une oscillation (Vibration)

Une vibration est un phénomène **oscillatoire** d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre. Elle est caractérisée par une équation de mouvement de type d'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t)$$

Avec :

y : Le déplacement (m)

$\dot{y}$: La vitesse (m/s)

$\ddot{y}$: L'accélération (m/s²)

δ : Le coefficient d'amortissement

ω_0 : La pulsation libre (rad/s)

$A(t)$: Le second membre.

La méthode de résolution de l'équation différentielle (I-1) est schématisée sur l'organigramme de la figure I-1. Pour résoudre une équation du second ordre avec second membre, on suit la méthode suivante :

Premièrement on cherche la solution homogène $y_h(t)$ lorsque le second membre $A(t) = 0$. Pour cela, on considère que la solution a une forme exponentielle $y(t) = e\ st$. L'équation différentielle homogène est transformée en une équation caractéristique de deuxième degré d'une variable **s** qui nous permettra de déterminer les solutions s_1, s_2 par le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe trois solutions homogènes selon les cas de Δ illustré sur l'organigramme. Deuxièmement, on cherche la solution particulière $y_p(t)$ lorsque le second membre $A(t) \neq 0$. Dans l'organigramme, on constate deux cas d'excitations :

- Une excitation constante
- Une excitation sinusoïdale.

La solution particulière $y_p(t)$ est déterminée selon la règle suivante : « La solution particulière suit la forme générale du second membre de l'équation différentielle ». Enfin, la solution générale de l'équation différentielle du second ordre avec second membre est donnée par la somme des deux solutions homogène et particulière.

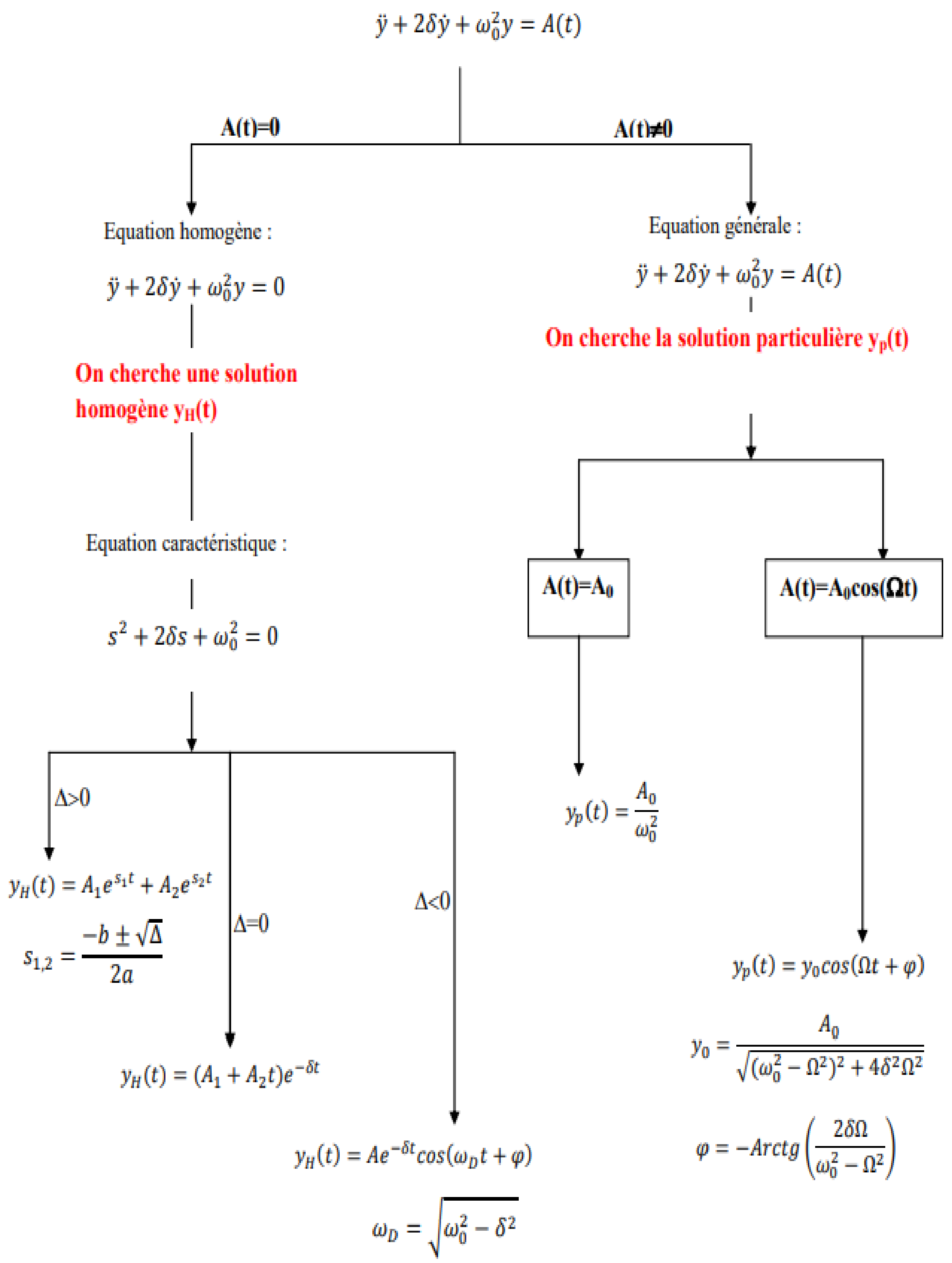


Fig. I-1. Organigramme de la solution d'une équation différentielle du second ordre

I-2- Caractéristiques d'une oscillation sinusoïdale harmonique

Une vibration est sinusoïdale lorsqu'une masse attachée au bout d'un ressort est écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée. Une vibration est périodique lorsque les mouvements se reproduisent globalement identiques à eux-mêmes à des périodes de temps mesurables. Elle est de la forme : $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou bien $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec

φ est le déphasage par rapport à l'origine des temps.

A est l'amplitude maximale du signal (m).

L'amplitude d'une fonction sinusoïdale est une mesure de sa hauteur par rapport à sa médiane.

ω_0 est la pulsation libre qui liée à la fréquence des oscillations et est mesurée en rad,s^{-1} ou bien (rad/s)

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

la fréquence comme étant le nombre d'oscillations qui ont lieu par unité de temps t, et est mesurée en Hertz, $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$

T_0 est la période (s)

La période est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit et est défini comme suit : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Mathématiquement, la périodicité s'exprime par f(t + T) = f(T) .

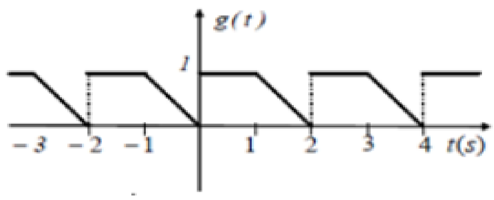
Parmi les grandeurs physiques étudiées des systèmes oscillants, on trouve :

• Le déplacement x. • L'angle θ. • La charge q. • Le courant i. • La tension U. • Un champ E.

<u>Exemple :</u>

Soit la grandeur périodique $g(t)$ représentée ci-contre.

$T = 2s.\ f = 1\ T = 0{,}5Hz.\ \omega = 2\pi f = \pi rad\ s$.



- **La représentation complexe :**

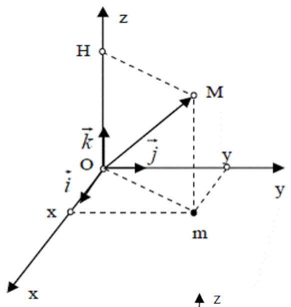
Pour faciliter les calculs, nous transformons les grandeurs sinusoïdales en des exponentielles qui sont plus simples à manipuler. Ceci possible grâce à la formule d'Euler (1748)

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} \quad j^2 = -1$$

II. Les coordonnées généralisées :

Sont des coordonnées indépendantes peuvent d'écrire totalement le mouvement du système

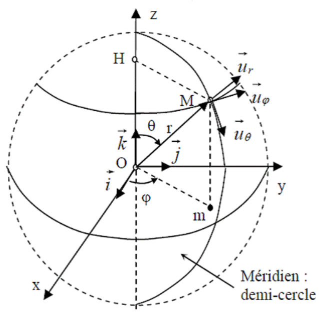
1. Les coordonnées cartésiennes :



Dans $\mathbb{R}$, la position de la particule M est donne par ces trois coordonnées (x,y,z) telle que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

2. Les coordonnées polaires :



Quand le mouvement est plan, on peut repérer la position du mobile M par ses coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi \text{ et } \overrightarrow{u_r} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$

Le vecteur de position en coordonnées polaire sera comme suit :

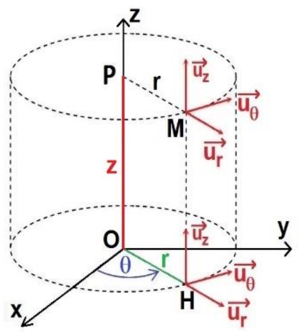
$$\overrightarrow{OM} = A_r\overrightarrow{u_r} + A_\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

La relation qui lie les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires est :

$$x = r\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{x}{r}$$

$$y = r\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \mathrm{ar}\sin\frac{y}{r}$$

3. Les coordonnées cylindriques :



Les coordonnées cylindriques du point M est (ρ,φ,z) définies comme suit $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|, \varphi = angle(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oM})$ et z est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe , donc le système de coordonnées sera : $\vec{u}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$ et $\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$ le vecteur de position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$

On déduit les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindrique :

$$x = \rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \mathrm{ar}\,ctg\,\frac{y}{x}$$
$$Z = z$$

III. Equation de Lagrange pour une particule

III.1. Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange est donnée par la forme :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext,q}}$$

avec :

$$\boxed{L = E_c - E_P = T - U}$$

L :est le lagrangien définit par :

E_c ,T est l'énergie cinétique du système.

E_P ,U est l'énergie potentielle du système.

q est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$: Les forces extérieures généralisées.

- Le degré de liberté d est égal au nombre de coordonnées (N) moins (-) le nombre de liaisons (R). $\boxed{d = N - R}$

III.2. Cas des systèmes conservatifs

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et elle s'écrit : $F_q = -\dfrac{\partial U}{\partial q}$

L'équation de Lagrange devient alors : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q} = -\dfrac{\partial U}{\partial q}$

Généralement l'énergie potentielle U ne dépend pas de la vitesse, c'est-dire que $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$

L'équation de Lagrange peut alors s'écrire : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q} = 0$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un **système conservatif**

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

III.3. Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

Considérons une situation physique dans laquelle la particule est soumise à des forces de frottement de viscosité dont la résultante $\vec{f}$ est de la forme : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

L'équation de Lagrange devient alors : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\alpha \dot{q}$

L'équation de Lagrange se généralise à l'équation suivante : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$

III.4. Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Considérons le cas plus général d'une force extérieure dépendant du temps agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation D. Soit F_{eq} *la* q-composante de la force extérieure. Dans ce cas l'équation de Lagrange peut s'écrire sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{eq} - \beta \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{e,q}$$

D est la fonction de dissipation donnée par : $D = \frac{1}{2}\beta \dot{q}^2$. Elle est liée à la force de frottement

par : $f_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

IV. Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède N degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir N coordonnées généralisées q_i (i = 1, 2, ..., N); nous aurons ainsi N équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=F_{ext,qi} \qquad (i=1,2,\ldots,N)$$

Le qi-composante de la force généralisée extérieure est définie par :

$$F_{ext,qi}=\left.\frac{\delta W}{\delta q_i}\right|_{\partial qi\neq 0}$$
$$\delta q_{j,i}\neq 0$$

Dans cette expression δW représente le travail des forces extérieures résultant d'une variation δq_i de la coordonnée q_i telle que les coordonnées $q_j \neq i$ soient constantes ($\delta q_{j\neq i}=0$).