



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran –Mohammed BOUDIAF-
Faculté d'Architecture et de Génie Civil
Département de Génie Civil

Spécialité : Génie Civil

Polycopié de :

Calcul des structures hyperstatiques

Cours et exercices corrigés

Présenté à

L'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran –Mohammed BOUDIAF-

Par

Mohammed MEKKI

**Maître de conférences B
Filière Génie Civil**

**Destiné aux étudiants
Licence et Master en Génie Civil**



Année universitaire 2016/2017

TABLE DES MATIERES

Introduction générale

4

CHAPITRE 1 : Calcul des structures hyperstatiques (statiquement indéterminées)

1.1. Structures isostatiques (statiquement déterminées) et hyperstatiques (statiquement indéterminées)	7
1.2. Exemple introductif	8
1.3. Liaisons surabondantes	9
1.4. Méthodes fondamentales de calcul des structures hyperstatiques	10
1.5. Calcul du degré d'hyperstaticité	10
1.5.1. Méthode de la suppression des liaisons surabondantes	10
1.5.2. Méthode des contours fermés	11
1.5.3. Cas des poutres en treillis	12
1.6. Remarques importantes	13

CHAPITRE 2 : Méthode des trois moments

2.1. Méthode des trois moments	15
2.2. Principe de la méthode des trois moments	15
2.3. Calcul des moments fléchissant dans les appuis	16
2.4. Exercices	20
2.4.1. Exercice N° 2.1	20
2.4.2. Exercice N° 2.2	23
2.4.3. Exercice N° 2.3	25
2.4.4. Exercice N° 2.4	26

CHAPITRE 3 : Méthode des forces

3.1. Méthode des forces	32
3.2. Principe de la méthode des forces	32
3.3. Degré d'hyperstaticité	33
3.4. Système de base	33
3.5. Différentes possibilités des systèmes de base	33
3.6. Exemples	35
3.7. Equations canoniques	36
3.8. Evaluation des intégrales du type $\int_0^l m_i m_j dx$ par l'emploi de tableaux	36
3.9. La procédure de la méthode des forces	42
3.10.11. Exercices	43
3.10.1. Exercice N°3.1	43
3.10.2. Exercice N°3.2	47

3.10.3. Exercice N° 3.3	49
3.10.4. Exercice N°3.4	52

CHAPITRE 4 : Méthodes des déplacements

4.1. Introduction	57
4.2. Nombre d'inconnus d'hyperstatique	57
4.3. Intérêt de la méthode des déplacements	57
4.4. Principe de la méthode des déplacements	58
4.5. Classification des structures	60
4.6. Principe du nœud fixe	61
4.7. Principe du nœud mobile	62
4.8. Sollicitations des barres	63
4.9. Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des déplacements et des charges	65
4.10. Equations d'équilibre	66
4.11. Les étapes de la méthode des déplacements	67
4.12. Exercices	68
4.12.1. Exercice 4.1.	68
4.12.2. Exercice 4.2.	71

CHAPITRE 5 : Treillis hyperstatiques

5.1. Définition d'un treillis	75
5.2. Exemples de structures en treillis	75
5.3. Différentes catégories de treillis	76
5.4. Hypothèses de calcul d'un treillis	77
5.5. Différents systèmes de Treillis	77
5.5.1. Treillis isostatiques	77
5.5.2. Treillis hyperstatiques	77
5.5.2.1. Efforts intérieurs	77
5.6. Exercices	81
5.6.1. Exercice N°5.1	81
5.6.2. Exercice N° 5.2	84
5.6.3. Exercice N° 5.3	88
6. Conclusions	91
7. Références bibliographiques	91

Introduction générale :

La résistance des matériaux, aussi appelée RDM, est une discipline particulière de la mécanique des milieux continus permettant le calcul des contraintes et des déformations dans les structures pour différents matériaux (machines, un système en génie mécanique, un bâtiment en génie civil).

La RDM permet de calculer et de tracer les diagrammes des sollicitations d'une structure (détermination des équations des efforts internes de chaque élément de la structure (M, N et T) et d'en déduire le comportement global de la structure (déformations).

L'objectif est de concevoir une structure qui répond aux trois exigences suivantes : sécurité, serviabilité et faisabilité.

La RDM est une partie de la mécanique qui a pour objectif aussi le développement de modèles permettant de dimensionner les structures. Ces modèles sont élaborés dans le cadre d'hypothèses simplificatrices. Ils constituent le premier niveau des méthodes de calcul des structures. On retrouve deux systèmes de structures :

- les structures isostatiques dites « statiquement déterminées ».
- les structures hyperstatiques dites « statiquement indéterminées ».

Les structures isostatiques sont celles où les trois équations de la statique sont suffisantes à leur analyse. Dans ce cas, les actions (les réactions aux appuis et ou les moments) peuvent être calculées en utilisant tout simplement les équations d'équilibre. Par conséquent, les sollicitations internes, telles que : le moment de flexion, l'effort tranchant et l'effort normal peuvent être déduits en utilisant l'équilibre interne des sections.

Par contre, pour les structures hyperstatiques les équations d'équilibre ne sont pas suffisantes pour déterminer les réactions d'appui et les actions internes. Cela veut dire que le nombre des inconnues (les réactions d'appui) est strictement supérieur au nombre d'équations d'équilibre. La différence entre le nombre des inconnues du problème et le nombre des équations d'équilibre est appelée le degré d'hyperstaticité du système ou de la structure.

Dans ce polycopié de cours, l'intérêt est porté sur les méthodes de calcul de structures hyperstatiques ; il est nécessaire et obligatoire d'avoir une maîtrise et une connaissance parfaite des systèmes isostatiques.

Ce support de cours se décompose en 5 chapitres. Dans le premier chapitre on retrouve une revue des connaissances préliminaires sur les structures isostatiques et hyperstatiques. Une introduction des méthodes fondamentales de calcul des structures hyperstatiques est présentée. Le second chapitre porte sur l'étude des poutres hyperstatiques par la méthode des trois moments (la méthode de Clapeyron). Au troisième chapitre, la méthode des forces est décrite pour le calcul des poutres, des portiques et des structures réticulées. La méthode des rotations pour le calcul des éléments fléchis, tels que les poutres et les portiques, a fait l'objet du quatrième chapitre. Et enfin le dernier chapitre concernera les treillis hyperstatiques.

CHAPITRE 1

Calcul des structures hyperstatiques (statiquement indéterminées)

1.1. Structures isostatiques (statiquement déterminées) et hyperstatiques (statiquement indéterminées) :

Si nous considérons un corps (structure) arbitraire soumis à l'action d'un système de forces dans l'espace x, y, z (Figure 1.1), son équilibre d'ensemble peut être défini par les équations d'équilibre statique :

Les équations algébriques

- $\sum F_x = 0 \quad \sum M_x = 0$
- $\sum F_y = 0 \quad \sum M_y = 0$
- $\sum F_z = 0 \quad \sum M_z = 0$

Les équations vectorielles

- $\sum \vec{F} = 0$
- $\sum \vec{M} = 0$

Les sommations se rapportent à toutes les composantes de forces et de moments par rapport aux trois axes de référence x, y, z . Nous pouvons donc écrire 6 équations d'équilibre dans le cas général d'un corps tridimensionnel. Lorsque toutes les forces agissent dans le même plan, seules trois équations d'équilibre sont exploitables.

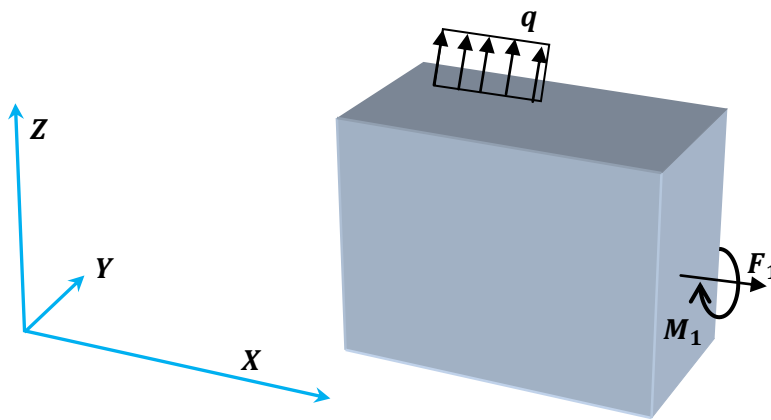


Figure 1.1. : Corps tridimensionnel soumis à un ensemble de forces

Dans le cas des **systèmes isostatiques**, les composantes de réaction se calculent au moyen des équations d'équilibre de la statique seules (équilibre vertical $\sum F_v = 0$, équilibre horizontal $\sum F_H = 0$ et équilibre des moments de rotation $\sum M_{/point} = 0$).

Dans le cas contraire où le nombre d'équations de la statique ne suffit pas pour déterminer les réactions (les inconnues), on est en présence d'une structure **hyperstatique**.

1.2. Exemple introductif :

Voici deux poutres (Figure 1.2. et 1.3.) qui ne diffèrent que par leurs appuis. Elles sont de longueur L et soumises à une charge uniformément répartie sur toute la longueur.

$$\text{Equilibre vertical : } \sum F_V = V_A - ql = 0$$

$$\text{Equilibre horizontal : } \sum F_H = H_A = 0$$

$$\text{Equilibre de rotation } \sum M_{/A} = M_A + ql^2/2 = 0$$

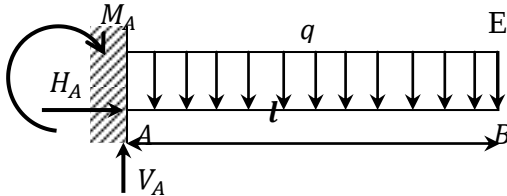


Figure 1.2. : Structure isostatique

$$\text{Equilibre vertical : } \sum F_V = V_A - ql + V_B = 0$$

$$\text{Equilibre horizontal : } \sum F_H = H_A = 0$$

$$\text{Equilibre de rotation } \sum M_{/A} = M_A + ql^2/2 = 0$$

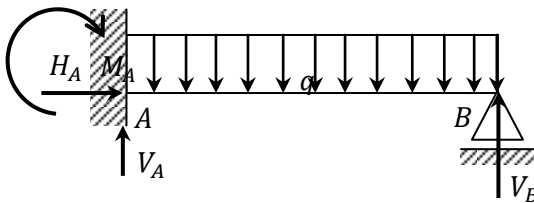


Figure 1.3. : Structure hyperstatique

- Poutre (**Figure 1.2.**) : 3 équations indépendantes linéaires ($\sum F_V = 0$, $\sum F_H = 0$ et $\sum M_{/point} = 0$), 3 inconnues (V_A , H_A et M_A) : les réactions d'appui peuvent être calculées.
- Poutre (**Figure 1.3.**) : 3 équations indépendantes linéaires ($\sum F_V = 0$, $\sum F_H = 0$ et $\sum M_{/point} = 0$), 4 inconnues (V_A , V_B , H_A et M_A) : il manque une équation pour calculer les réactions d'appuis. On dit que le système est une fois hyperstatique.

Ainsi on définit le degré d'hyperstaticité d'un système comme une valeur qui donne le nombre d'inconnus supplémentaires.

1.3. Liaisons surabondantes :

On appelle liaisons surabondantes, les liaisons supplémentaires qu'il faudrait supprimer du système hyperstatique pour obtenir un système isostatique. On a deux types de liaisons surabondantes :

- Les liaisons surabondantes extérieures que l'on retrouve dans les appuis (les réactions).

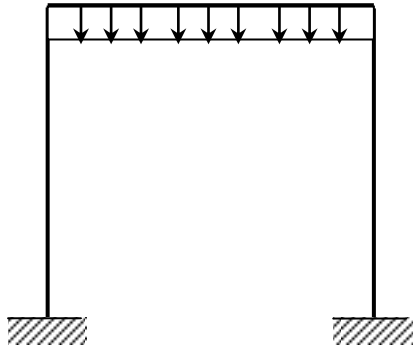


Figure 1.4. : Cadre simple

- Les liaisons surabondantes intérieures sont celles qui proviennent des contours fermés (on ouvrant le contour les efforts internes deviennent des inconnues supplémentaires).

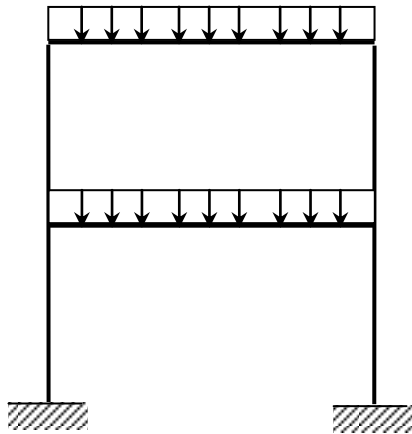


Figure 1.5. : Portique à deux niveaux et une travée

Le nombre de liaisons surabondantes représente le degré d'hyperstaticité du système.

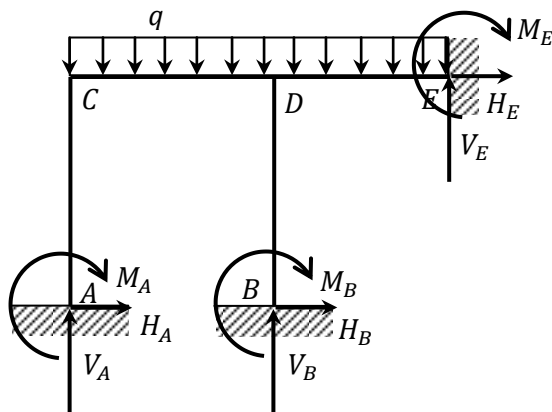


Figure 1.6.a: Portique hyperstatique

(6 liaisons supplémentaires $d=6$)

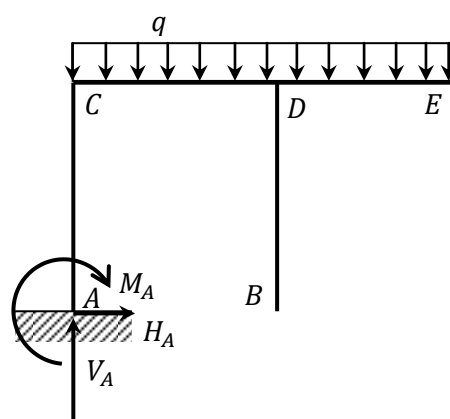


Figure 1.6.b : Portique isostatique

(6 liaisons supplémentaires supprimées)

1.4. Méthodes fondamentales de calcul des structures hyperstatiques :

Nous avons vu précédemment qu'un système est hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues de la statique. Cette différence est appelée le degré d'hyperstaticité du système.

Pour étudier et analyser une structure de degré d'hyperstaticité d , il est nécessaire d'établir d équations supplémentaires (dites équations de compatibilités). Les méthodes consistent à choisir un système de base à partir duquel on détermine le système isostatique (SI) le plus simple (Figure 1.7).

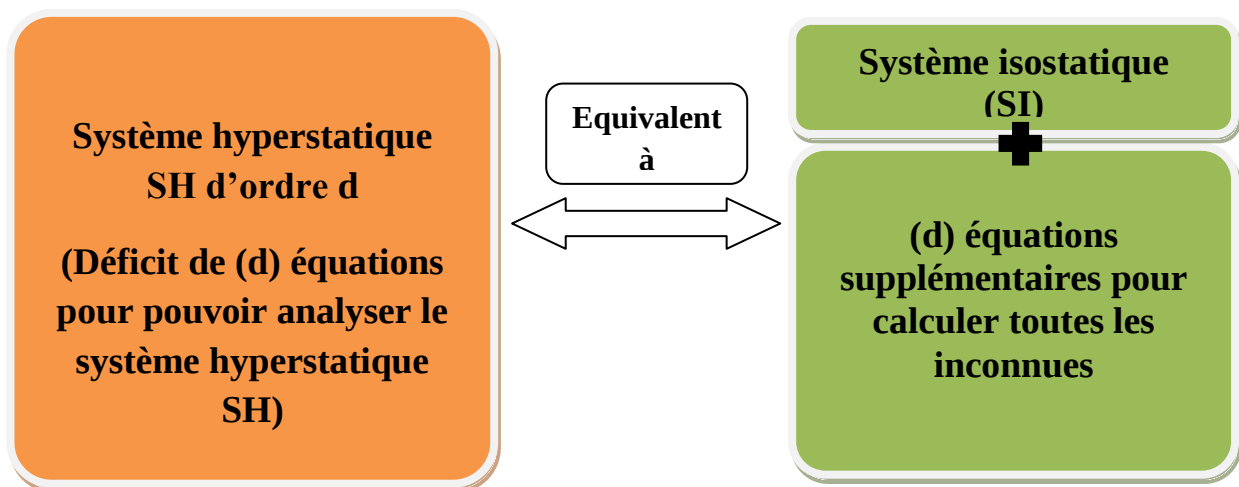


Figure 1.7. : Calcul des systèmes hyperstatiques

En raison de l'interdépendance entre les efforts et les déplacements, il en résulte deux manières d'aborder le calcul des structures hyperstatiques, c'est-à-dire :

- soit en s'intéressant aux efforts (dans les liaisons surabondantes) (méthode des forces, **chapitre 3**),
- soit en s'intéressant aux déplacements (méthode des déplacements, **chapitre 4**).

1.5. Calcul du degré d'hyperstaticité :

Généralement, le nombre de liaisons surabondantes représente le degré d'hyperstaticité. Il existe plusieurs méthodes pour calculer ce degré:

1.5.1. Méthode de la suppression des liaisons surabondantes :

Cette méthode consiste à supprimer des liaisons jusqu'à ce que la structure devienne isostatique.

1.5.2. Méthode des contours fermés :

Le degré d'hyperstaticité est donné par la formule suivante :

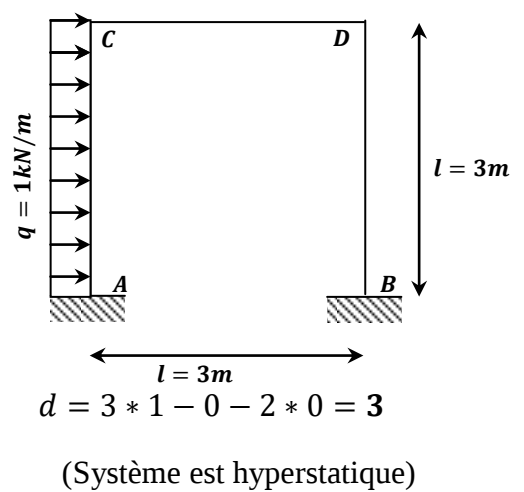
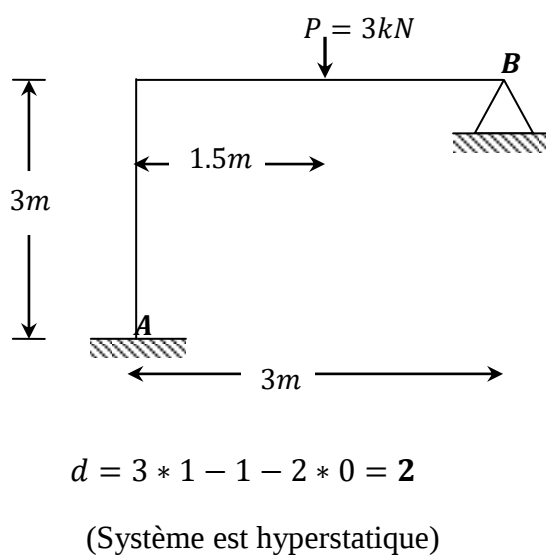
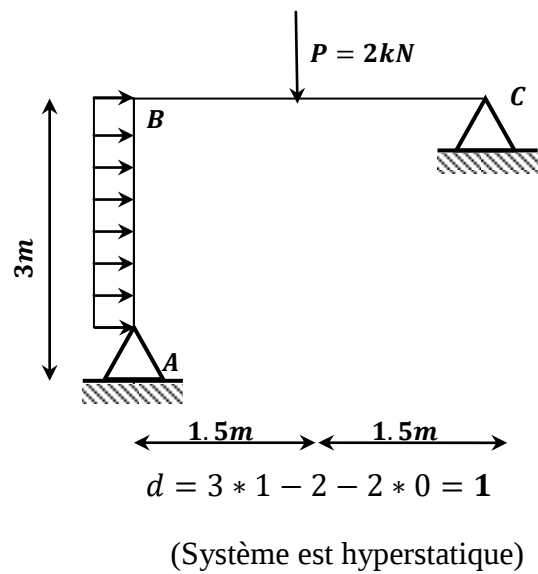
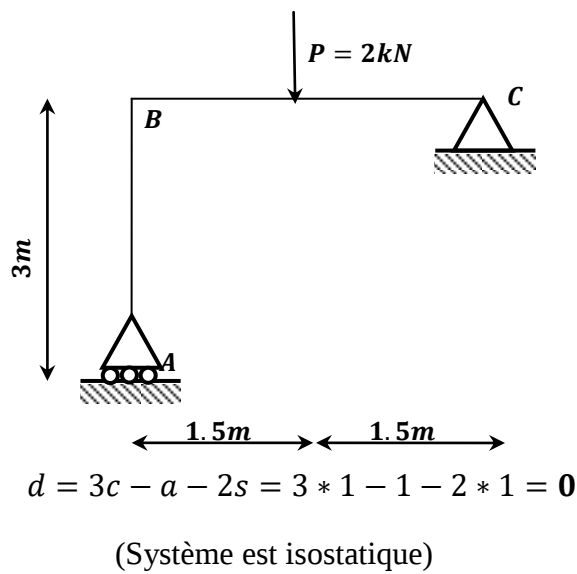
$$d = 3c - a - 2s$$

c : Le nombre de contours de la structure

a : Le nombre d'appuis doubles

s : Le nombre d'appuis simples

Applications :



1.5.3. Cas des poutres en treillis :

La formule ci-dessous permet de déterminer le degré d'hyperstaticité dans le cas des systèmes en treillis :

$$d = b + r - 2n$$

b : Le nombre de barres ou membrures

n : Le nombre de nœuds

r : Le nombre de réactions verticales et horizontales

$r = 2$: Dans le cas d'un appui double

$r = 1$: Dans le cas d'un appui simple

- $d = b + r - 2n = 0 \Rightarrow$ système est isostatique
 - $d = b + r - 2n > 0 \Rightarrow$ système est hyperstatique

Exemples :

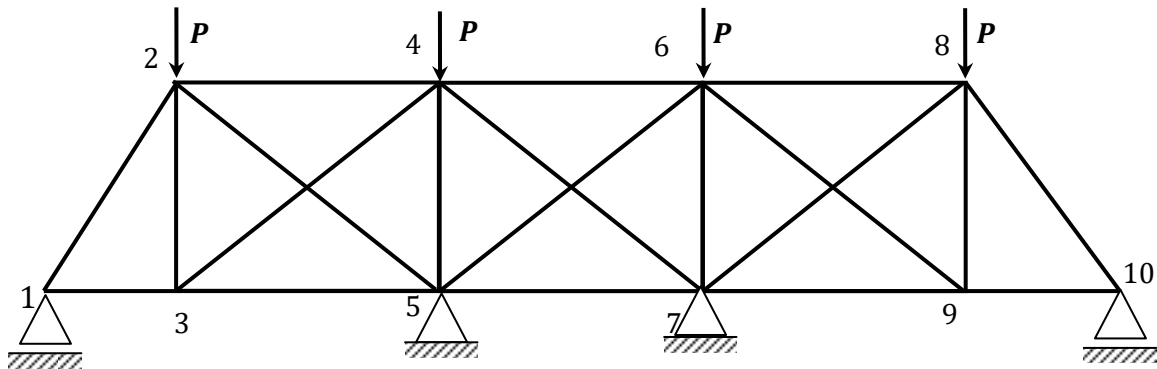


Figure 1.8. : Système en treillis

$$\left. \begin{array}{l} b = 20 \\ n = 10 \\ r = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow d = b + r - 2n = 20 + 6 - 2 \cdot 10 = 6 \text{ (Donc 6 fois hyperstatique)}$$

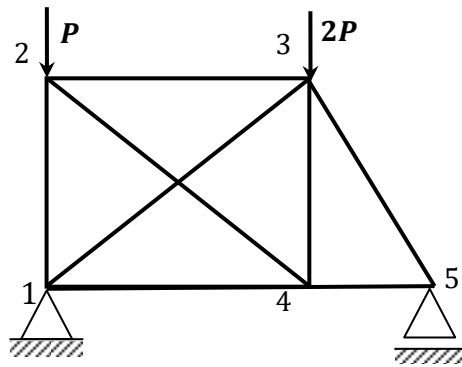


Figure 1.9. : Système en treillis

$$\left. \begin{array}{l} b = 8 \\ n = 5 \\ r = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow d = b + r - 2n = 8 + 3 - 2 \cdot 5 = 1 \text{ (Donc 1 fois hyperstatique)}$$

1.5.4. Remarques importantes :

- On remarque que le calcul du degré d'hyperstaticité est indépendant des charges extérieures appliquées au système. Il dépend surtout des conditions d'appuis.
- Par ailleurs, il existe deux genres d'hyperstaticité ; une hyperstaticité extérieure et l'autre intérieure. Cela signifie qu'il y a des inconnues supplémentaires liées aux appuis (réactions inconnues) et aussi d'autres inconnues liées aux efforts internes.

CHAPITRE 2

Méthode des trois moments

2.1. Méthode des trois moments :

La méthode des trois moments s'applique aux systèmes dits poutres continues. On suppose que l'effet de l'effort tranchant est négligé.

2.2. Principe de la méthode des trois moments :

Cette méthode consiste à déterminer les moments fléchissant dans le cas des poutres continues. C'est-à-dire des poutres qui reposent sur plus de deux appuis.

Il existe plusieurs façons pour déterminer le degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

$$d = r - 3 \quad (2.1)$$

r : le nombre de liaisons (réactions)

Ou bien :

$$d = n_a - 2 \quad (2.2)$$

n_a : le nombre d'appuis

Ou bien :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

Exemples :

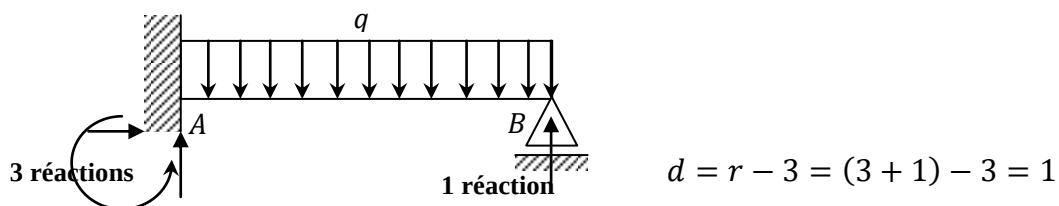


Figure 2.1. : Poutre sur 2 appuis (1 Encastrement et 1 simple)

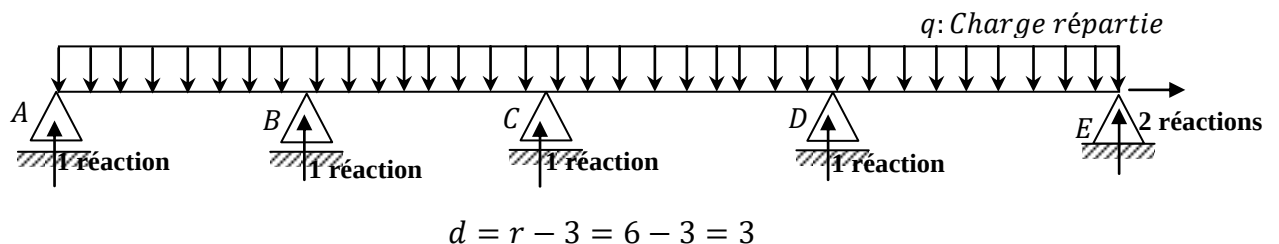


Figure 2.2. : Poutre sur 5 appuis (1 double et 4 simples)

2.3. Calcul des moments fléchissant dans les appuis :

- Considérons l'exemple de la figure 2.3. Le degré d'hyperstaicité de cette poutre est égal à $N-2$ où N représente le nombre d'appuis
- Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui.
- Dans chaque appui nous avons deux rotations (une à gauche et l'autre à droite).
- Pour une poutre de $N-1$ travées, on numérote les appuis de 1 à N . La travée l_i est comprise entre les appuis (i) et (i+1), avec une rigidité EI_i .

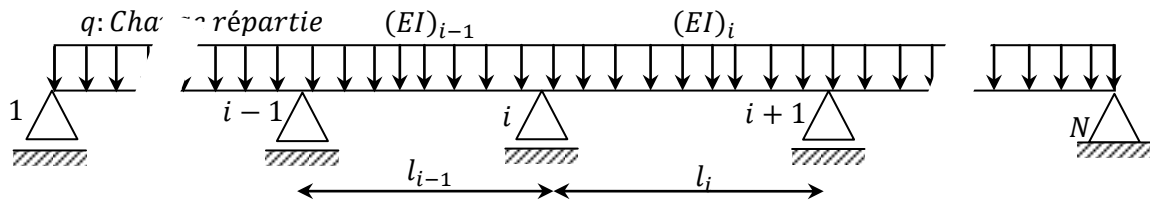


Figure 2.3. : Poutre continue sur N appuis

Une poutre continue comportant $N-1$ travées peut être décomposée en $N-1$ poutres isostatiques sur lesquelles s'appliquent les mêmes charges que sur la poutre continue avec en plus les moments aux appuis. Nous obtenons alors pour la travée $i-1$ et i :

- M_{i-1} : désigne le moment sur l'appui A_{i-1}
- M_i : désigne le moment sur l'appui A_i
- M_{i+1} : désigne le moment sur l'appui A_{i+1}

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = 0$$

On a deux types de rotations :

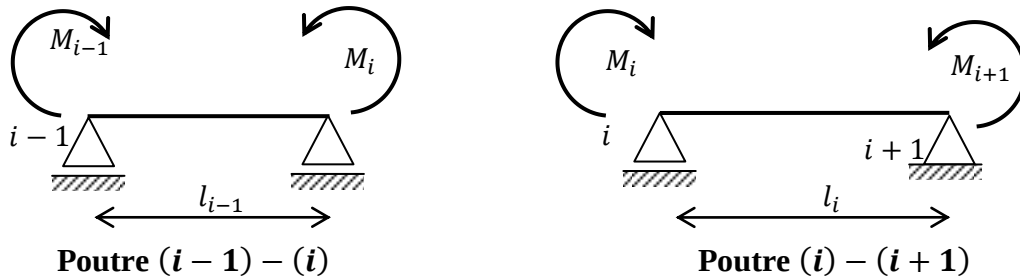
- Rotation due aux charges extérieures ($\varphi_{ig} + \varphi_{id}$)
- Rotation due aux moments fléchissants ($\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}$)

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}) = 0$$

A- Rotations dues aux moments fléchissants ($\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}$)

Les déformations en général et spécifiquement les rotations dues aux moments fléchissants peuvent être évaluée par l'une des méthodes analytiques connues comme par exemple : la méthode de CASTIGLIANO ou Maxwell-Mohr et aussi la méthode graphique de VERETCHAGUINE.

Ici le calcul des rotations est effectué par la méthode de Mohr.



A1- Poutre (i - 1) - (i)

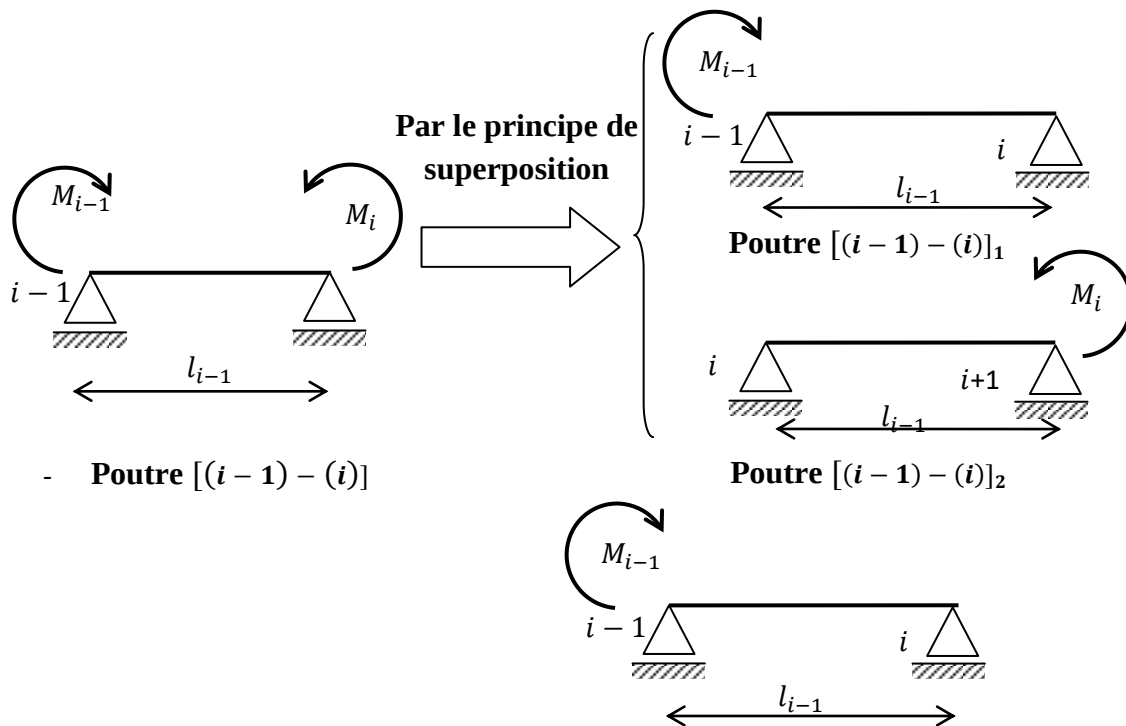
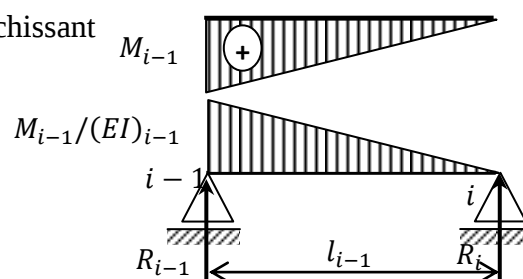


Diagramme des moments fléchissant

Poutre auxiliaire



$$\sum M/(i-1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{1}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_i = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

- **Poutre [(i-1) - (i)]**

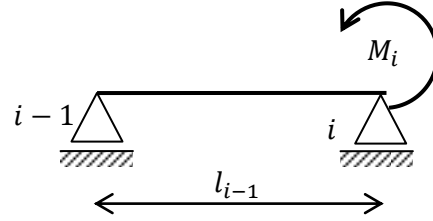
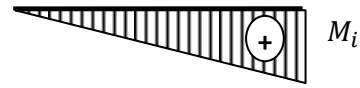
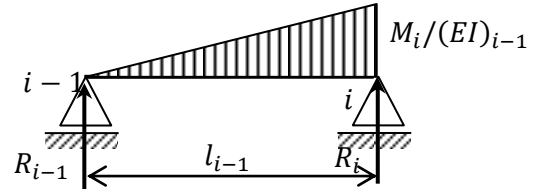


Diagramme des moments fléchissant



Poutre auxiliaire



$$\sum M/(i-1) = 0 \Rightarrow R_i l_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} \left(\frac{2}{3} l_{i-1} \right)$$

$$R_{i-1} = \overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

$$\overline{\varphi}_{ig} = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

A2- Poutre (i) - (i+1)

De la même pour la poutre (i) - (i+1)

$$\overline{\varphi}_{id} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i$$

$$\sum Rotations/point (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi}_{ig} + \overline{\varphi}_{id}) = 0 \quad (2.3)$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} M_i \left(\frac{l_{i-1}}{(EI)_{i-1}} + \frac{l_i}{(EI)_i} \right) + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

Cette équation est appelée méthode des trois moments (dite aussi méthode des rotations) ou aussi méthode de Clapeyron. Elle permet de calculer les moments aux appuis intermédiaires des poutres continues.

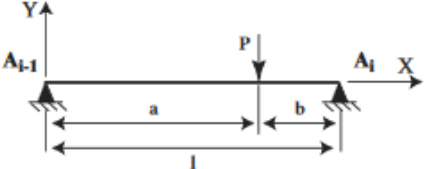
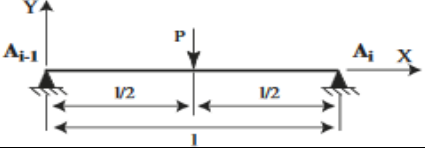
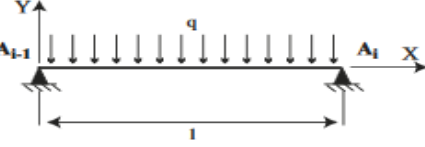
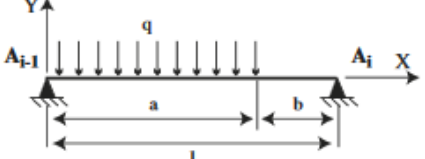
Si toutes les travées de la poutre ont la même rigidité EI , la relation devient :

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2(l_{i-1} + l_i)M_i + M_{i+1}l_i = -6EI(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) \quad (2.4)$$

B- Rotations dues aux charges extérieures ($\varphi_{ig} + \varphi_{id}$)

Le tableau suivant résume les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures :

Tableau 2.1 : les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures.

Schéma statique (géométrie et chargement)	$-6EI\varphi_{i-1}$	$-6EI\varphi_i$
	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$
	$-\frac{3}{8}Pl^2$	$-\frac{3}{8}Pl^2$
	$-\frac{1}{24}ql^3$	$-\frac{1}{24}ql^3$
	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$

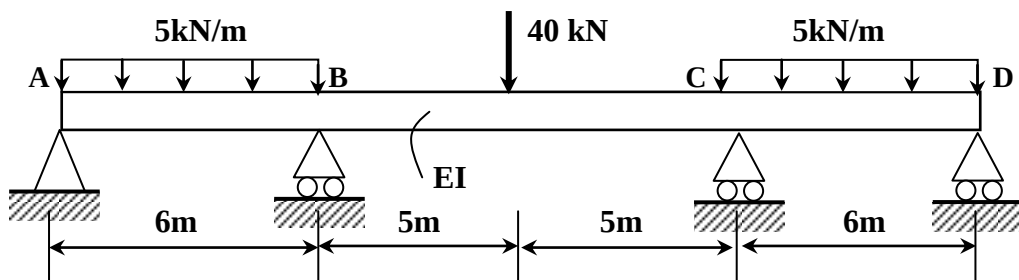
2.4. Exercices :

2.4.1 Exercice N° 2.1 :

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité EI constante. Elle supporte une charge répartie de 5kN/m sur la travée AB et CD et une charge concentrée de 40kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions aux appuis.
- Tracer le diagramme des moments fléchissants et des efforts tranchants.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatique}$$

Point B :

$$6M_A + 2(6 + 10)M_B + 10M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} = -5 \frac{6^3}{4} = -270 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -1770\text{kN.m}^2$$

$$\text{Et } M_A = 0$$

Donc :

$$32M_B + 10M_C = -1770\text{kN.m}^2$$

Point C :

$$10M_B + 2(10 + 6)M_C + 6M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$$-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{cg} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 10^2 = -1500 \\ -6EI\varphi_{cd} &= -q\frac{l^3}{4} = -5\frac{6^3}{4} = -270 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) = -1770 \text{ kN.m}^2$$

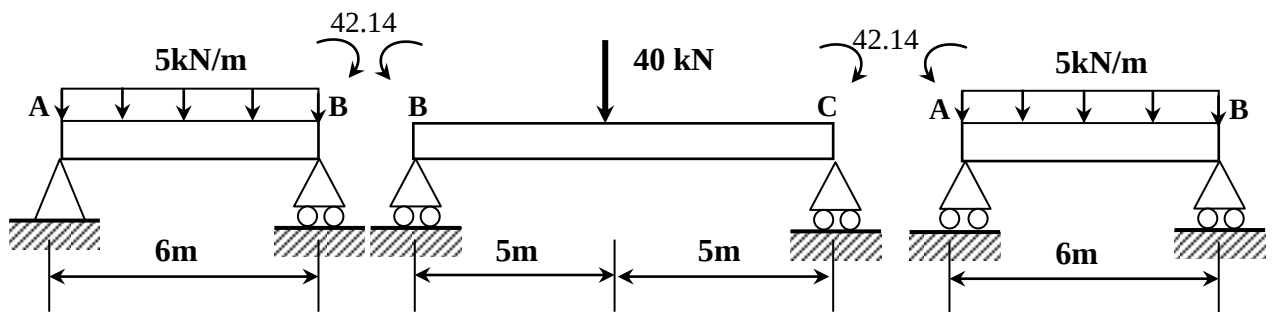
Et $M_D = 0$

Donc :

$$10M_B + 32M_C = -1770 \text{ kN.m}^2$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 10 \\ 10 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1770 \\ 1770 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow M_B = M_C = -42.14 \text{ kN.m}$$

Calcul des réactions : par le principe de la décomposition (superposition)



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

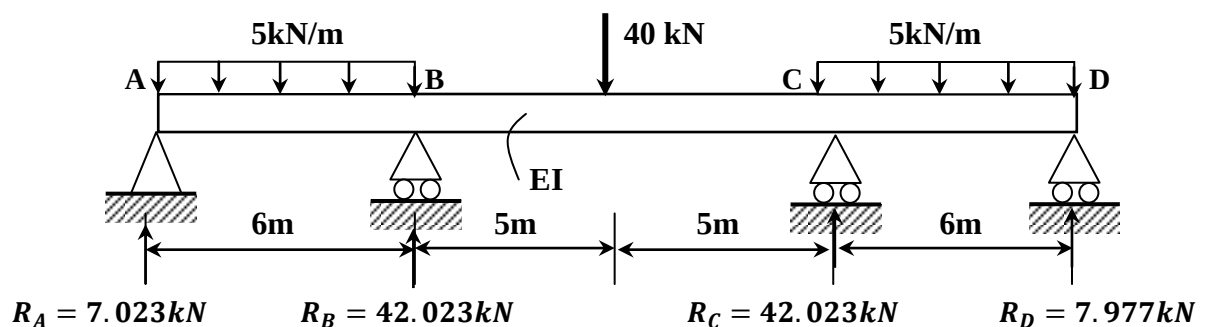


Diagramme des efforts tranchants

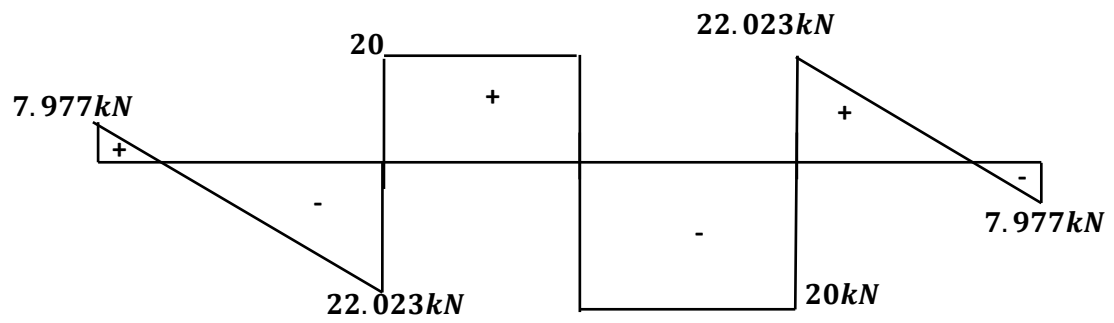
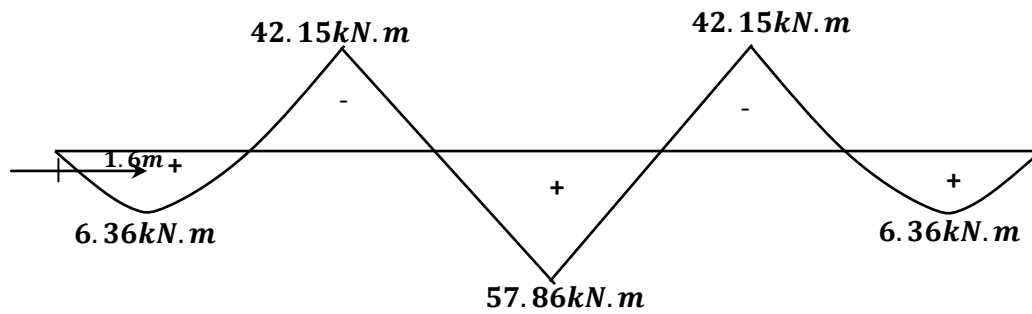


Diagramme des moments fléchissant :

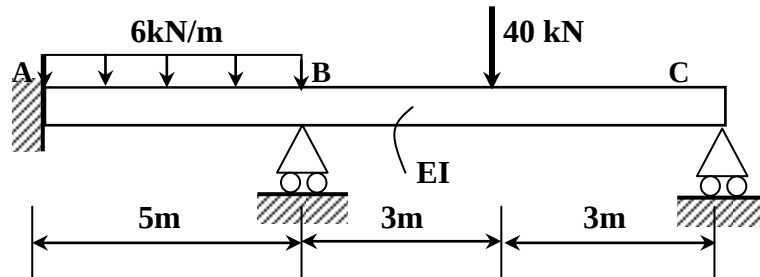


2.4.2. Exercice N° 2.2 :

On considère une poutre continue (ABC) de deux travées, de rigidité EI constante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur deux appuis simples en B et C. Elle supporte une charge répartie de 6kN/m sur la travée AB et une charge concentrée de 40kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

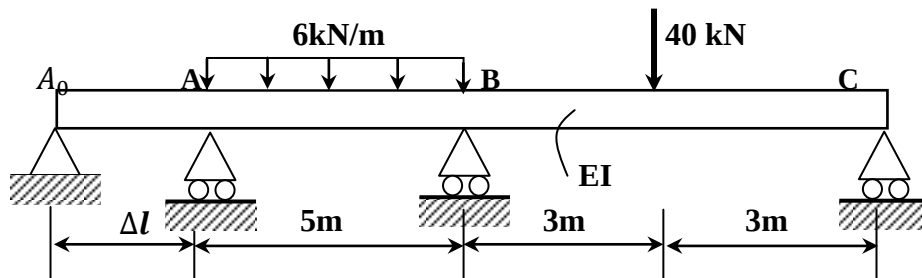
- Les réactions d'appuis en A, B et C.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatique}$$

On remplace l'encastrement par une poutre bi articulée ($A_0 - A$) de longueur Δl



Point A :

$$\Delta l M_{A_0} + 2(\Delta l + 5)M_A + 5M_B = -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$$-6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Ag} &= 0 \text{ (Aucune charge n'agit sur la poutre } A_0 - A) \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -q \frac{l^3}{4} = -6 \frac{5^3}{4} = -187.5 \\ &= -187.5 \text{ kN.m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

Donc : $10M_A + 5M_B = -187.5 \text{ kN.m}^2$

Point B :

$$5M_A + 2(5 + 6)M_B + 6M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

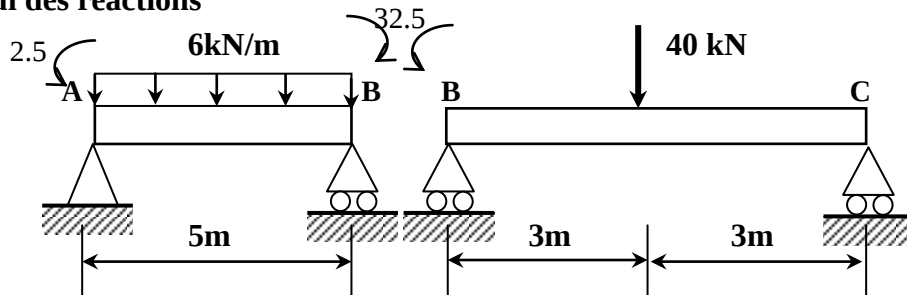
$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} = -6 \frac{5^3}{4} = -187.5 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}40 \cdot 6^2 = -540 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -727.5 \text{ kN.m}^2$$

Et $M_C = 0$

Donc : $5M_A + 22M_B = -727.5 \text{ kN.m}^2$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 187.5 \\ 727.5 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow M_A = -2.5 \text{ kN.m et } M_B = -32.5 \text{ kN.m}$$

Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \frac{5.6}{2} = 15 & & 15 & & \frac{40}{2} = 20 & & 20 \end{array}$$

Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 6 & & 6 & & 5.42 & & 5.42 \end{array}$$

Les réactions totales :

Ou $R_A = 15 - 6 = 9 \text{ kN}$, $R_B = 21 + 5.42 = 26.42 \text{ kN}$ et $R_C = 20 - 5.42 = 14.58 \text{ kN}$

Diagramme des efforts tranchants

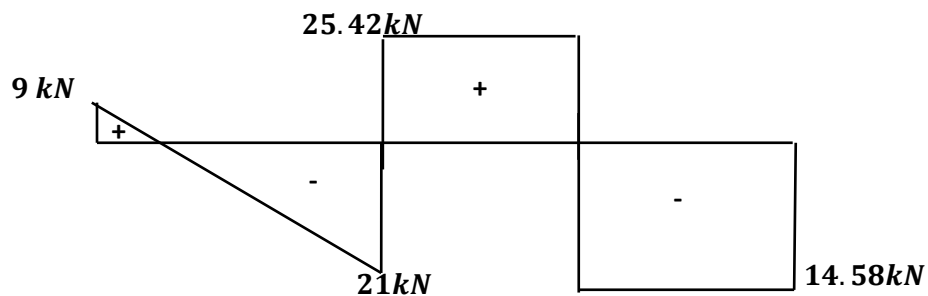
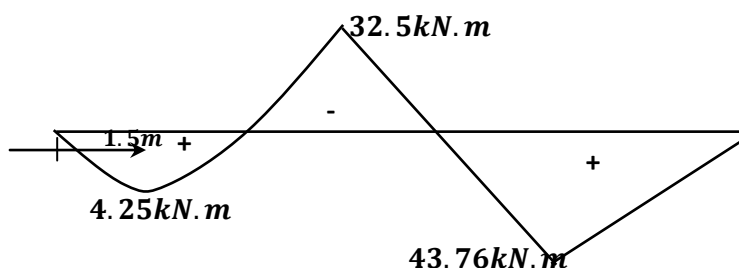


Diagramme des moments fléchissant :

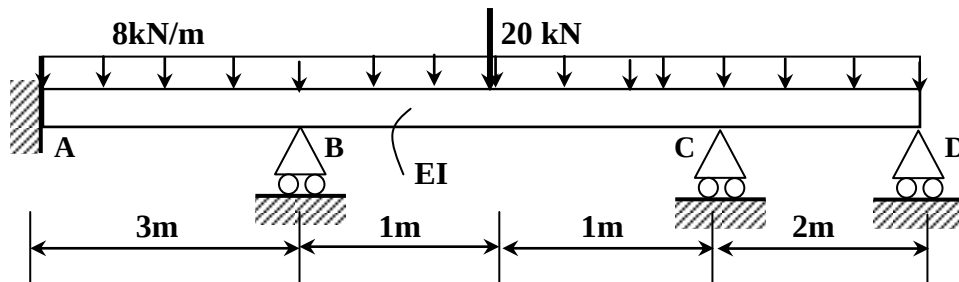


2.4.3. Exercice N° 2.3 :

On considère une poutre continue (ABCD) de trois travées, de rigidité EI constante sur toutes les travées. Celle-ci est encastrée en A, repose sur deux appuis simples en B, C et D. Elle supporte une charge répartie de 8kN/m sur toute la longueur de la poutre continue ABCD et une charge concentrée de 20kN au milieu de la travée BC.

En utilisant la méthode des trois moments, déterminer :

- Les réactions d'appuis en A, B, C et D.
- Le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 6 - 3 = 3 \text{ fois hyperstatique}$$

On peut remplacer l'encastrement A par une poutre bi articulée ($A_0 - A$) de longueur Δl

Point A :

$$\Delta l M_{A_0} + 2(\Delta l + 3)M_A + 3M_B = -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$$-6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Ag} &= 0 \text{ (Aucune charge n'agit sur la poutre } A_0 - A) \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -q \frac{l^3}{4} = -8 \frac{3^3}{4} = -54 \\ &= -54 \text{ kN.m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Ag} + \varphi_{Ad})$$

$$6M_A + 3M_B = -54$$

Point B :

$$3M_A + 2(3 + 2)M_B + 2M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -q \frac{l^3}{4} \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -q \frac{l^3}{4} - \frac{3}{8} Pl^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -100 \text{ kN.m}^2$$

Donc :

$$3M_A + 10M_B + 2M_C = -100$$

Point C :

$$2M_B + 2(2 + 2)M_C + 2M_D = -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd})$$

$-6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) :$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{cg} &= -q\frac{l^3}{4} - \frac{3}{8}Pl^2 \\ -6EI\varphi_{cd} &= -q\frac{l^3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) = -62kN.m^2$$

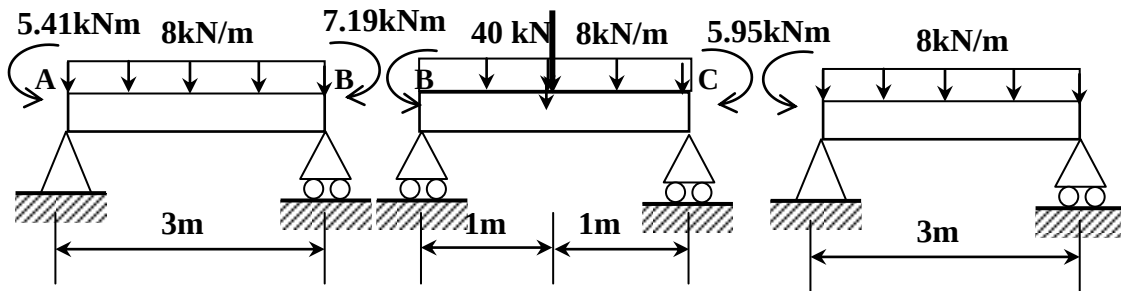
Et $M_D = 0$

Donc :

$$2M_B + 8M_C = -62kN.m^2$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 54 \\ 100 \\ 62 \end{Bmatrix} kN.m^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.4063 \\ -7.1875 \\ -5.9531 \end{Bmatrix} kN.$$

Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

$$R_A = 11.41 \text{ kN}, R_B = 31.2 \text{ kN} \text{ et } R_C = 5.02 \text{ kN}$$

Diagramme des efforts tranchants

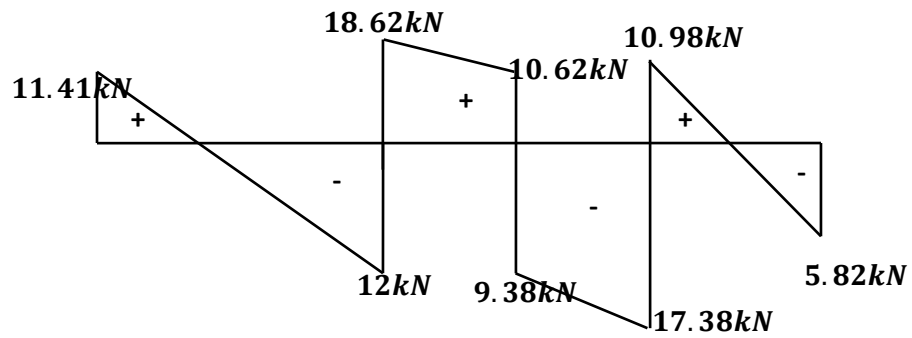
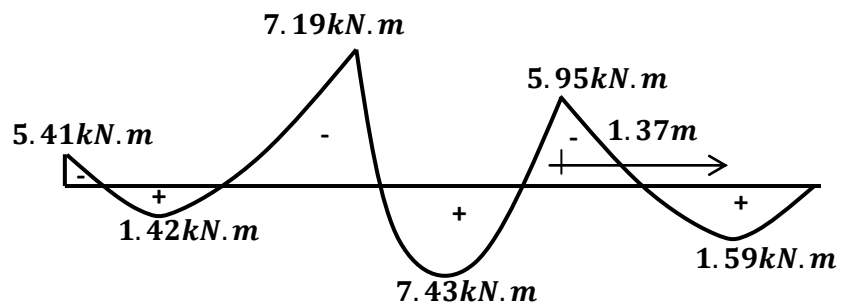
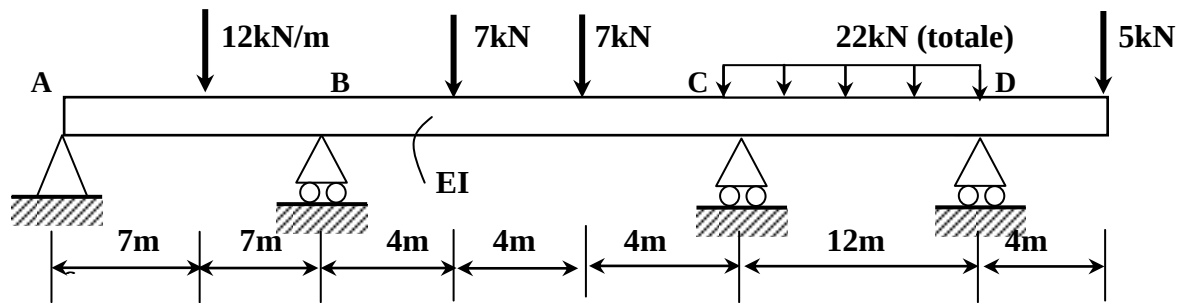


Diagramme des moments fléchissant :



2.4.4. Exercice N° 2.4 :

Tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant de la poutre suivante :



Degré d'hyperstaticité :

$$d = 5 - 3 = 2 \text{ fois hyperstatique}$$

Les inconnues hyperstatiques sont M_B et M_C

Point B :

$$14M_A + 2(14 + 12)M_B + 12M_C = -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd})$$

$$-6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{Bg} &= -\frac{3}{8}Pl^2 = -\frac{3}{8}12 \cdot 14^2 \\ -6EI\varphi_{Bd} &= -\frac{2}{3}Pl^2 = -\frac{2}{3}7 \cdot 12^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{Bg} + \varphi_{Bd}) = -1554 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{Et } M_A = 0$$

Donc :

$$52M_B + 12M_C = -1554 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Point C :

$$12M_B + 2(12 + 12)M_C + 12M_D = -6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd})$$

$$-6EI(\varphi_{Cg} + \varphi_{Cd}) :$$

$$\left. \begin{aligned} -6EI\varphi_{cg} &= -\frac{2}{3}Pl^2 = -\frac{2}{3}7 \cdot 12^2 \\ -6EI\varphi_{cd} &= -q\frac{l^3}{4} = -1.833\frac{12^3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6EI(\varphi_{cg} + \varphi_{cd}) = -1464 \text{ kN.m}^2$$

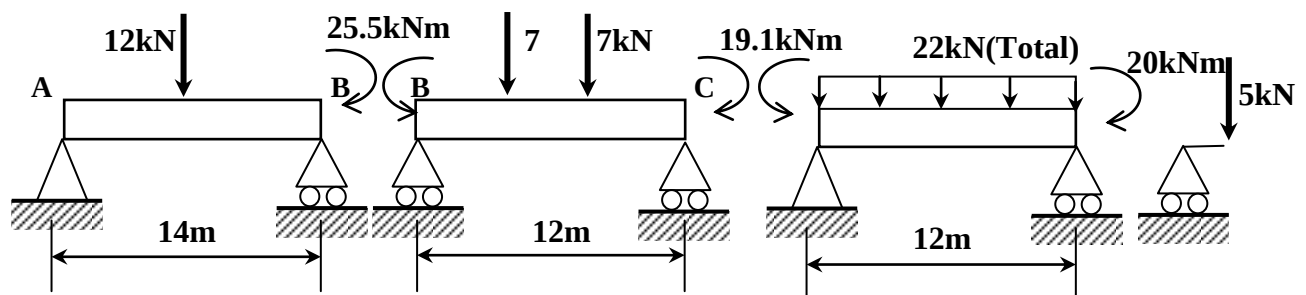
Et $M_D = -20 \text{ kN.m}$

Donc :

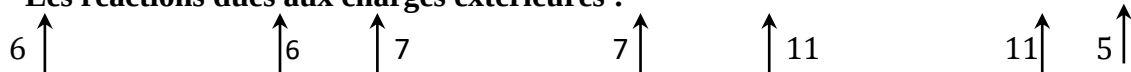
$$16M_B + 56M_C = -1464 - 12(-20)$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 12 \\ 12 & 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 1554 \\ 1224 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 25.5 \\ 19.1 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}$$

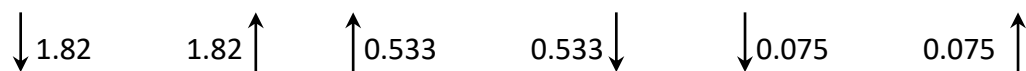
Calcul des réactions



Les réactions dues aux charges extérieures :



Les réactions dues aux moments appliqués aux niveaux des appuis :



Les réactions totales :

$$R_A = 4.18 \text{ kN}, R_B = 15.1246 \text{ kN}, R_C = 17.39 \text{ kN} \text{ et } R_D = 16.07 \text{ kN}$$

Diagramme des efforts tranchants

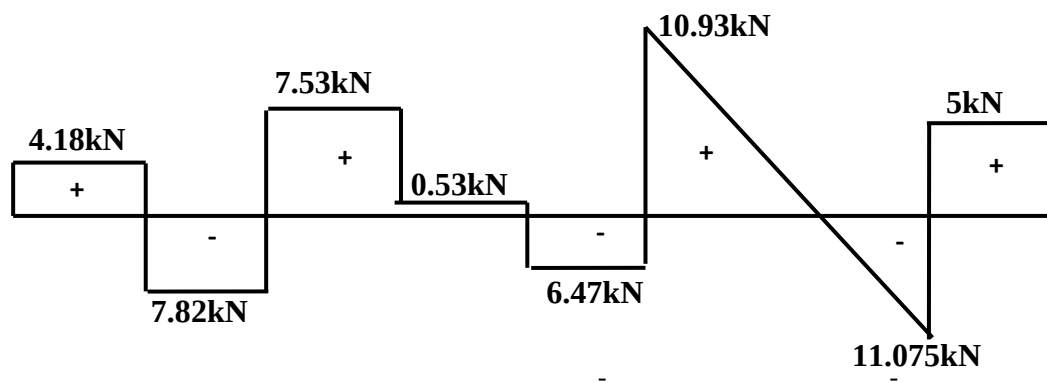
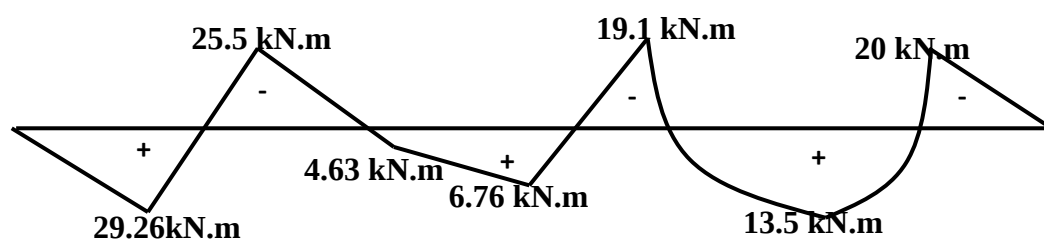


Diagramme des moments fléchissant :



CHAPITRE 3

Méthode des forces

3.1. Méthode des forces

La méthode des forces s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites. Elle est basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charges réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

3.2. Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.

Pour la même structure il y a plusieurs choix du système de base (Exemple, Figure 3.1).

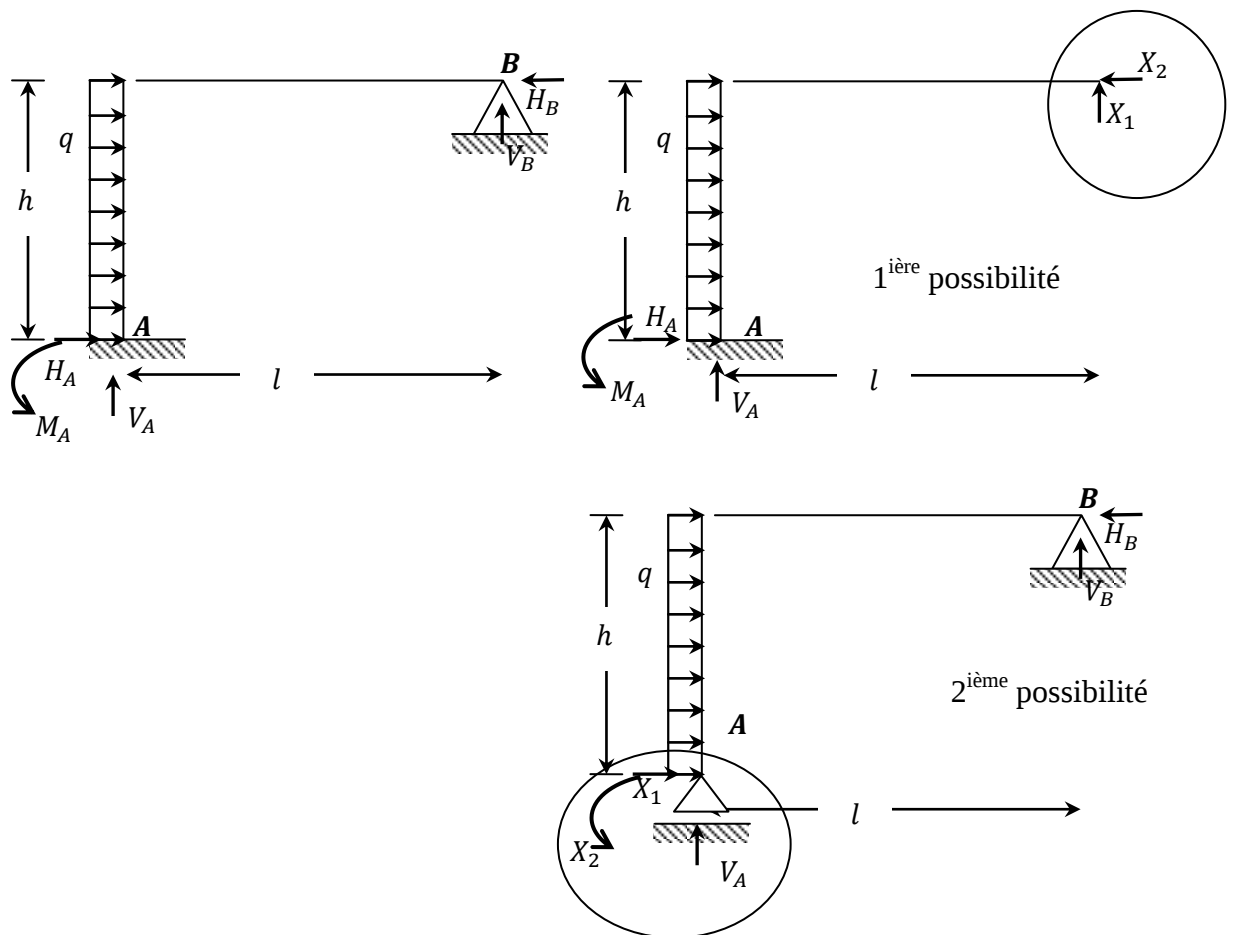


Figure 3.1. : La structure initiale est transformée en une structure isostatique équivalente soumise aux charges extérieures et aux réactions choisies (les inconnues X_1 et X_2).

Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par :

- Système de base,
- Système fondamental,
- Système principal.

La structure isostatique équivalente est soumise à deux catégories de forces :

- Forces extérieures de départ (les charges réparties, concentrées, ...).
- Réactions introduites (les inconnues hyperstatiques).

3.3. Degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité d représente le nombre d'équations supplémentaires qu'il faut pour calculer toutes les réactions du système.

On peut calculer d à l'aide de la formule des contours :

$$d = 3c - a - 2s \quad (3.1)$$

3.4. Système de base :

Le système de base est le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes dont les actions sont remplacées par des forces inconnues. D'une façon générale, pour une structure hyperstatique donnée, on peut choisir plusieurs systèmes isostatiques de base.

3.5. Différentes possibilités des systèmes de base

Différentes possibilités de systèmes de bases d'une même structure plane hyperstatique (Figure 3.2.) sont présentées.

$$d = 3c - 1a - 2s = 3.2 - 1.2 - 2.0 = 4$$

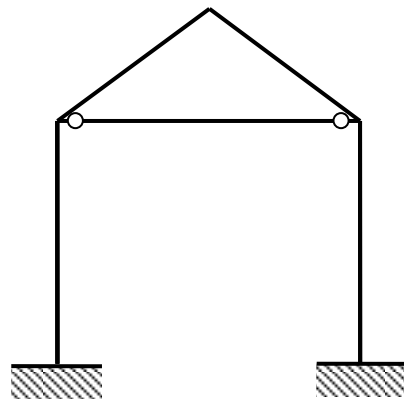


Figure 3.2. : Exemple de structure hyperstatique

1^{ière} possibilité :

- En effet, on peut rendre isostatique la structure de la Figure suivante en libérant totalement l'encastrement au pied du poteau gauche et en sectionnant le tirant (élément entre les 2 rotules) ; les inconnues hyperstatiques sont alors : le moment d'encastrement X_1 , les réactions respectivement verticale X_2 et horizontale x_3 au pied du poteau gauche et l'effort normal X_4 dans le tirant.

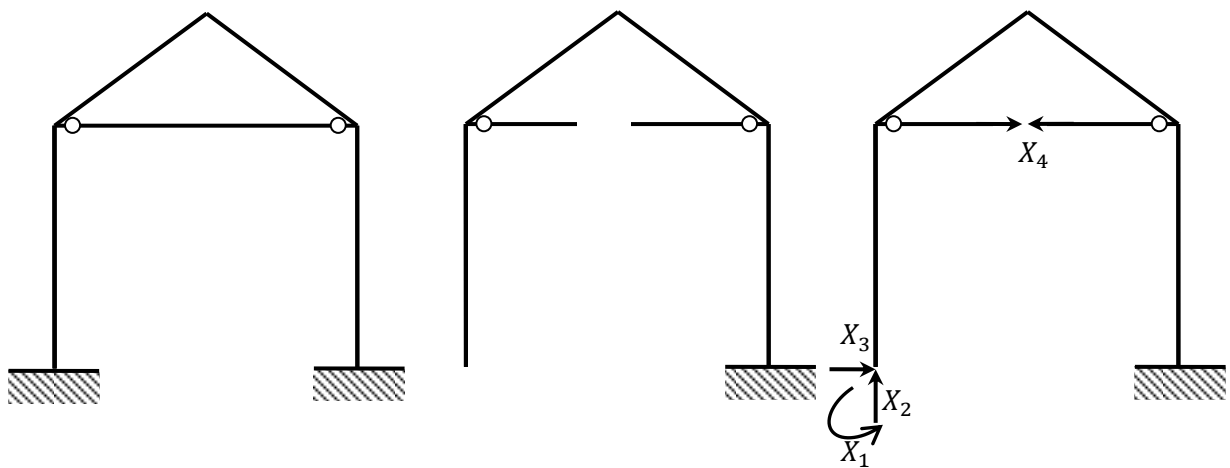


Figure 3.2.a : Type poutre sur appuis simple

2^{ème} possibilité :

- Une deuxième manière est de libérer la rotation et la translation horizontale au niveau de l'encastrement gauche (X_1 (moment) et X_3 (réaction)), aussi de libérer la rotation au niveau de l'encastrement de droite X_2 (moment) et enfin de sectionner le tirant pour faire apparaître l'inconnu X_4 (l'effort normal).

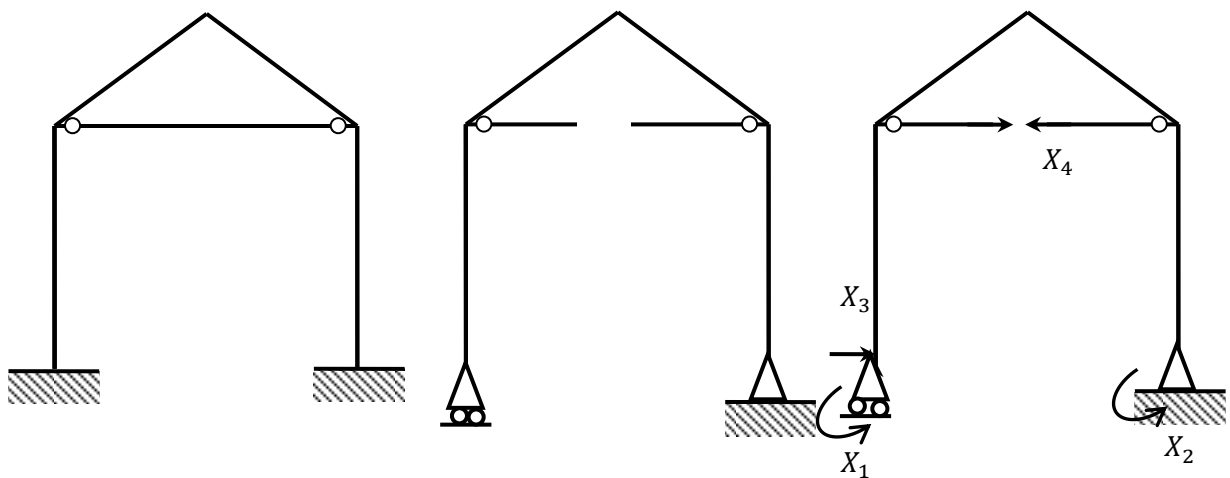


Figure 3.2.b : Type poutre cantilever

3^{ème} possibilité :

- On pourrait aussi choisir les inconnues X_1, X_2 et X_3 respectivement le moment interne, l'effort normal et l'effort tranchant de l'élément indiqué sur la figure ci-dessous et toujours en gardant X_4 comme inconnu (l'effort normal de tirant) (Figure 3.2.c).

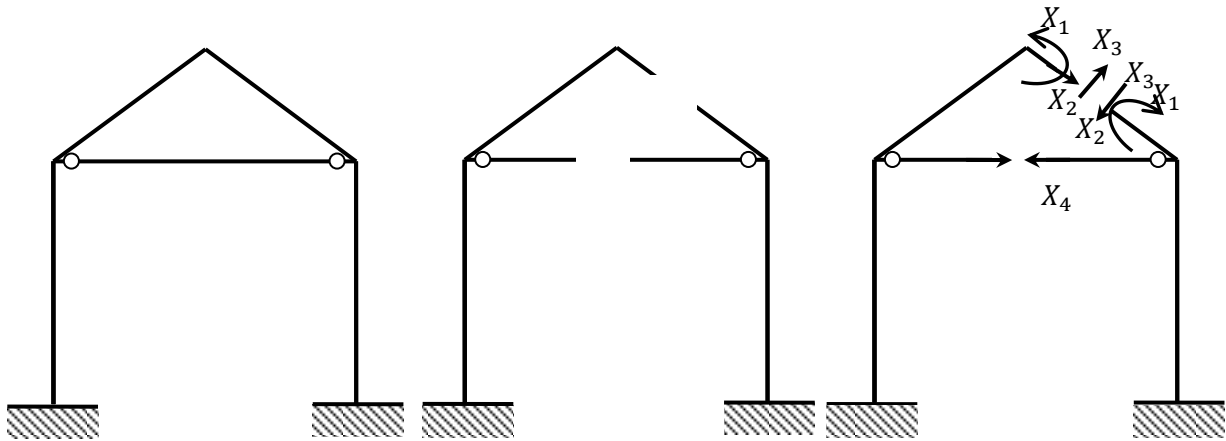
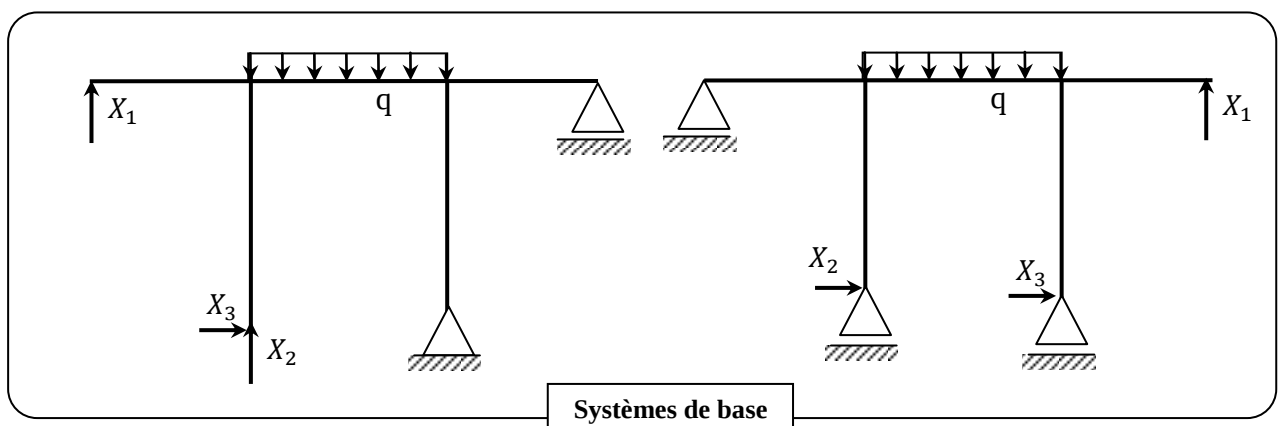
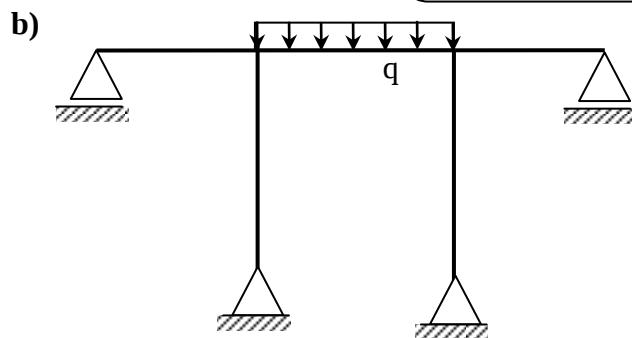
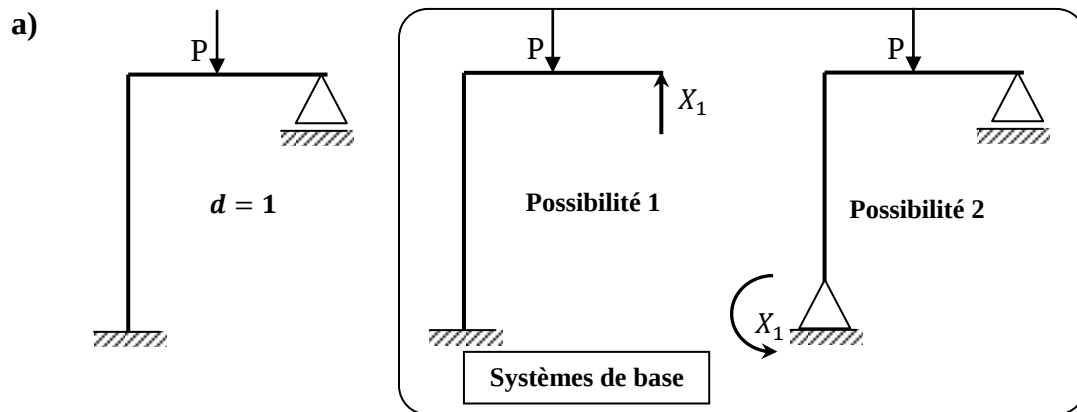


Figure 3.2.c : Type double poutre cantilever

3.6. Exemples :

Calculer le degré d'hyperstaticité et représenter les différents systèmes de base :



$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_j m_i dx \\ \delta_{i0} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0 m_i dx \\ \delta_{ii} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_i m_i dx \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Notant que les expressions des moments m_i et m_j sont toujours linaires sauf pour les expressions de M_0 . Nous pouvons calculer les coefficients de flexibilité δ_{ij} à l'aide des expressions analytiques données ci-dessous, aussi par la méthode graphique de veretchaguine.

Les tableaux présentés ci-dessous permettent d'évaluer ces intégrales pour certaines cas de charges extérieures.

Tableau 3.1. : Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE				
	M.m	$\frac{1}{2} M(mg+md)$	$\frac{1}{2} M(mg+md)$	0
	$\frac{1}{2} m(Mg+Md)$	$\frac{1}{6}(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$\frac{1}{6}(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$\frac{1}{6} mg(Mg-Md)$
	$\frac{1}{2} m(Mg+Md)$	$\frac{1}{6}(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$\frac{1}{6}(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$\frac{1}{6} mg(Mg-Md)$
	0	$\frac{1}{6} Mg(mg-md)$	$\frac{1}{6} Mg(mg-md)$	$\frac{1}{3} Mgmg$
	$\frac{1}{2} Mgm$	$\frac{1}{6} Mg(2mg+md)$	$\frac{1}{6} Mg(2mg+md)$	$\frac{1}{6} Mgmg$
	$\frac{1}{2} Mdm$	$\frac{1}{6} Md(mg+2md)$	$\frac{1}{6} Md(mg+2md)$	$-\frac{1}{6} Mdmg$
	$\frac{1}{2} Mm$	$\frac{1}{6} M[mg(1+\beta)+md(1+\alpha)]$	$\frac{1}{6} M[mg(1+\beta)+md(1+\alpha)]$	$\frac{1}{6} Mmg(1-2\alpha)$
	$\frac{1}{2} Mm$	$\frac{1}{4} M(mg+md)$	$\frac{1}{4} M(mg+md)$	0
	$\frac{1}{3} Mgm$	$\frac{1}{12} Mg(3mg+md)$	$\frac{1}{12} Mg(3mg+md)$	$\frac{1}{6} Mgmg$
	$\frac{1}{3} Mdm$	$\frac{1}{12} Md(mg+3md)$	$\frac{1}{12} Md(mg+3md)$	$\frac{1}{6} Mdmd$
	$\frac{2}{3} Mm$	$\frac{1}{3} M(mg+md)$	$\frac{1}{3} M(mg+md)$	0
	$\frac{2}{3} Mgm$	$\frac{1}{12} Mg(5mg+3md)$		$\frac{1}{6} Mgmg$
	$\frac{2}{3} Mdm$	$\frac{1}{12} Md(3mg+5md)$		$-\frac{1}{6} Mdmg$

Tableau 3.1. (suite): Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

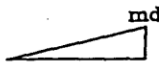
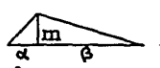
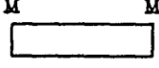
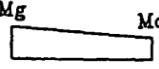
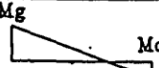
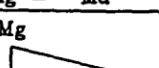
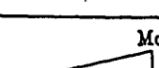
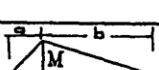
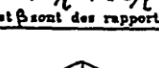
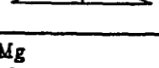
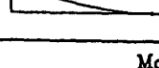
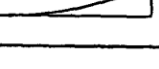
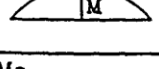
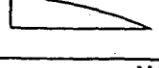
Introduire M et m avec leur SIGNE			 α et β sont des rapports	
	$1/2 M m_g$	$1/2 M m_d$	$1/2 M m$	$1/2 M m$
	$1/6 m_g (2M_g + M_d)$	$1/6 m_d (M_g + 2M_d)$	$1/6 m [M_g(1+\beta) + M_d(1+\alpha)]$	$1/4 m (M_g + M_d)$
	$1/6 m_g (2M_g + M_d)$	$1/6 m_d (M_g + 2M_d)$	$1/6 m [M_g(1+\beta) + M_d(1+\alpha)]$	$1/4 m (M_g + M_d)$
 $M_g = -M_d$	$1/6 M_g m_g$	$-1/6 M_g m_d$	$1/6 M_g m (1-2\alpha)$	0
	$1/3 M_g m_g$	$1/6 M_g m_d$	$1/6 M_g m (1+\beta)$	$1/4 M_g m$
	$1/6 M_d m_g$	$1/3 M_d m_d$	$1/6 M_d m (1+\alpha)$	$1/4 M_d m$
 $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ α et β sont des rapports	$1/6 M m_g (1+\beta)$	$1/6 M m_d (1+\alpha)$	$1/3 M m$	$1/12 M m (3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$
	$1/4 M m_g$	$1/4 M m_d$	$1/12 M m (3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$	$1/3 M m$
	$1/4 M_g m_g$	$1/12 M_d m_d$	$1/12 M_d m (1+\beta+\beta^2)$	$7/48 M_g m$
	$1/12 M_d m_g$	$1/4 M_d m_d$	$1/12 M_d m (1+\alpha+\alpha^2)$	$7/48 M_d m$
	$1/3 M m_g$	$1/3 M m_d$	$1/3 M m (1+\alpha\beta)$	$5/12 M m$
	$5/12 M_g m_g$	$1/4 M_g m_d$	$1/12 M_g m (5-\alpha-\alpha^2)$	$17/48 M_g m$
	$1/4 M_d m$	$5/12 M_d m_d$	$1/12 M_d m (5-\beta-\beta^2)$	$17/12 M_d m$

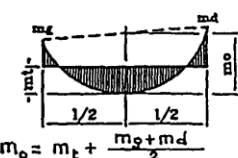
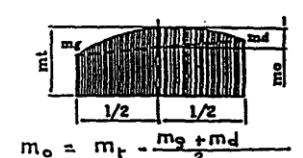
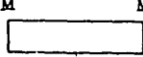
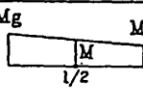
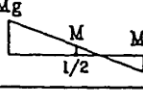
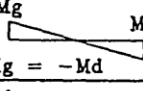
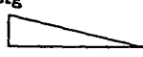
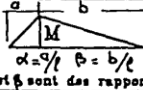
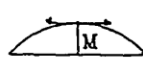
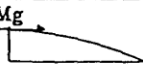
Tableau 3.1. (suite) : Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE					
	$1/3 Mmg$	$1/3 Mmd$	$2/3 Mm$	$2/3 Mmg$	$2/3 Mmd$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Md+5Mg)$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Md+5Mg)$
	$1/6 Mgm$	$1/6 Mdmd$	0	$1/6 Mgm$	$1/6 Mdmd$
	$1/4 Mgm$	$1/12 Mgmd$	$1/3 Mgm$	$5/12 Mgm$	$1/4 Mgmd$
	$1/12 Mdm$	$1/4 Mdmd$	$1/3 Mdm$	$1/4 Mdm$	$5/12 Mdmd$
	$1/12 Mmg(1+\beta+\beta^2)$	$1/12 Mmd(1+\alpha+\alpha^2)$	$1/3 Mm(1+\alpha\beta)$	$1/12 Mmg(5-\alpha-\alpha^2)$	$1/12 Mmd(5-\beta-\beta^2)$
	$7/48 Mmg$	$7/48 Mmd$	$5/12 Mm$	$17/48 Mmg$	$17/48 Mmd$
	$1/5 Mgm$	$1/30 Mgmd$	$1/5 Mgm$	$3/10 Mgm$	$2/15 Mgmd$
	$1/30 Mdm$	$1/5 Mdmd$	$1/5 Mdm$	$2/15 Mdm$	$3/10 Mdmd$
	$1/5 Mmg$	$1/5 Mmd$	$8/15 Mm$	$7/15 Mmg$	$7/15 Mmd$
	$3/10 Mgm$	$2/15 Mgmd$	$7/15 Mgm$	$8/15 Mgm$	$11/30 Mgmd$
	$2/15 Mdm$	$3/10 Mdmd$	$7/15 Mdm$	$11/30 Mdm$	$8/15 Mdmd$

Tableau 3.1. (suite) : Valeur de $\frac{1}{l} \int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE	$\frac{1}{l} \int M^2 dx$	  $m_o = m_t + \frac{m_g + m_d}{2}$ $m_o = m_t - \frac{m_g + m_d}{2}$
	M^2	$\frac{1}{6} M(mg + 4mt + md)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2 + MgMd + Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg + 4Mmt + Mdmd)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2 + MgMd + Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg + 4Mmt + Mdmd)$
 $Mg = -Md$	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg - md)$
	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg + 2mt)$
	$\frac{1}{3} Md^2$	$\frac{1}{6} Md(2mt + md)$
 $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ α et β sont des rapports	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{M}{6} \left[-2m_o(1 + \alpha + \alpha^2) + (m_o - m_g + md)(1 + \alpha) + 3m_g \right]$
	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{1}{24} M(mg + 10mt + md)$
	$\frac{1}{5} Mg^2$	$\frac{1}{60} Mg[5(3mg + md) + 12m_o]$
	$\frac{1}{5} Md^2$	$\frac{1}{60} Md[5(mg + 3md) + 12m_o]$
	$\frac{8}{15} M^2$	$\frac{1}{15} M[5(mg + md) + 8m_o]$
	$\frac{8}{15} Mg^2$	$\frac{1}{60} Mg[5(5mg + 3md) + 28m_o]$ ou $\frac{1}{60} Mg(11mg + md + 28mt)$

3.9. La procédure de la méthode des forces :

Les différentes étapes de calcul par la méthode des forces sont les suivantes :

- Déterminer le degré d'hyperstaticité $d = n$
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants M_0 du système isostatique due aux charges extérieures ($X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$)
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires m_i ($i = 1, \dots, n$) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec $X_i=1$ et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients δ_{ij} et δ_{i0} à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques

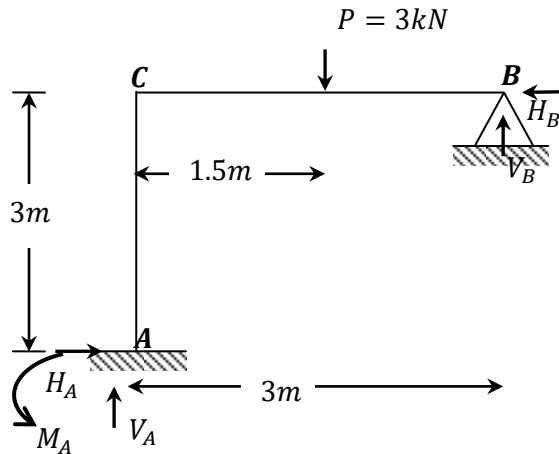
[illegible]

- Correction des épures unitaires $m_i^* = m_i X_i$ ($i = 1, \dots, n$).
 $m_1^* = m_1 X_1$; $m_2^* = m_2 X_2$; ... ; $m_n^* = m_n X_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants
 $M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$

3.10. Exercices

3.10.1. Exercice N°3.1 :

Un portique ACB constitué de poutre et de poteau de rigidité EI en flexion. Tracer les diagrammes des moments fléchissants M_f , des efforts tranchants T et des efforts normaux N .



- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)

$$d = 3c - a - 2s$$

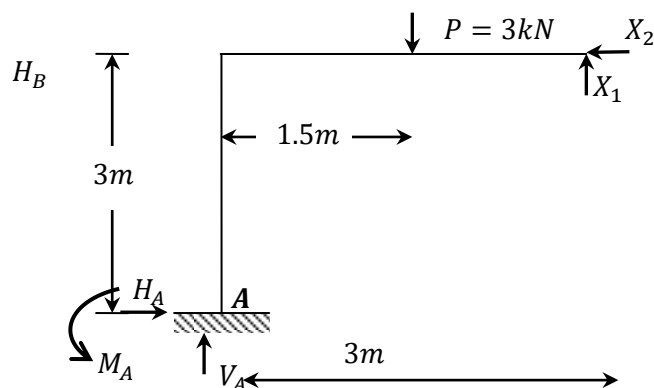
- c : le nombre de contours de la structure ($c = 1$)
 - a : le nombre d'appuis doubles ($a = 1$)
 - s : le nombre d'appuis simples ($s = 0$)
- $$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} d = 2$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

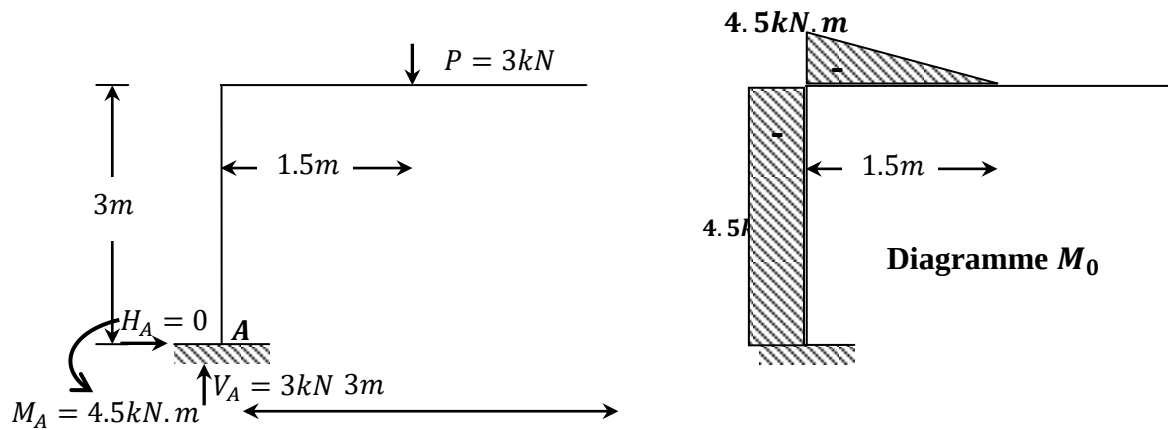
- Choix du système de base (fondamental)

La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ ($P = 3kN$) et aux deux forces inconnues (X_1 et X_2).

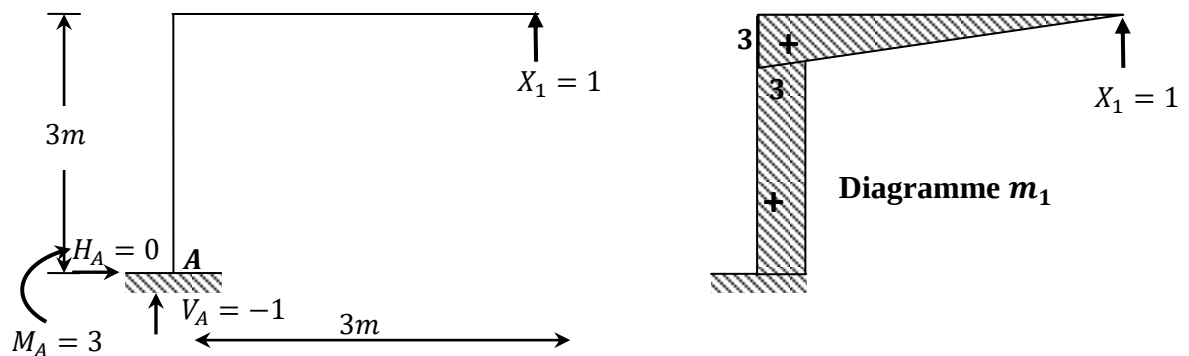


- On Trace les diagrammes unitaires (m_1 ; m_2) et celui des charges extérieures (M_0)

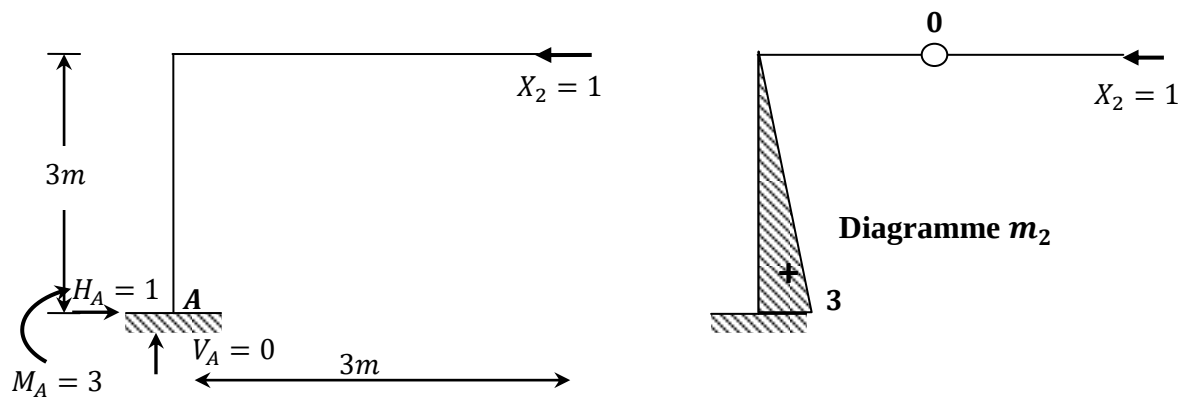
- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = X_2 = 0$**



- **Etat 1 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**



- **Etat 2 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**



- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_i m_j dx \text{ (Méthode de VERETCHAGUINE)}$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

- Les coefficients δ_{11} et δ_{21} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1 = 1$.
- Les coefficients δ_{12} et δ_{22} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_2 = 1$.
- Les coefficients δ_{10} et δ_{20} se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force $P=3\text{kN}$) appliquées au système de isostatique de base.
- Les diagrammes (m_1 ; m_2 et M_0) serviront au calcul de ces coefficients.

On trouve,

$$\delta_{11} = \frac{36}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{13.5}{EI}, \quad \delta_{22} = \frac{9}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{48.94}{EI} \quad \text{et} \quad \delta_{20} = -\frac{20.25}{EI}$$

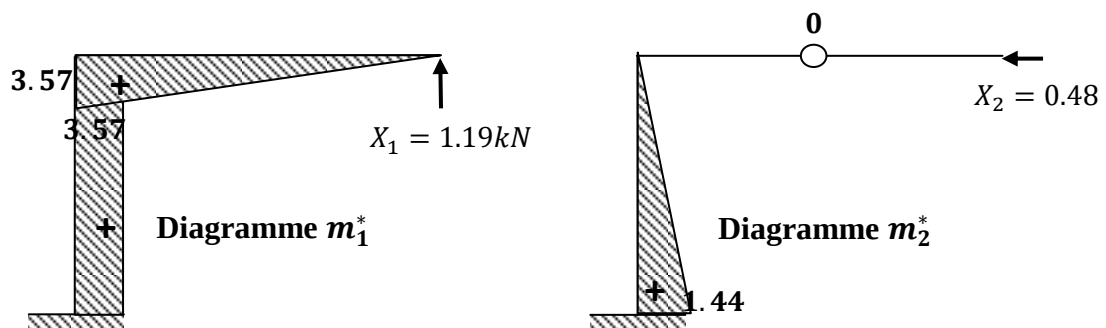
$$\begin{cases} \frac{36}{EI}X_1 + \frac{13.5}{EI}X_2 - \frac{48.94}{EI} = 0 \\ \frac{13.5}{EI}X_1 + \frac{9}{EI}X_2 - \frac{20.25}{EI} = 0 \end{cases}$$

A partir du système, on trouve :

$$\begin{cases} X_1 = 1.19\text{kN} \\ X_2 = 0.48\text{kN} \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires

- Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1X_1$
- Le diagramme corrigé $m_2^* = m_2X_2$



- Le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^*$$

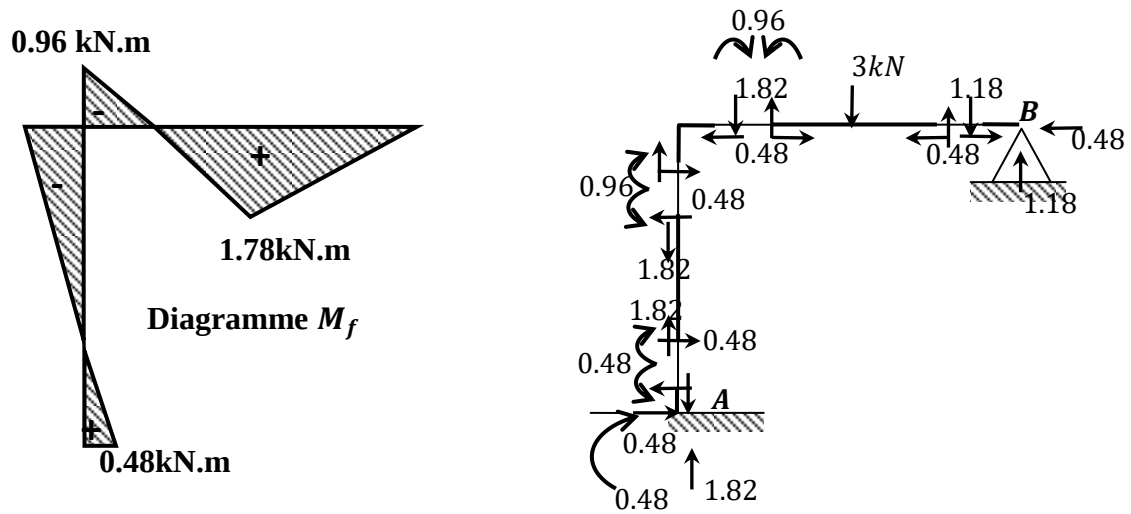


Diagramme de l'effort tranchant

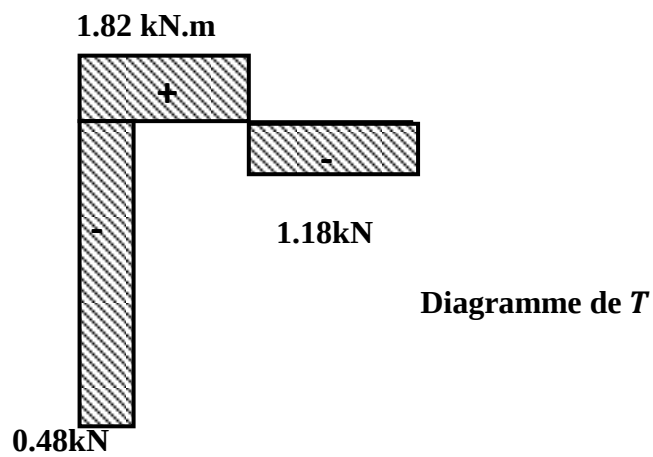
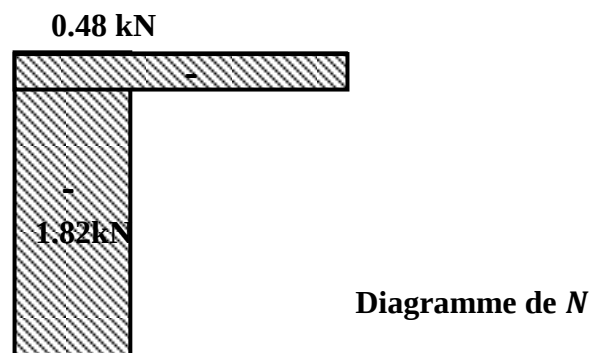


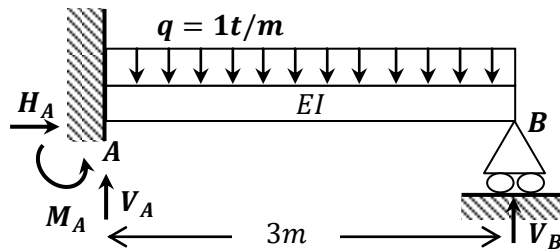
Diagramme de l'effort normal



3.10.2. Exercice N°3.2 :

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B et soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre. La rigidité EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants.



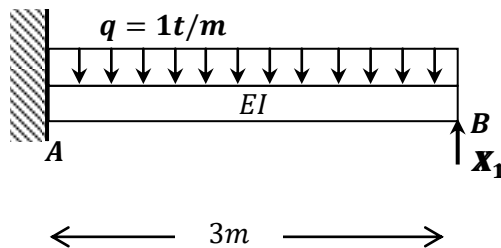
- On détermine le degré d'hyperstaticité d

$$d = 4(\text{liaisons}) - 3(\text{équations}) = 1$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

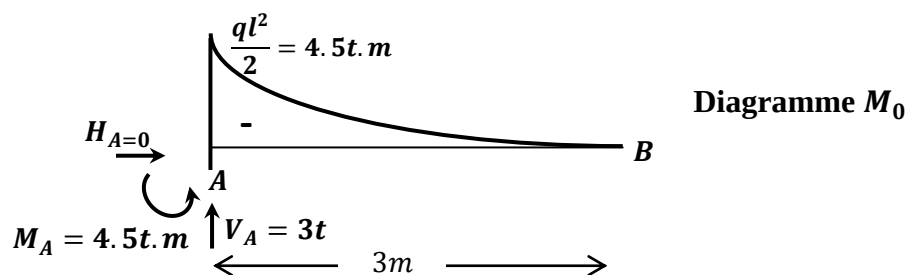
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)

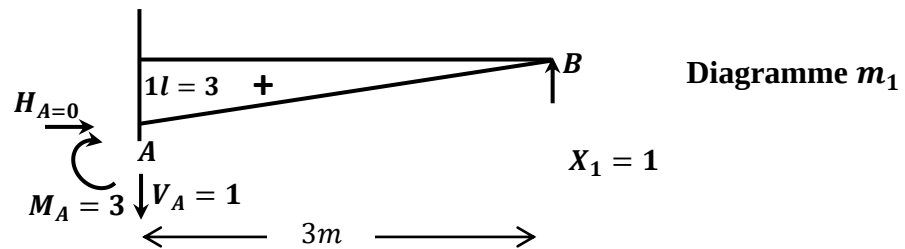


- On Trace l'épure unitaire (diagramme) (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$



- Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $X_1 = 1$



- Calculer les déplacements δ_{ij} .

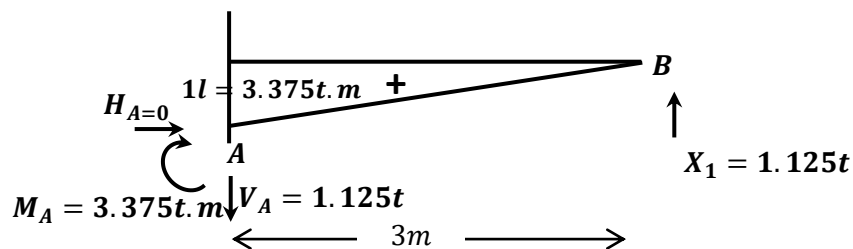
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \quad \delta_{10} = -\frac{ql^4}{8EI} = -\frac{10.125}{EI}$$

$$\frac{9}{EI}X_1 - \frac{10.125}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1 = 1.125t$

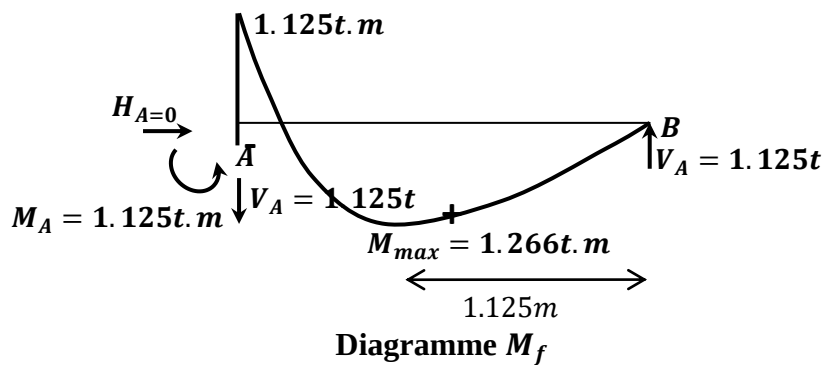
- Correction de l'épure unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$



- On Trace le diagramme final des moments fléchissants de l'état réel par superposition de l'épure unitaire m_1^* avec le diagramme M_0 .

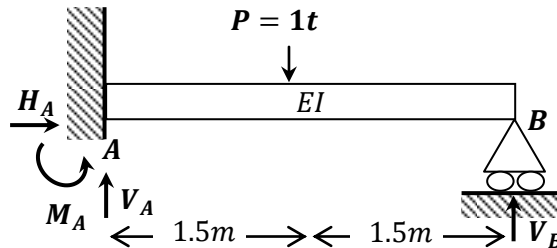
$$M_f = M_0 + m_1^*$$



3.10.3. Exercice N° 3.3 :

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B, est soumise à une charge constante de 1t. EI est constante.

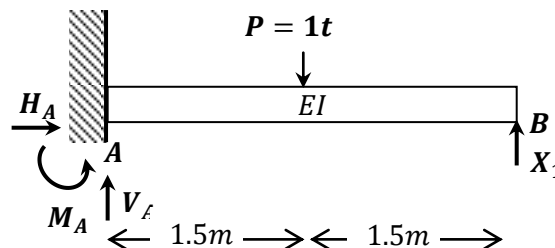
On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.



- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)
 $d = 4(\text{liaisons}) - 3(\text{équations}) = 1$
- On écrit le système d'équations canoniques :

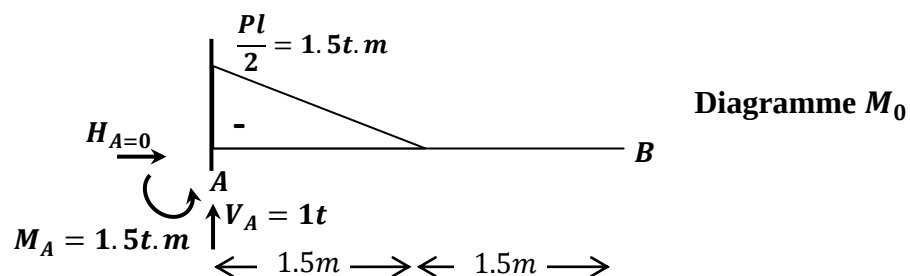
$$\delta_{11}^u X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)

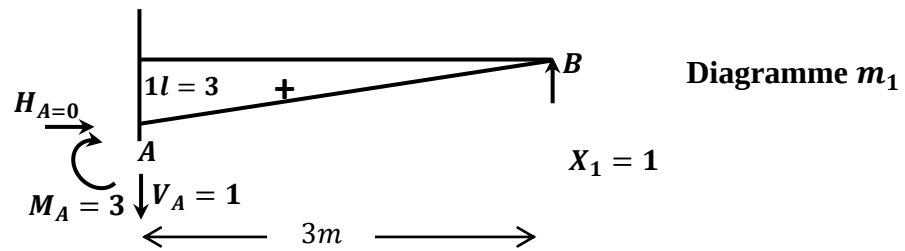


- On Trace le diagramme unitaire (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$



- **Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $X_1 = 1$**



- Calculer les déplacements δ_{ij} .

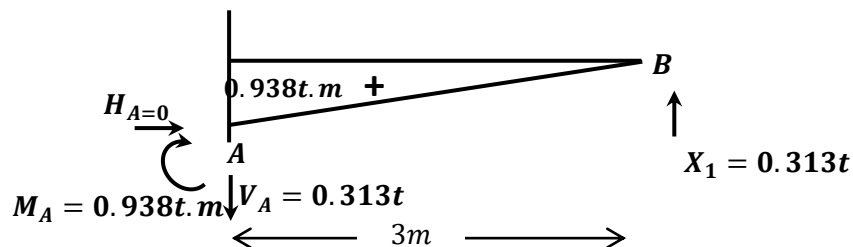
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \quad \delta_{10} = -\frac{5Pl^3}{48EI} = -\frac{2.813}{EI}$$

$$\frac{9}{EI} X_1 - \frac{2.813}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1 = 0.313t$

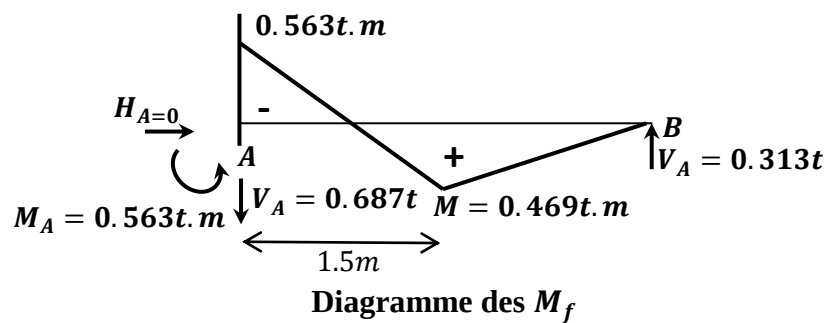
- Correction de diagramme unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$



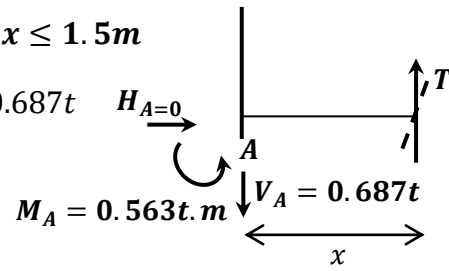
- On Trace le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^*$$



Section 1-1 $0 \leq x \leq 1.5m$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687t$$



Section 1-1 $1.5 \leq x \leq 3m$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687 - 1 = 0.313t$$

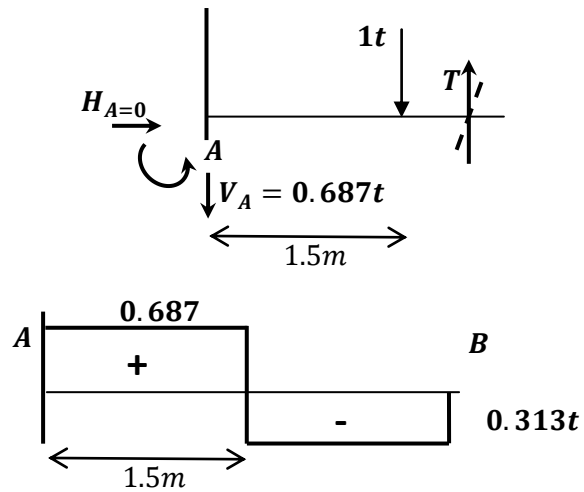
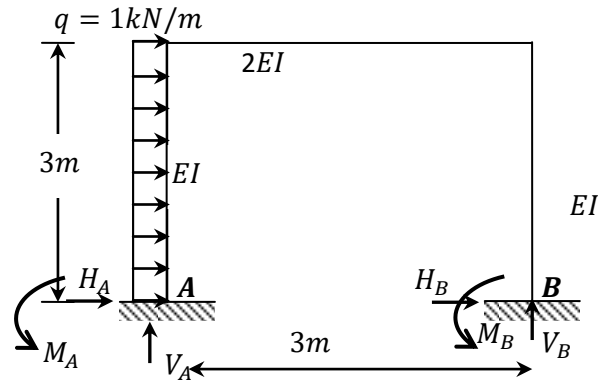


Diagramme de T

3.10.4. Exercice N°3.4 :

Un portique constitué de deux poteaux et une poutre. Tracer le diagramme des moments fléchissants.



- On détermine le degré d'hyperstaticité d
 $d = 3c - a - 2s = 3.1 - 0 - 2.0 = 3$

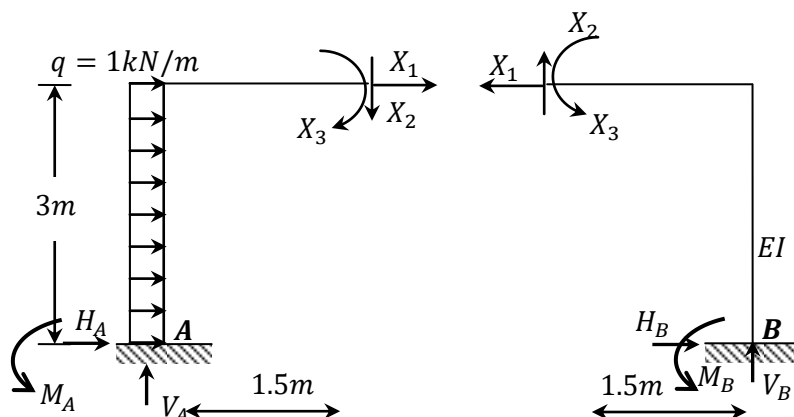
⇒ 3 inconnues hyperstatiques (X_1, X_2 et X_3)

- On écrit le système d'équations canoniques :

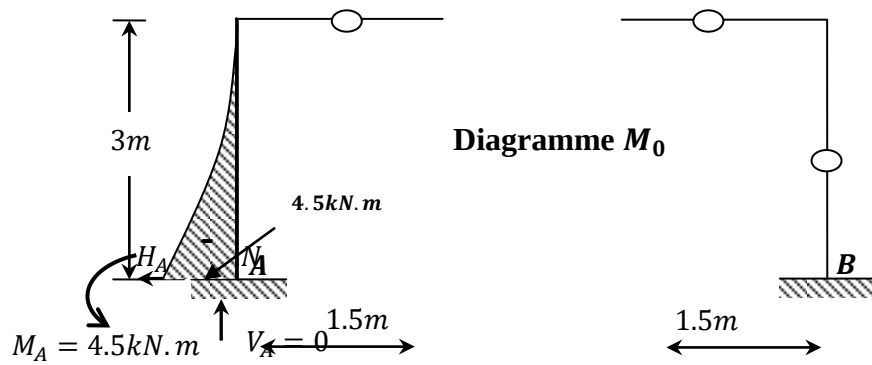
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases}$$

- Choix du système de base (fondamental)

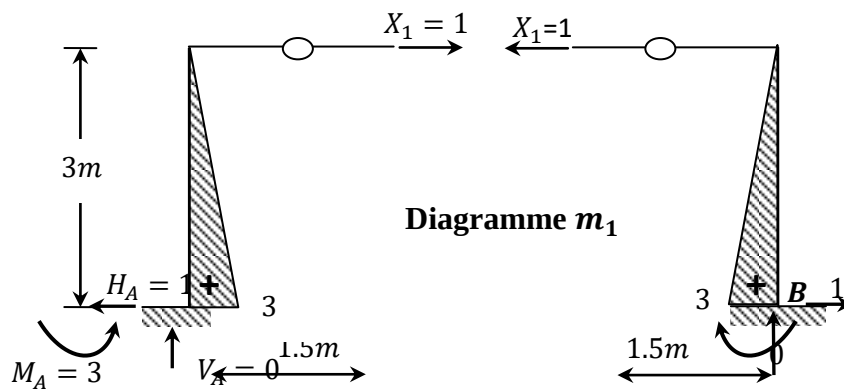
Les inconnus X_1, X_2 et X_3 représente les efforts internes au milieu de la poutre du cadre.



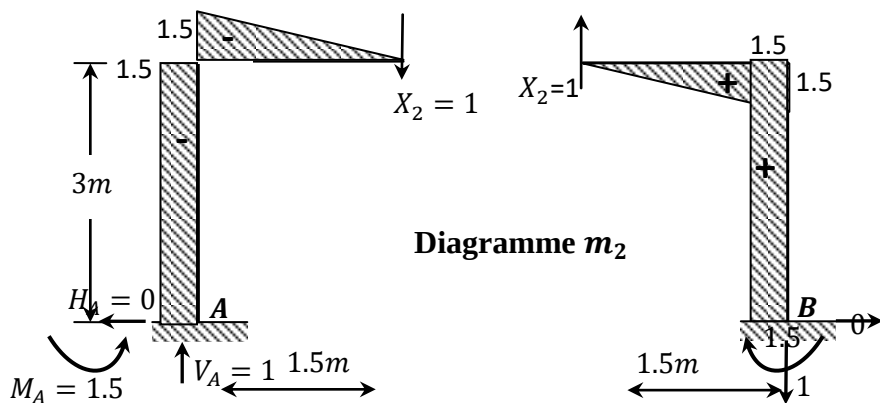
- On Trace les diagrammes unitaires ($m_1; m_2; m_3$) et celui des charges extérieures (M_0)
 - Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = X_2 = X_3 = 0$



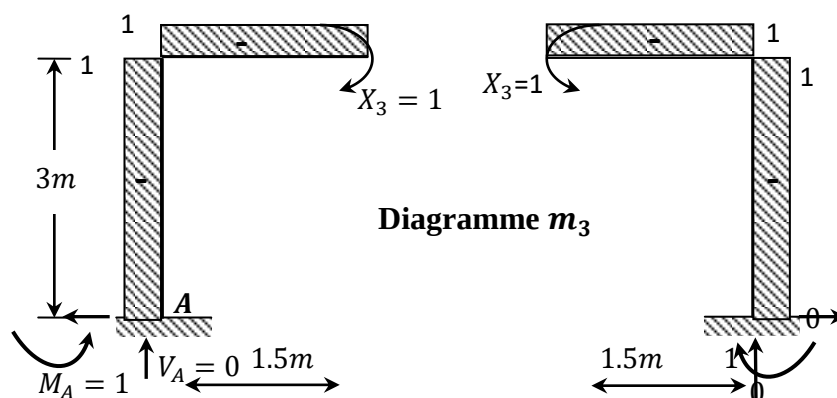
- Etat 1 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$



- Etat 2 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ et $X_3 = 0$



- Etat 3 : Charges extérieures = 0, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 1$



- Calculer les déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{18}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0, \quad \delta_{22} = \frac{14.63}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{9}{EI}, \quad \delta_{33} = \frac{7.5}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{10.13}{EI}, \quad \delta_{20} = \frac{6.75}{EI} \quad \text{et} \quad \delta_{30} = \frac{13.5}{EI}$$

- Le système d'équations canoniques :

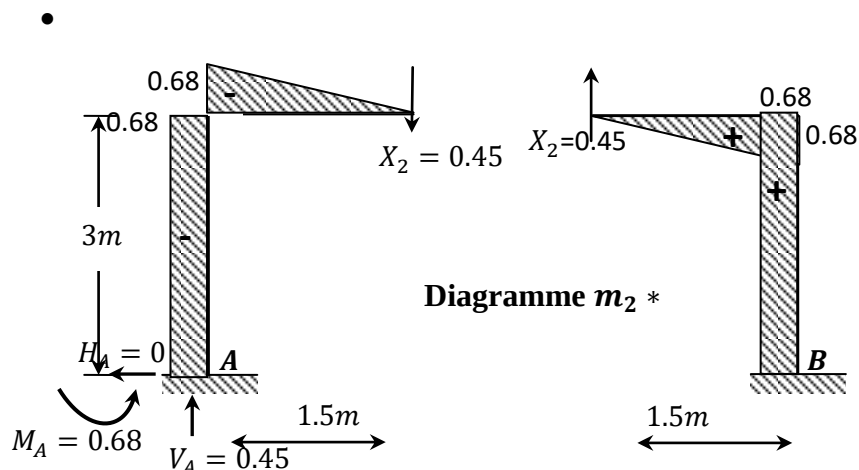
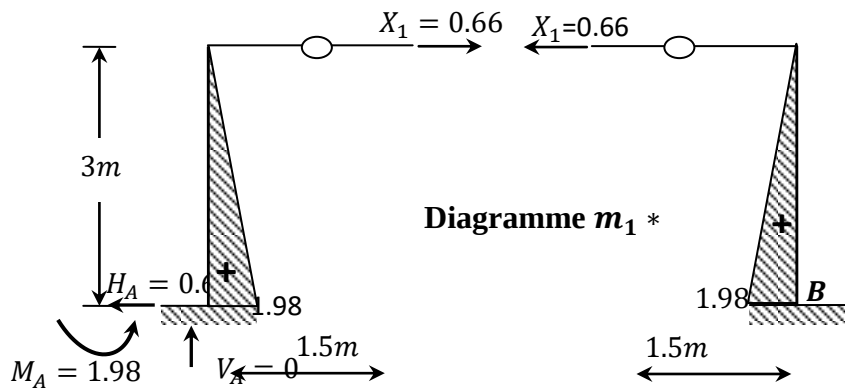
$$\begin{cases} \frac{18}{EI} X_1 + 0 \cdot X_2 + -\frac{9}{EI} X_3 - \frac{10.13}{EI} = 0 \\ 0 \cdot X_1 + \frac{14.63}{EI} X_2 + 0 \cdot X_3 + \frac{6.75}{EI} = 0 \\ -\frac{9}{EI} X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{7.5}{EI} X_3 + \frac{13.5}{EI} = 0 \end{cases}$$

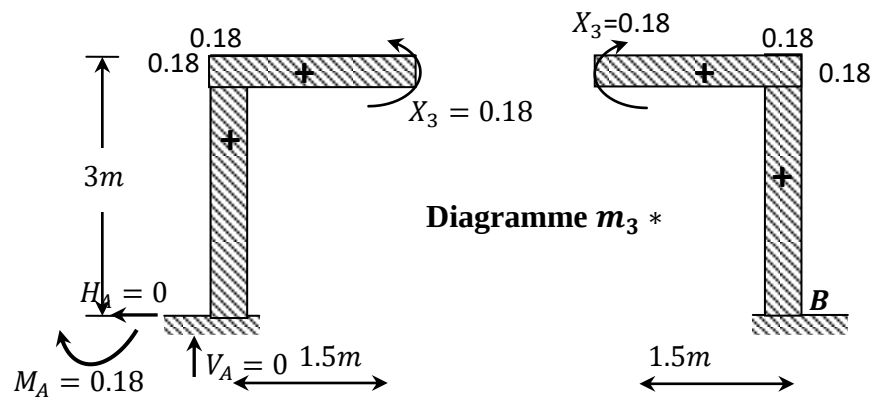
La résolution du système donne :

$$\begin{cases} X_1 = 0.66 \text{ kN} \\ X_2 = 0.45 \text{ kN} \\ X_3 = -0.18 \text{ kN.m} \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires

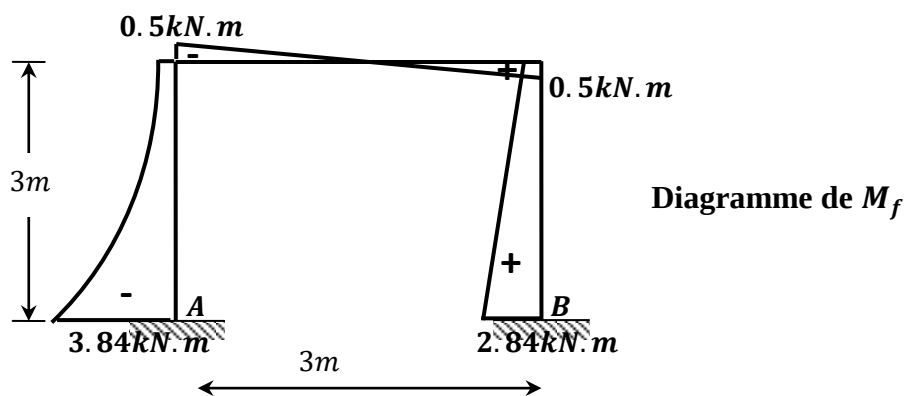
- Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$
- Le diagramme corrigé $m_2^* = m_2 X_2$
- Le diagramme corrigé $m_3^* = m_3 X_3$





- Donc le diagramme final du système réel :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^* + m_3^*$$



CHAPITRE 4

Méthodes des déplacements

4.1. Introduction :

La méthode des déplacements ou des déformations est une des méthodes les plus utilisées pour le calcul des systèmes hyperstatiques. Les déformations (rotations et translations) sont les inconnues.

4.2. Nombre d'inconnues de la méthode :

Le nombre d'inconnues de la méthode des déplacements est égal au nombre de rotations des nœuds N_r et le nombre de translations N_t du portique ($N = (N_r + N_t)$).

- **Nombre de rotations N_r** : le nombre de rotations d'un portique est égal aux nombre de nœuds intermédiaires rigides ($N_r = \text{nœuds intermédiaires rigides}$).
- **Nombre de translations N_t** : le nombre de translations possibles du portique :

$$N_t = 2n - (b + l) \quad (4.1)$$

Avec :

n : Nombre total de nœuds (nœuds et appuis).

b : Nombre de barres.

l : Nombre de liaisons (réactions) verticales ou horizontales.

4.3. Intérêt de la méthode des déplacements :

On réduit considérablement avec cette méthode le nombre des inconnues surabondantes et elle permet de déterminer la matrice de rigidité unique du système.

Exemple1 :

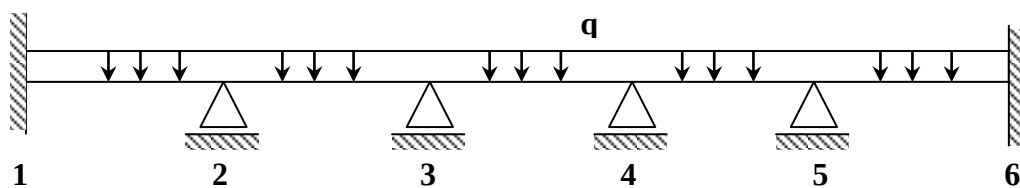


Figure 4.1. : Poutre hyperstatique

Dans la Figure 4.1, la méthode des trois moments nous donne 6 équations à 6 inconnues ; alors que la méthode des déplacements nous donne seulement 4 inconnues (car les rotations aux nœuds 1 et 6 sont nuls)

Exemple 2 :

Dans cet exemple (figure 4.2) nous avons 3 inconnues par liaison encastrée ; ce qui fait en tout 9 inconnues.

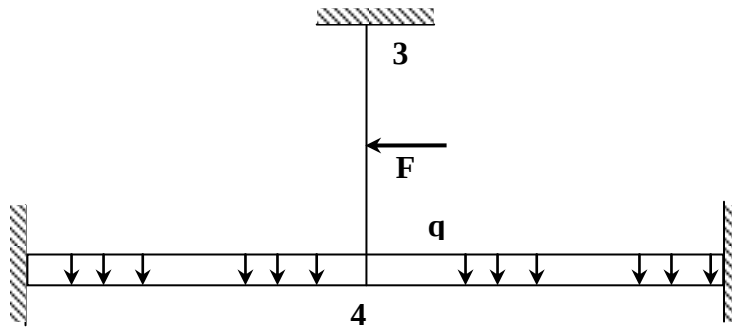


Figure 4.2. : Système hyperstatique

La statique nous donne trois équations (une équation de moment et 2 équations de projection de toutes les forces appliquées).

Le degré d'hyperstaticité est $(9 - 3 = 6$ fois hyperstatique).

Puisque ce système est une structure non déplaçable ($N_t = 2n - (b + l) = 2 \cdot 4 - (3 + 6) = -1$ alors nous avons seulement une seule inconnue puisque nous avons un seul nœud intermédiaire (le nœud 4). Donc l'inconnue Z_1 c'est la rotation au nœud 4.

4.4. Principe de la méthode des déplacements

La méthode des déplacements est utilisée pour le calcul des structures constituées de barres droites encastrées dans les nœuds.

Globalement, le principe de la méthode est décrit par les trois étapes suivantes :

- a. On détermine le système de base en bloquant (encastres spéciaux) tous les nœuds intermédiaires de la structure réelle dans le cas d'une structure non déplaçable.
Si le système est déplaçable, on bloque aussi les nœuds intermédiaires (encastres spéciaux) et on bloque aussi les translations à l'aide de butée (Figure 4.3b).
Chaque élément de la structure travaille seul comme le modèle bi-encastré ou encastré-articulé.

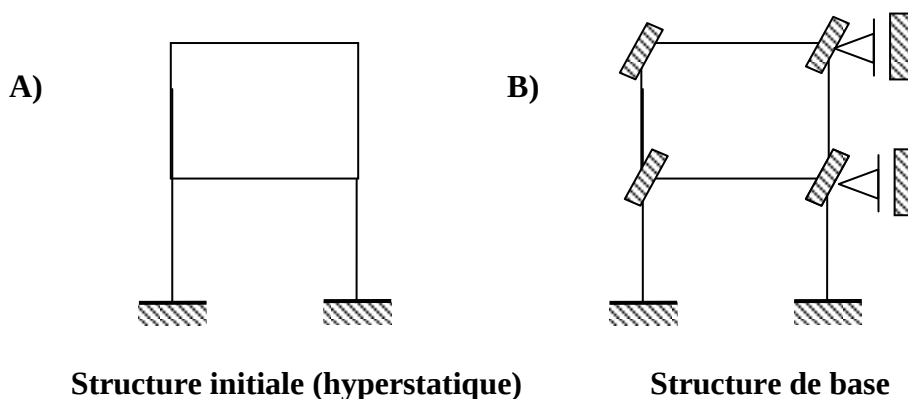


Figure 4.3. : Portique hyperstatique

- b. Afin d'obtenir un système équivalent à la structure initiale, on applique des déplacements (inconnus) correspondant aux liaisons ajoutées (Figure 4.3C).

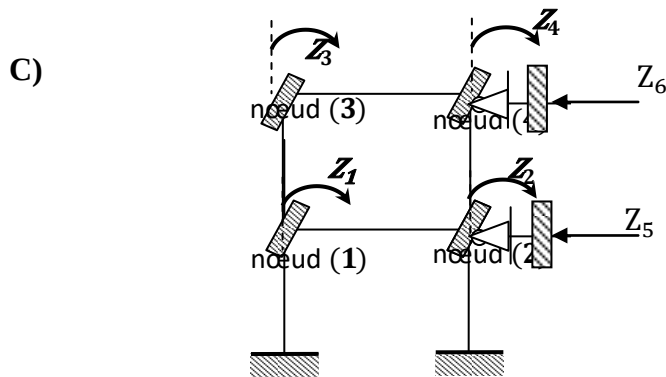


Figure 4.3. : Portique hyperstatique

Les inconnues du problème dans le cas considéré (Figure 4.3C) sont :

Z_1 : Rotation du nœud 1.

Z_2 : Rotation du nœud 2.

Z_3 : Rotation du nœud 3.

Z_4 : Rotation du nœud 4.

Z_5 : Translation horizontale des nœuds 1 et 2, la variation de longueur de la barre 1-2 étant négligée.

Z_6 : Translation horizontale des nœuds 3 et 4, la variation de longueur de la barre 3-4 étant négligée.

- c. Pour obtenir les déplacements inconnus (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 et Z_6) on écrit qu'il y a équilibre des réactions (moments ou forces) apparaissant dans chaque liaison ajoutée sous l'effet des forces extérieures et des déplacements imposés. Soit :

$$Z_1 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (1) } = 0.$$

$$Z_2 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (2) } = 0$$

$$Z_3 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (3) } = 0.$$

$$Z_4 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (4) } = 0.$$

$$Z_5 = \Sigma \text{ des réactions horizontales dans la liaison (2) } = 0.$$

$$Z_6 = \Sigma \text{ des réactions horizontales dans la liaison (4) } = 0.$$

Exemple : barre 1-2 et barre 1-3 :

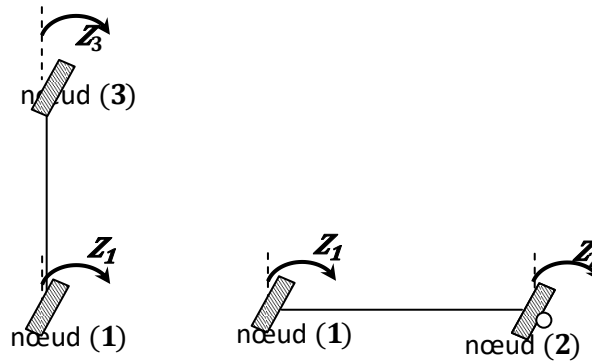


Figure 4.4. : Portique de la figure 4.3. (Exemple : barre 1-2 et 1-3)

Pour terminer, on retient que la méthode des déplacements est caractérisée par :

- Le blocage des rotations des nœuds intermédiaires et des translations du portique.
- Donc un seul système de base possible, donc une façon unique de mettre le problème en équations (de ce fait, la méthode est particulièrement indiquée pour le calcul automatique).

4.5. Classification des structures :

On distingue deux types de structures :

A- Portiques ou structures à nœuds fixes (dit structure non déplaçable):

Ce sont des structures dont les nœuds ne peuvent subir que des rotations (Figure 4.5). Une structure à nœuds fixes possède autant de nœuds intermédiaires que de rotations inconnues Z .



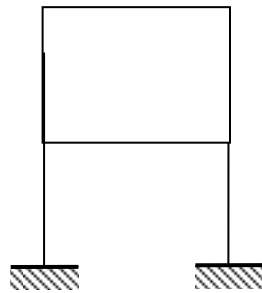
$$N_t = 2n - (b + l) = 2.3 - (2 + 4) = 0$$

$\Rightarrow$ le nombre de translation est nul

Figure 4.5. : Système hyperstatique non déplaçable

B- Portiques à nœuds déplaçables (structures déplaçables)

Ce sont des structures dont les nœuds intermédiaires peuvent subir en même temps des rotations et des translations (Figure 4.6).



$$N_t = 2n - (b + l) = 2.6 - (6 + 4) = 2$$

⇒ deux translations

Figure 4.6. : Système hyperstatique déplaçable

4.6. Principe du nœud fixe

Considérons le schéma de la Figure 4.7 dans lequel deux barres AB et AC relient un nœud A à deux nœuds B et C qui sont fixes en translation dans le plan XY.

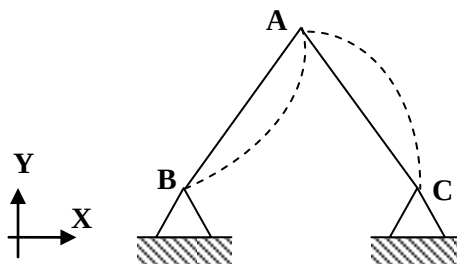


Figure 4.7. : Principe du nœud fixe en translation

En toute généralité, le point A ne sera mobile que si les longueurs AB et AC varient. Une telle variation de longueur ne peut résulter que de l'un et/ou l'autre des effets suivants :

- Raccourcissement de la corde due la courbure prise sous l'effet de la distribution du moment de flexion;
- Variation de la longueur de la corde due à la courbure additionnelle prise sous l'effet de la déformation d'effort tranchant;
- Variation de la longueur de la corde induite par la déformation d'effort normal.

Conformément à l'hypothèse simplificatrice de la méthode des Rotations, les déformabilités à la base des effets (b) et (c) sont négligées ; ceux-ci ne sont donc pas à considérer; en conséquence, seul l'effet (a) reste à examiner. Dans le domaine élastique, il est aisé de démontrer, que le raccourcissement de la corde d'une barre, engendrée par la prise de courbure de flexion, est d'un ordre inférieur à la variation de longueur produite par l'effort normal.

Le principe du nœud fixe en translation s'énonce comme suit :

Si, dans un plan XY, un nœud A est relié par deux barres AB et AC à deux nœuds B et C, tous deux fixes en translation dans ce plan, le point A peut à son tour être considéré comme fixe en translation.

4.7. Principe du nœud mobile

Lorsque la structure plane est constituée d'un réseau de poutres orthogonal à un réseau de poteaux, il est assez logique de localiser la structure dans un plan XY tel que l'axe des X soit parallèle aux poutres (barres horizontales) et l'axe des Y parallèle aux poteaux (barres verticales). L'hypothèse simplificatrice à la base de la Méthode des rotations, notamment, la déformabilité aux efforts normaux est négligeable, revient à supposer l'incompressibilité (éventuellement l'inextensibilité) des barres.

Les degrés de liberté de la structure à considérer dès lors sont :

- Le degré de liberté en rotation des nœuds.
- Le degré de liberté en translation horizontale de toute la file des éléments horizontaux.
- Le degré de liberté en translation verticale de toute la file des éléments verticaux

Ainsi, il suffit désormais d'un blocage simple en translation selon l'axe d'une file des éléments pour que tous les nœuds de cette file ne translatent pas. En conséquence, la structure cinématiquement déterminée (Figure 4.8a) est obtenue en disposant d'un blocage simple associé à chacun des degrés de liberté précités. Les blocages simples ainsi requis, en nombre N (N_t et N_r), constituent les inconnues cinématiques. Celles-ci sont donc de deux natures :

- Les angles de rotation aux nœuds intermédiaires ;
- Les déplacements horizontaux ou verticaux du système.

Pour l'exemple de la Figure suivante, on a :

$$N_t = 2n - (b + l) = 2.8 - (10 + 3) = 3$$

$$N_r = 6$$

- 6 blocages de rotations de nœuds intermédiaires (Figure 4.8b),
 - 2 blocages de déplacements horizontaux (Figure 4.8c),
 - 1 blocage de déplacements verticaux (Figure 4.8d).
- soit au total $M = 9$.

La structure cinématiquement (Figure 4.8a) déterminée de référence est la structure d'origine munie de ces 11 blocages simples (Figure 4.8).

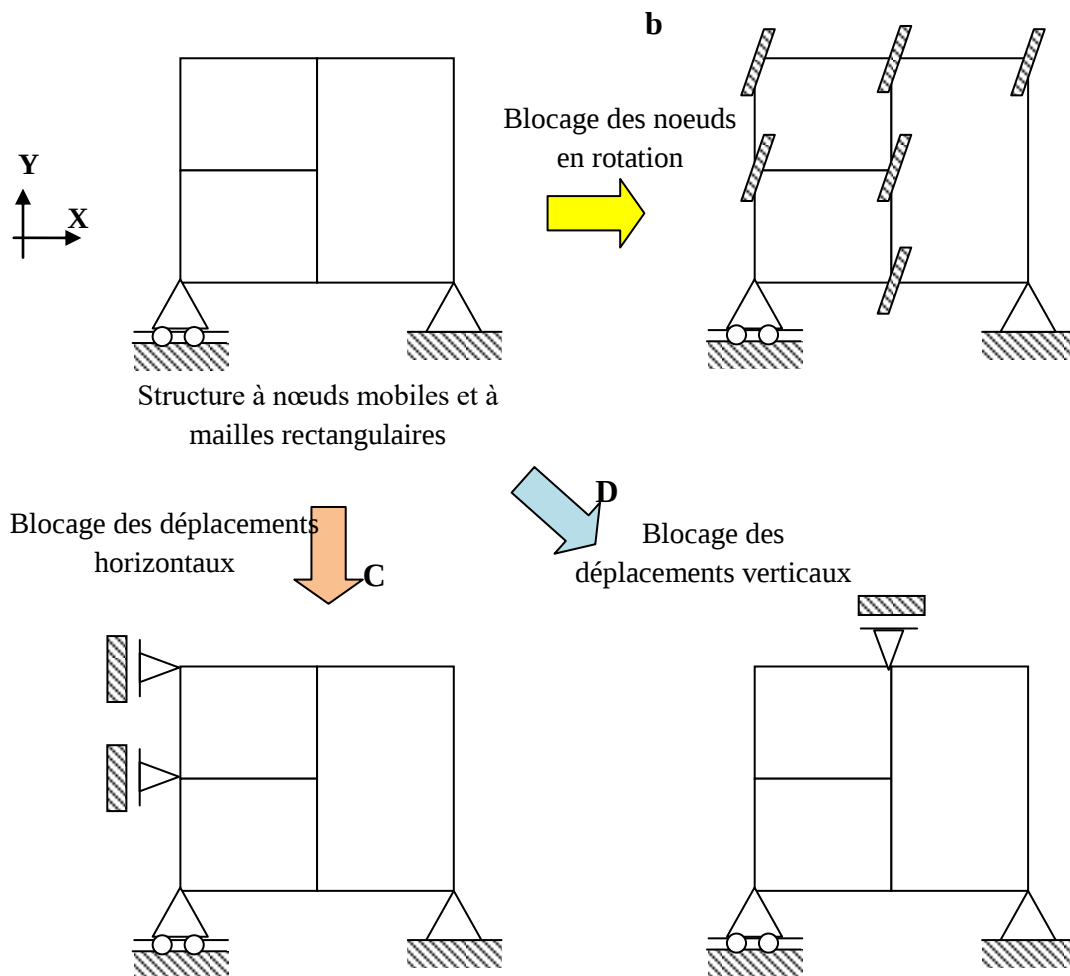


Figure 4.8. : Principe du nœud mobile

4.8. Sollicitations des barres :

Les barres sont sollicitées soient par :

- Les charges extérieures (réparties, ponctuelles, ...) (connues)
 - Les rotations des nœuds intermédiaires
 - Les translations
- } **Ce sont les inconnues**

4.9. Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des déplacements et des charges

Les calculs des moments et les réactions peuvent être menés par les méthodes exposées dans les chapitres précédents (**chapitre 2** : Méthode des trois moments et **chapitre 3** : Méthode des forces).

Les diagrammes des moments et les réactions des charges extérieures les plus courantes sont regroupés dans les deux tableaux suivants.

a- Les barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)

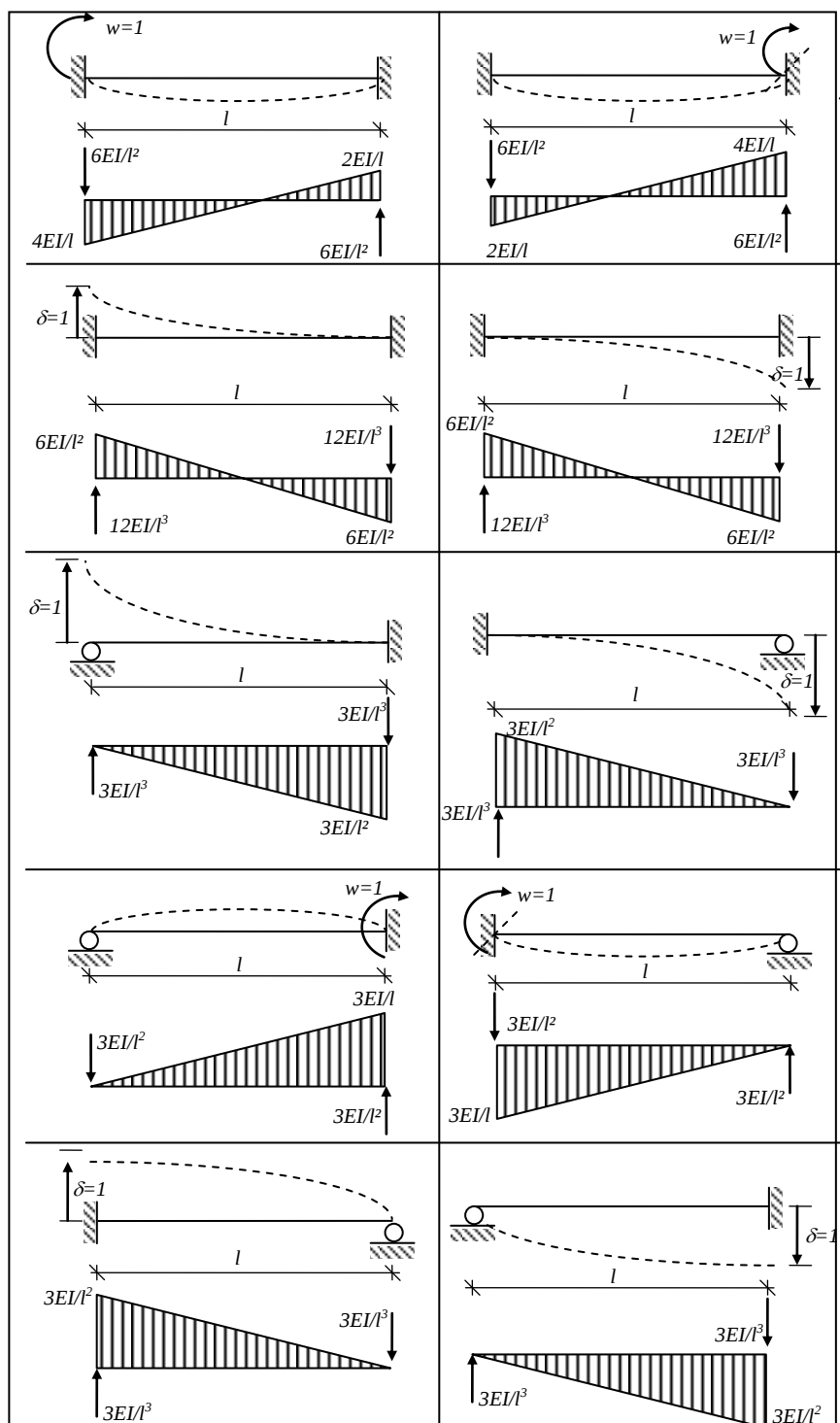


Figure 4.9. : Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)

b- Les barres soumises à des charges extérieures (réparties, ponctuelles, ...)

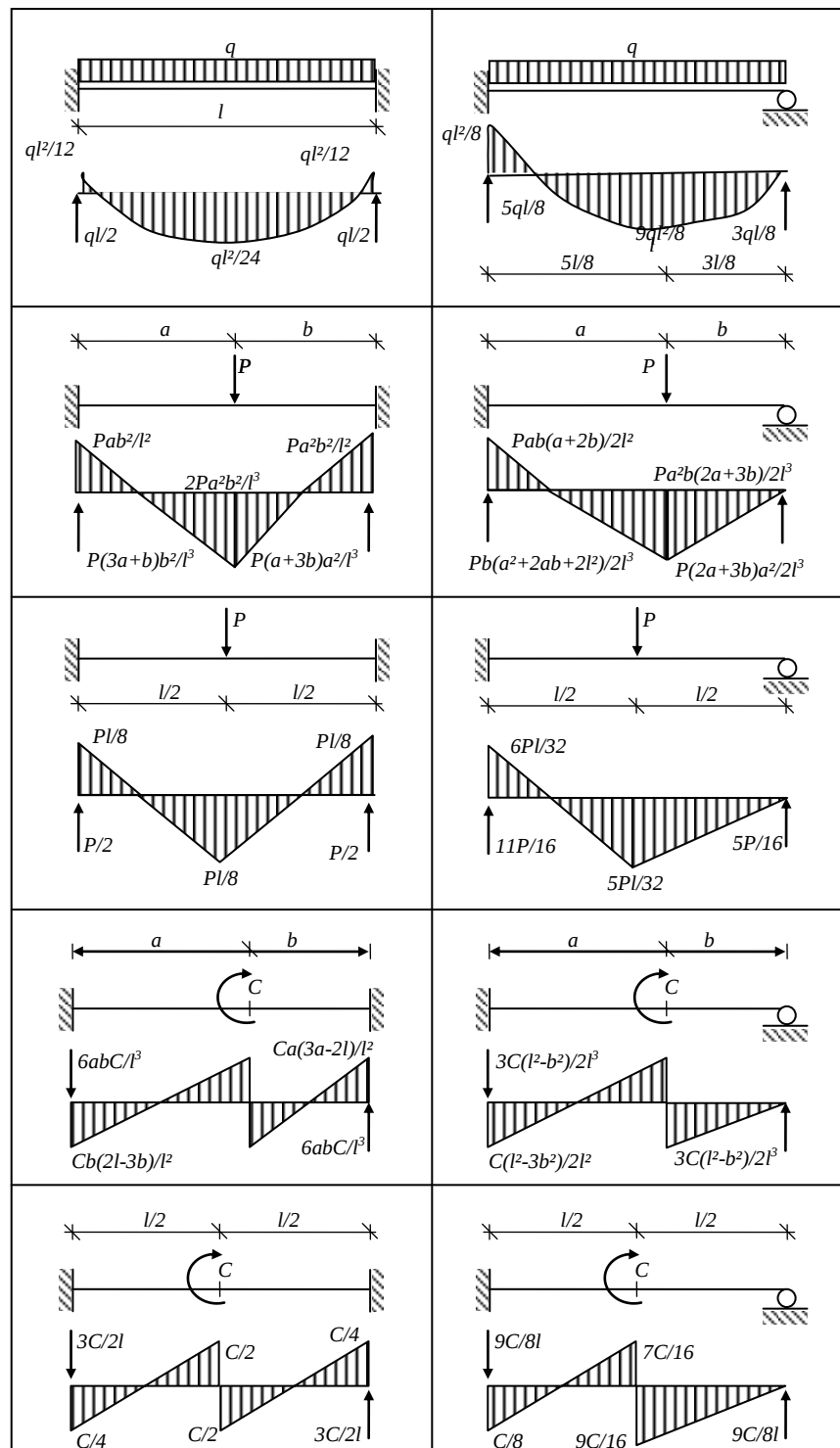


Figure 4.10. : Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des charges extérieures

4.10. Equations d'équilibre

Chaque équation exprime l'équilibre des réactions apparaissant dans une liaison ajoutée. Dans chaque liaison (i) introduite, la résultante des réactions, engendrées par les forces extérieures (r_{i0}) et par les déplacements appliqués (r_{ij}), doit être nulle.

- r_{i0} : réaction qui apparaît dans la liaison ajoutée i sous l'action de la sollicitation globale F (c'est-à-dire les charges appliquées).
- r_{ij} : réaction dans la liaison i , dont la nature est déterminée par celle de la liaison, sous l'action du déplacement $Z_j = 1$ (coefficient de rigidité).

En vertu du principe de superposition des effets nous pouvons écrire :

- où :

Ainsi, pour une structure à n inconnues (n déplacements inconnus des nœuds), le système d'équations s'écrit :

Ou encore sous forme condensée :

Sous forme matricielle le système d'équations canoniques s'écrit :

$[r_{ij}]$ est appelée matrice de rigidité.

4.11. Les étapes de calcul par la méthode des déplacements :

L'application de la méthode des déplacements peut se résumer aux étapes élémentaires suivantes :

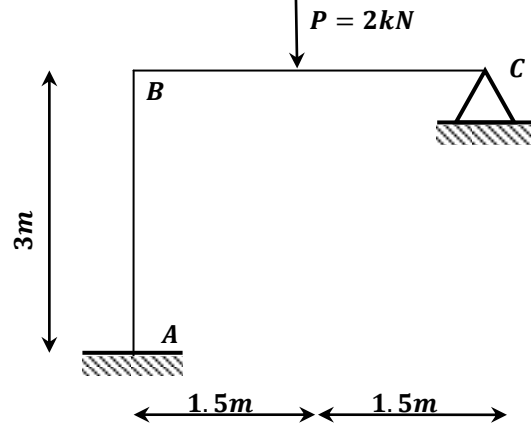
- Déterminer le nombre d'inconnues (N_t et N_r).
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants M_0 du système isostatique due aux charges extérieures ($Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0$)
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires m_i ($i = 1, \dots, n$) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec $Z_i=1$ et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients de réaction (r_{ij}, R_{i0}) à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques pour obtenir les déplacements des nœuds.
- Correction des épures unitaires $m_i^* = m_i X_i$ ($i = 1, \dots, n$).
 $m_1^* = m_1 Z_1$; $m_2^* = m_2 Z_2$; ; $m_n^* = m_n Z_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants
 $M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$

4.12. Exercices

4.12.1. Exercice 4.1. :

Calcul des structures à nœuds fixes (ou à nœuds invariables (non déplaçables))

On considère le portique suivant, construire le diagramme du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort normal. EI est constante.



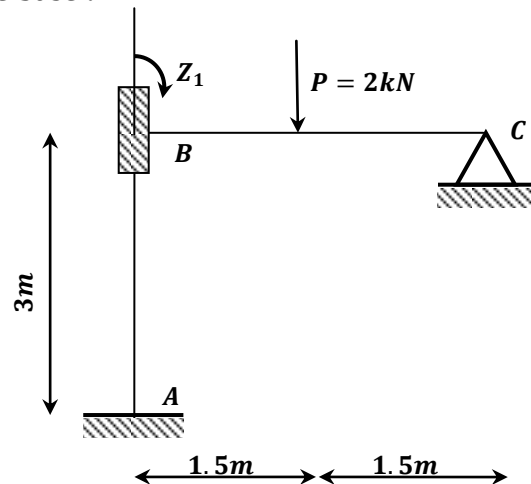
- Le nombre d'inconnus hyperstatique :

Le nombre de translation $n_t = 2n - (b + l) = 2 * 3 - (2 + 4) = 0$

⇒ Pas de translation (structure à nœuds fixes (non déplaçable)).

Le nombre de rotation $n_r = 1$ on bloque le nœud intermédiaire (le nœud B)

- Système de base :

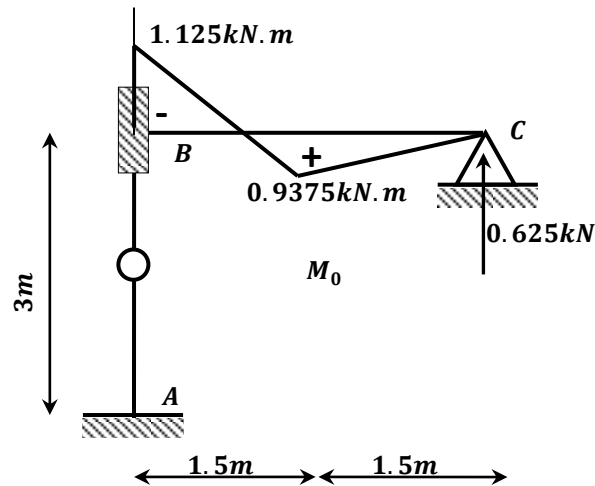


- Système d'équations canonique :

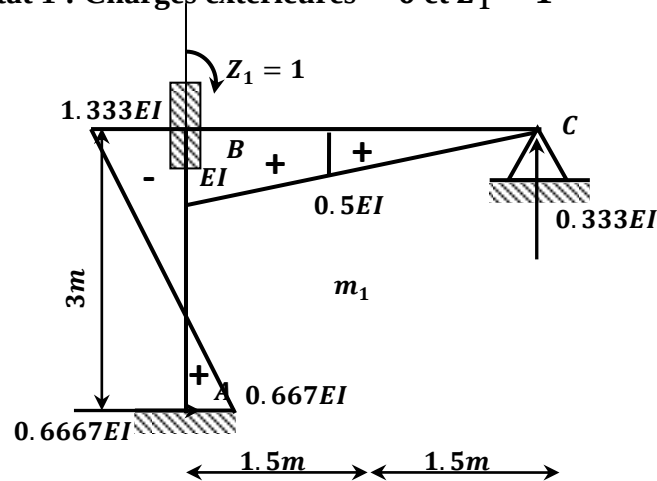
$$r_{11}Z_1 + R_{10} = 0$$

- On Trace le diagramme unitaire (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $Z_1 = 0$



- Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $Z_1 = 1$

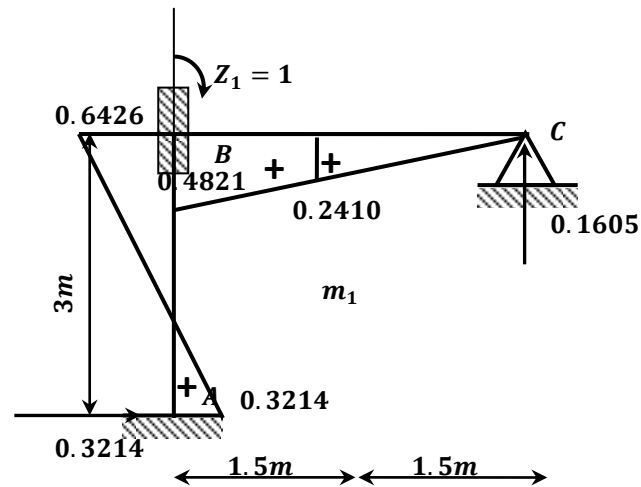


- Calculer les déplacements r_{ij} .

r_{11}	R_{10}
Le coefficient r_{11} est calculé de façon à réaliser l'équilibre au nœud B du diagramme m_1. On indique r_{11} dans le sens de la rotation Z_1 appliquée à l'encastrement élastique ajouté (voir figure m_1) $r_{11} = EI + 1.333EI = 2.333EI$	Le coefficient R_{10} est calculé de façon à réaliser l'équilibre au nœud B du diagramme M_0. $R_{10} = -1.125$
$r_{11}Z_1 + R_{10} = 0 \Rightarrow 2.333EI Z_1 - 1.125 = 0 \Rightarrow Z_1 = \frac{0.4821}{EI}$	

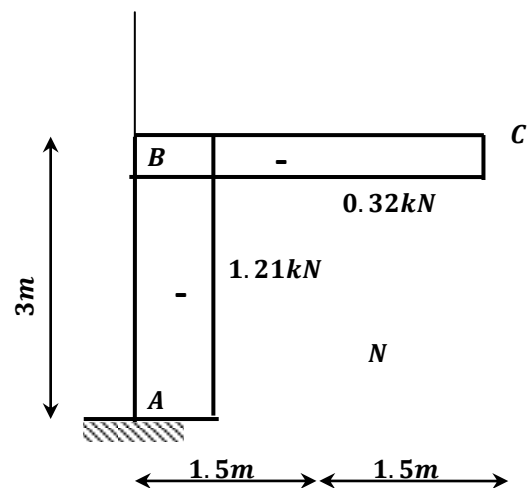
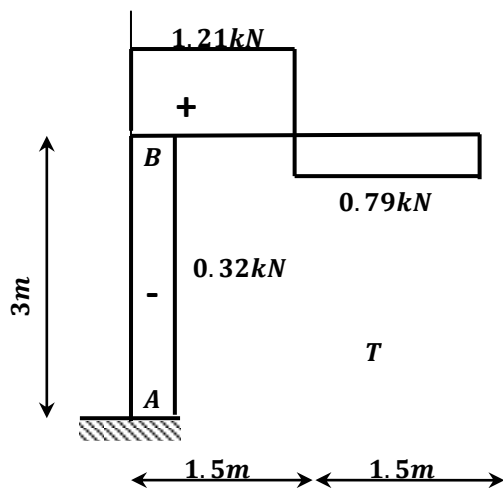
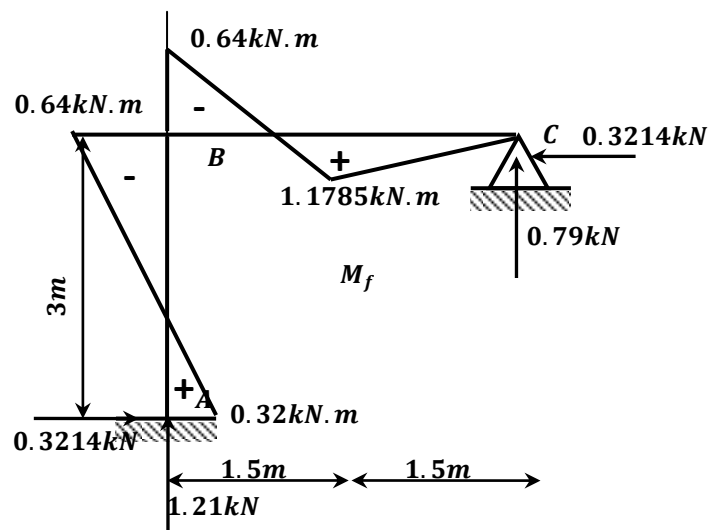
- Correction du diagramme unitaire

- Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 Z_1$



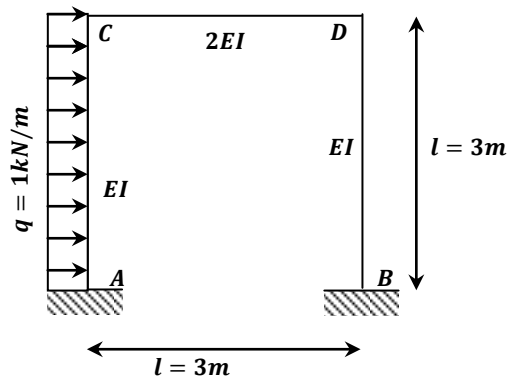
- Les diagrammes finaux :

$$M_f = M_0 + m_1^*$$



4.12.2. Exercice 4.2. :

Le portique est constitué de barres identiques ($l=3m$). Tracer le diagramme des moments fléchissants M_f .



- **Le nombre d'inconnus hyperstatique :**

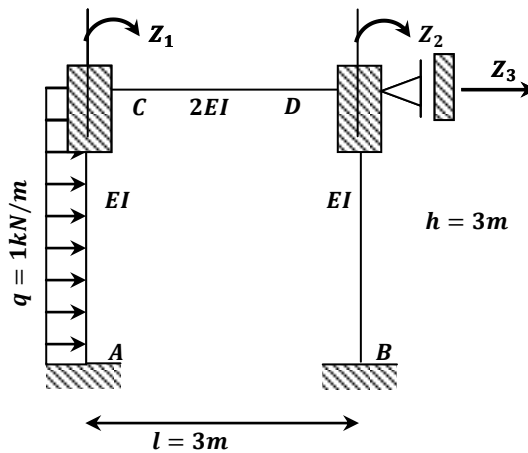
Le nombre de translation $n_t = 2n - (b + l) = 2 * 4 - (3 + 2) = 1$

⇒ Portique à nœuds déplaçables (une translation)

Le nombre de rotation $n_r = 2$ on bloque deux nœud intermédiaire (le nœud C et D)

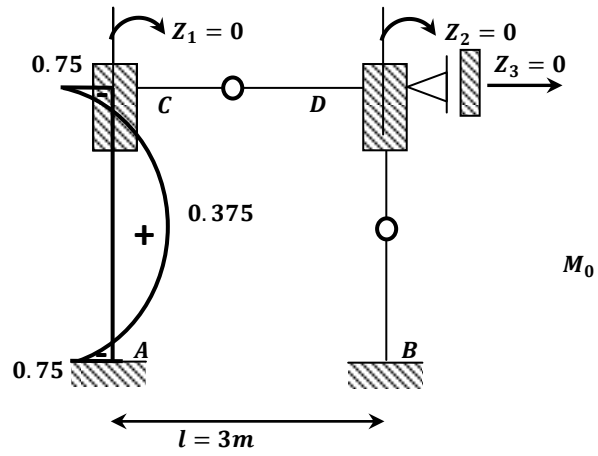
- $n = n_t + n_r = 1 + 2 = 3$ (une translation (déplacement linéaire) Z_3 et deux rotations (déplacements angulaires) (Z_1 et Z_2))

- **Système de base :**



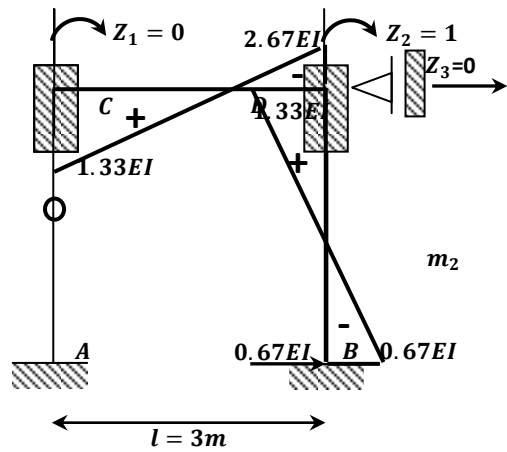
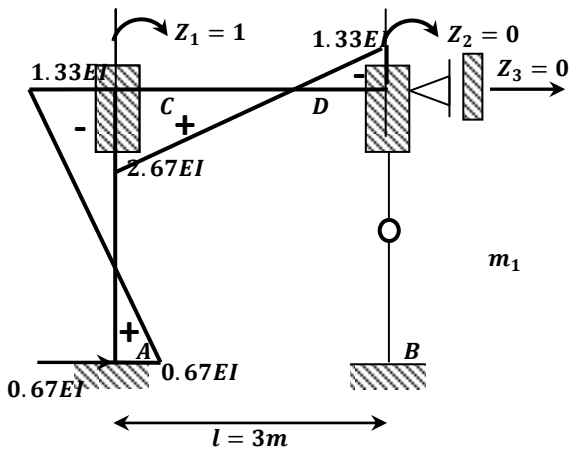
- **Diagrammes des moments fléchissants :**

- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$**

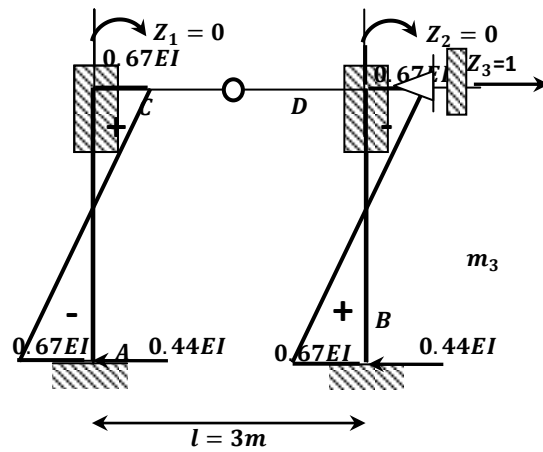


Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $Z_1 = 1$ et $Z_2 = Z_3 = 0$

Etat 2 : Charges extérieures = 0 et $Z_2 = 1$ et $Z_1 = Z_3 = 0$



- **Etat 3 : Charges extérieures = 0 et $Z_1 = Z_2 = 0$ et $Z_3 = 1$**



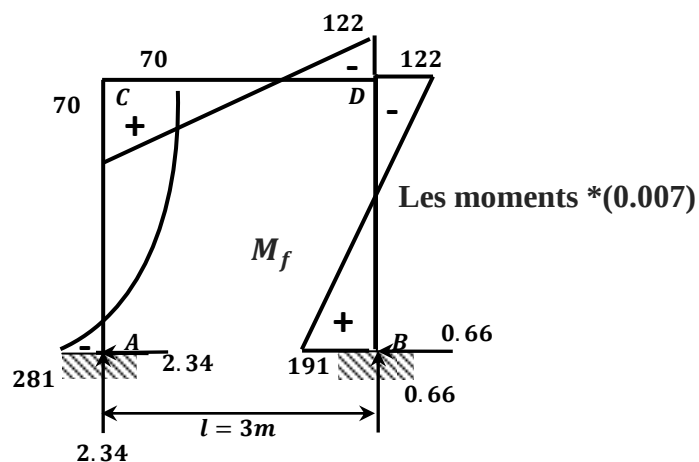
-calcul des coefficients r_{ij}

$r_{11} = 4EI$ 	$r_{12} = 1.33EI$ 	$r_{31} = -0.67EI$ 	$R_{10} = 0.75$
$r_{21} = 1.33EI$ 	$r_{22} = 4EI$ 	$r_{32} = -0.67EI$ 	$R_{20} = 0$
$r_{13} = -0.67EI$ 	$r_{23} = -0.67EI$ 	$r_{33} = 0.89EI$ 	$R_{30} = -1.5$

- Système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{10} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{20} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{30} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 0.032 \\ Z_2 = 0.314 \\ Z_3 = 1.95 \end{cases}$$

- Diagramme final : $M_f = M_0 + m_1Z_1 + m_2Z_2 + m_3Z_3$



CHAPITRE 5

Treillis hyperstatiques

5.1. Définition d'un treillis :

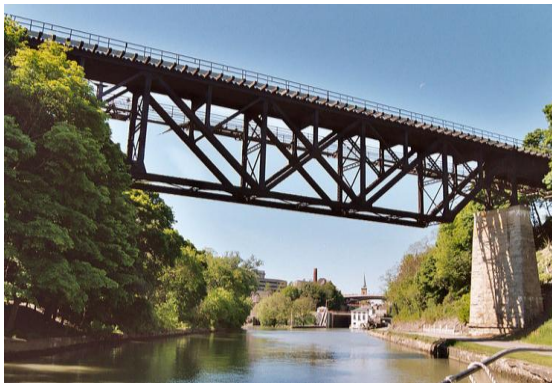
Un treillis, ou système triangulé, est un assemblage d'éléments en forme de barres verticales, horizontales ou inclinées formant des triangles, de sorte que chaque barre subisse un effort acceptable, et que la déformation de l'ensemble soit modérée.

Cette structure est devenue courante en construction métallique à partir de la révolution industrielle, pour des ponts, avions... En effet, un tel assemblage allie résistance, rigidité et légèreté, et permet d'utiliser des éléments normalisés (barres) ; par ailleurs, le treillis peut éventuellement être pré-assemblé.

Lorsqu'un treillis est soumis à un effort, certaines parties de l'assemblage sont mises en compression et d'autres parties en traction.

Les axes des barres concourent en nœuds ; ce sont les points d'assemblage des barres. D'un point de vue mécanique, les nœuds sont modélisés par des articulations parfaites. Initialement, pour simplifier les calculs, les charges n'étaient appliquées qu'aux seuls nœuds.

5.2. Exemples de structures en treillis :



Pont à tablier supérieur, sur le Canal Erié



Pont à quatre travées à treillis traversé du pont du Général Hertzog sur le fleuve Orange à Aliwal North.



Pont à treillis de type Warren de la ligne ferroviaire « Seaboard Air Line Railway », situé près du village de Willow, Floride.



Pont Bailey sur la Meurthe, France. Pont provisoire en treillis, permettant une mise en place très rapide

Figure 5.1. : Exemples de structures en treillis

5.3. Différentes catégories de treillis :

Il existe trois grandes catégories de treillis plans : le treillis simple, le treillis composé et le treillis formé de barres qui se chevauchent.

- Le treillis simple est formé uniquement de mailles triangulaires :
Si le nombre de réactions d'appui ne dépasse pas trois, ce type de treillis est le plus souvent isostatique. Il existe toutefois des exceptions comme le montre la figure 5.2 : il s'agit d'un treillis simple qui se referme sur lui-même et dont le degré d'hyperstaticité interne est égal à 3.

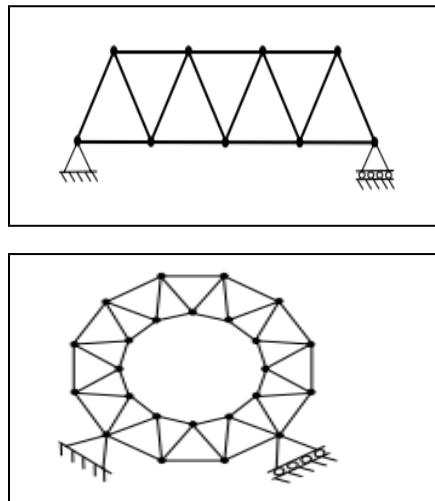


Figure 5.2. : Les Treillis simples

- Le treillis composé résulte de l'assemblage de treillis simples.

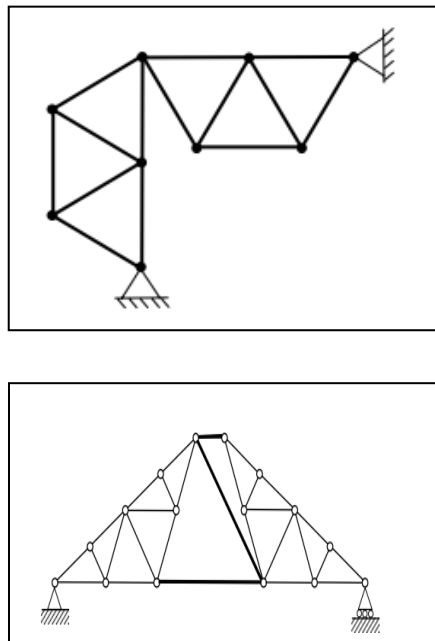


Figure 5.3. : Les treillis composés

- Le treillis formé de barres qui se chevauchent sans être reliées physiquement.

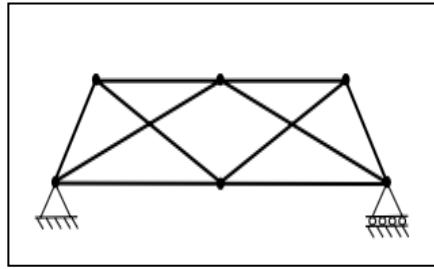


Figure 5.4. : Le treillis formé de barres qui se chevauchent

5.4. Hypothèses de calcul d'un treillis :

Le calcul des treillis ou structures est une application de la mécanique statique. Pour pouvoir calculer la structure comme un treillis, certaines hypothèses sont posées :

- les articulations entre barres sont considérées comme parfaites ;
- les charges sont appliquées au nœud ;
- les axes des barres doivent concourir aux nœuds

5.5. Différents systèmes de Treillis :

Un treillis peut être isostatique ou hyperstatique.

5.5.1. Treillis isostatiques

Un treillis isostatique est à la fois extérieurement et intérieurement isostatique. Il est extérieurement isostatique si ses liaisons sont telles que l'ensemble des réactions d'appui sont déterminables à partir des seules équations d'équilibre global de la structure. Un treillis est dit intérieurement isostatique si, les réactions étant supposées connues, les efforts dans toutes les barres du treillis sont déterminables par les méthodes élémentaires de la statique (méthode des nœuds et des sections).

5.5.2. Treillis hyperstatiques

L'hyperstaticité d'un treillis plan peut être sous trois formes **(a)** une hyperstaticité extérieure, **(b)** une hyperstaticité intérieure ou **(c)** une hyperstaticité à la fois extérieure et intérieure.

5.5.2.1. Efforts intérieurs :

La détermination des efforts intérieurs dans un treillis hyperstatique est illustrée ci-après pour les différentes formes d'hyperstaticité.

A- Treillis hyperstatique extérieure

Soit le treillis plan de la Figure 5.5. Il y a deux réactions en chacun des deux appuis alors qu'on ne dispose que de 3 équations d'équilibre global ($d=4-3=1$). Ce degré d'hyperstaticité est de forme extérieure.

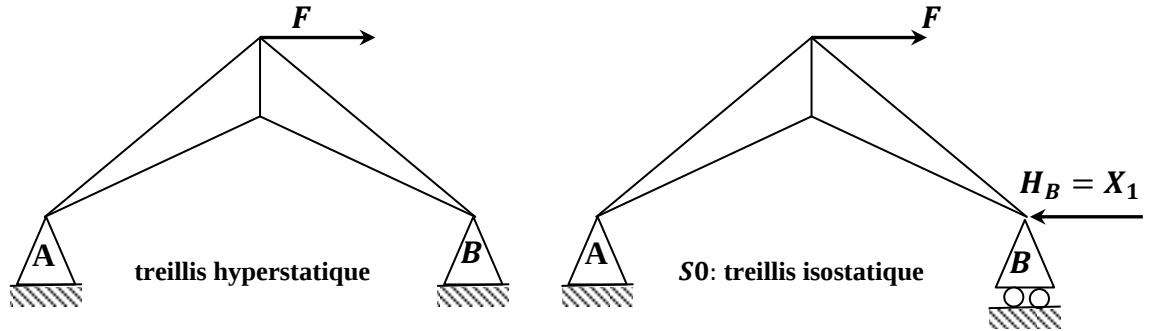


Figure 5.5. : Treillis plan extérieurement une fois hyperstatique

On choisit la poussée H_B (réaction horizontale au point B) à l'appui de droite comme inconnue hyperstatique $H_B = X_1$; on obtient un système de base à partir duquel on posant $X_1 = 0$, on obtient le système isostatique avec les charges réelles appelé état 0.

Puis on crée toujours à partir du système de base un autre système virtuel on éliminant les charges extérieures et on prenant uniquement l'inconnue $X_1 = 1$ appelé état 1.

L'équation canonique est réduite à :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (5.1)$$

où :

δ_{11} : représente le déplacement horizontale à l'appui B du à la force $X_1 = 1$ (état 1)

δ_{10} : Représente le déplacement horizontale à l'appui B dues aux forces extérieures réelles (état 0)

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{n_{i,1}^2}{E_i A_i} L_i \quad (5.2)$$

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^n \frac{n_{i,1} N_{i,0}}{E_i A_i} L_i \quad (5.3)$$

où :

- $n_{i,1}$ représente l'effort normal dans chaque barre du système dit état 1.

- $N_{i,0}$ représente l'effort normal dans chaque barre du système isostatique sous l'effet des forces extérieures dit état 0.

A partir de là, on peut déduire la valeur de l'inconnue hyperstatique H_B :

$$X_1 = H_B = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (5.4)$$

Lorsque la valeur de H_B est connue, les efforts dans les barres du treillis hyperstatique réel seront calculé à l'aide du principe de superposition, c'est-à-dire :

$$N_i = N_{i,0} + H_B n_{i,1} \quad (5.5)$$

B- Treillis hyperstatique intérieure

Soit le treillis plan de la Figure 5.6 où on change l'appui B (doubles réactions) par un appui simple avec une seule réaction et on ajoute une autre barre entre A et B. On recalcule le degré d'hyperstaticité et il est toujours égal à 1 mais de forme intérieure.

On peut dire qu'il est isostatique extérieurement (3 réactions extérieures – 3 équations d'équilibre = 0).

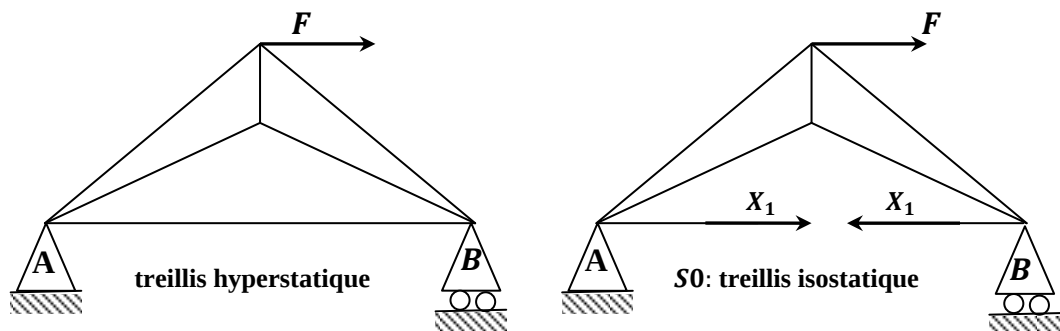


Figure 5.6. : Treillis hyperstatique intérieure

On choisit l'effort normal du tirant AB comme inconnue hyperstatique égale à X_1 ; on obtient un système de base à partir duquel en posant $X_1 = 0$, on aura le système isostatique avec les charges extérieures réelles appelé état 0.

Puis on crée toujours à partir du système de base un autre système virtuel en éliminant les charges extérieures et on prenant uniquement l'inconnue $X_1 = 1$ appelé état 1.

L'équation canonique et les expressions des coefficients de flexibilité δ_{11} et δ_{10} sont identiques à celles écrites en (5.2) et (5.3).

Et on en déduira l'inconnue X_1 qui est l'effort normal dans la barre AB :

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (5.6)$$

Lorsque la valeur de X_1 est connue, les efforts dans le treillis hyperstatique concerné s'obtiennent par le principe de superposition selon :

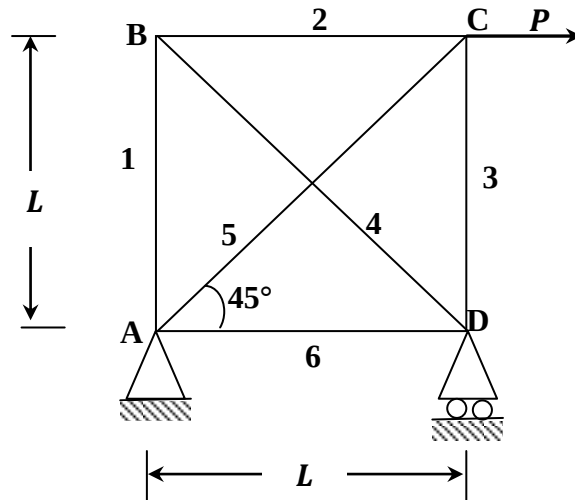
$$N_i = N_{i,0} + X_1 n_{i,1} \quad (5.7)$$

5.6. Exercices :

5.6.1. Exercice N°5.1 :

Pour le treillis hyperstatique suivant, on demande :

- de déterminer le degré d'hyperstaticité;
- de déterminer les efforts dans toutes les barres.



- Le degré d'hyperstaticité :

$$d = b + l - 2n = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1 \text{ fois hyperstatique intérieurement}$$

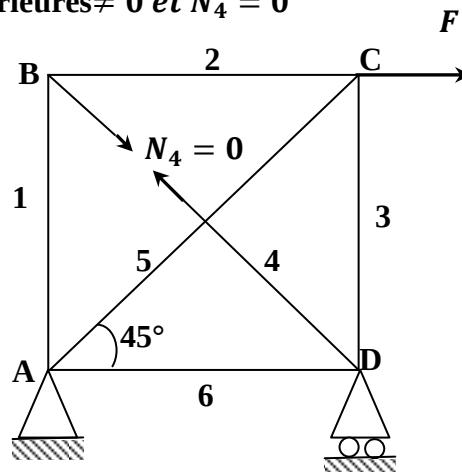
- Le système de base :

Le degré d'hyperstaticité valant 1, on choisit l'effort normal inconnu de la barre 4 (N_4).

Résolution des systèmes isostatiques : Calcul des efforts normaux

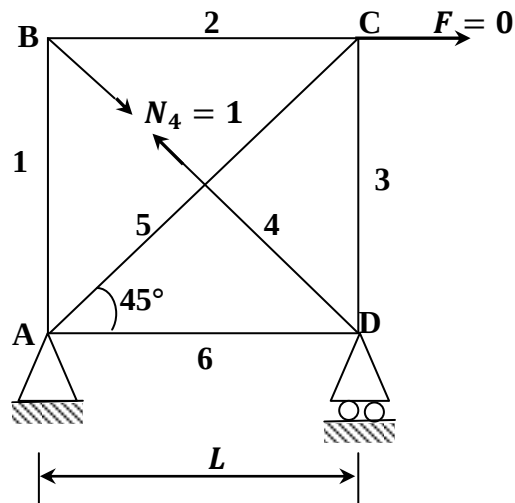
Le calcul des efforts internes des barres se fait par l'une des méthodes ; soit la méthode des sections ou la méthode des nœuds. Les tableaux ci-dessous reprennent les valeurs de ces efforts normaux pour les deux états (Etat 0 et Etat 1).

- Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $N_4 = 0$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$
1	L	0
2	L	0
3	L	$-F$
4	$1.41L$	$-F$
5	$1.41L$	$1.41F$
6	L	0

- Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $N_4 = 1$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_1^0
1	L	-0.71
2	L	-0.71
3	L	-0.71
4	$1.41L$	1
5	$1.41L$	1
6	L	-0.71

- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{4.82L}{EA} \quad \text{et} \quad \delta_{10} = \frac{2.71FL}{EA}$$

- On écrit le système d'équation canonique :

$$\frac{4.82L}{EA} N_4 + \frac{2.71FL}{EA} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_4 = -0.56F$$

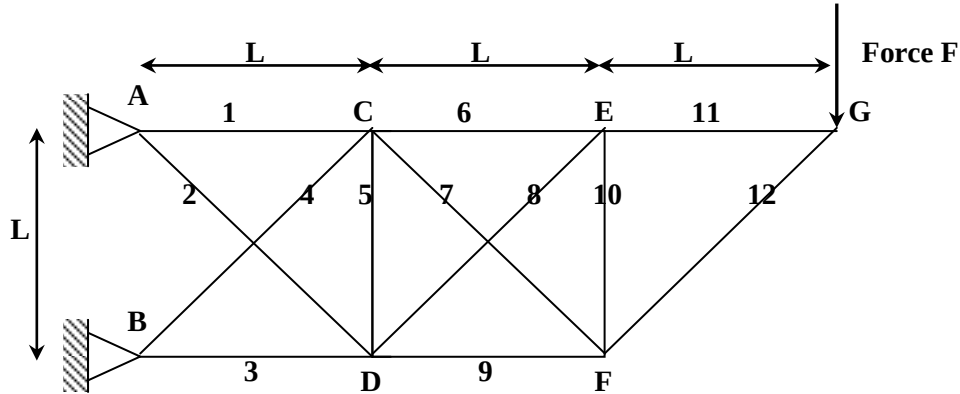
- Les efforts normaux dans les barres des systèmes réels (treillis hyperstatique)

N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_1^0	$N_{\Sigma F}^0 + N_4 n_1^0$
1	L	0	-0.71	$0.398F$
2	L	0	-0.71	$0.398F$
3	L	$-F$	-0.71	$-0.602F$
4	$1.41L$	0	1	$-0.56F$
5	$1.41L$	$1.41F$	1	$0.85F$
6	L	0	-0.71	$0.398F$

5.6.2. Exercice N° 5.2 :

Pour le treillis hyperstatique suivant, on demande :

- de déterminer le degré d'hyperstaticité;
- de déterminer les efforts dans toutes les barres.



Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres

- **Le degré d'hyperstaticité :**

$$d = b + l - 2n$$

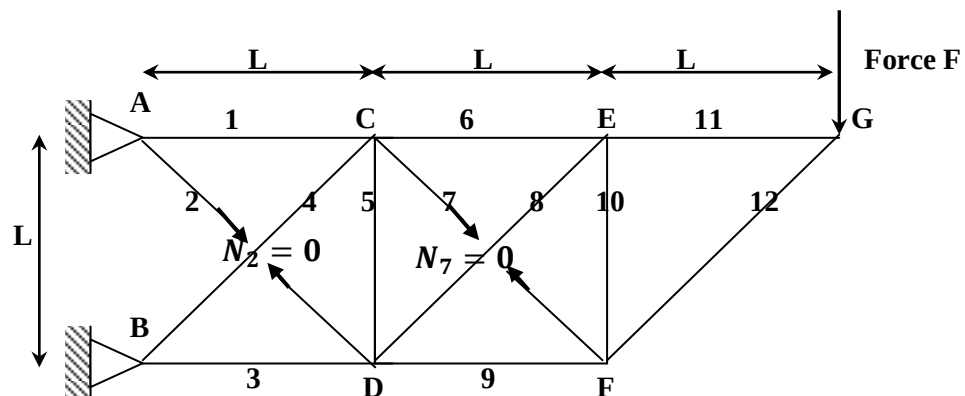
- le nombre de barres $b = 12$
 - le nombre de nœuds $n = 7$
 - le nombre de liaisons $l = 4$
- $$\left. \begin{array}{l} \text{le nombre de barres } b = 12 \\ \text{le nombre de nœuds } n = 7 \\ \text{le nombre de liaisons } l = 4 \end{array} \right\} d = b + l - 2n = 12 + 4 - 2 \cdot 7 = 2$$

- **Système de base :**

On choisit les efforts normaux des barres 2 et 7 (N_2 et N_7) comme inconnus.

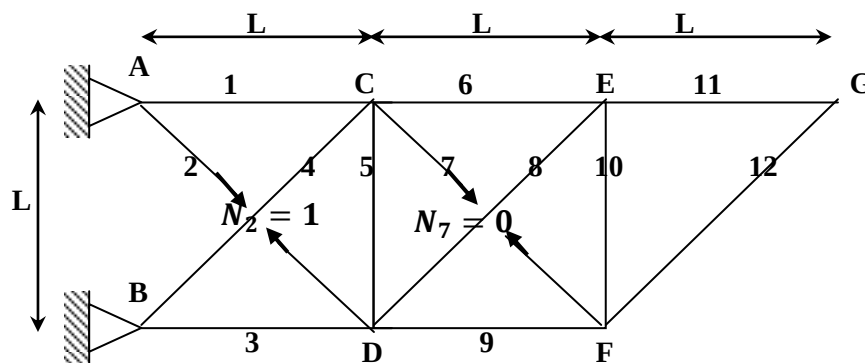
- **Calcul des efforts normaux pour les états 0, 1 et 2 :**

Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$, $N_2 = 0$ et $N_7 = 0$



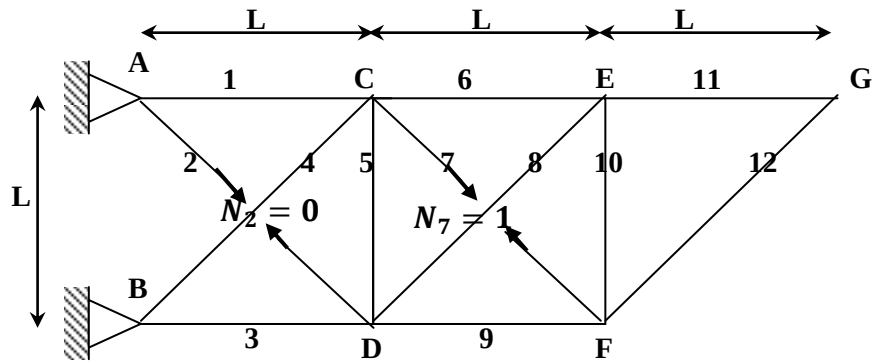
N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$
1	L	$3F$
2	$\sqrt{2}L$	0
3	L	$-2F$
4	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$
5	L	F
6	L	$2F$
7	$\sqrt{2}L$	0
8	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$
9	L	$-F$
10	L	F
11	L	F
12	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$

Etat 1 : Charges extérieures= 0, $N_2 = 1$ et $N_7 = 0$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_1^0
1	L	$-1/\sqrt{2}$
2	$\sqrt{2}L$	1
3	L	$-1/\sqrt{2}$
4	$\sqrt{2}L$	1
5	L	$-1/\sqrt{2}$
6	L	0
7	$\sqrt{2}L$	0
8	$\sqrt{2}L$	0
9	L	0
10	L	0
11	L	0
12	$\sqrt{2}L$	0

Etat 2 : Charges extérieures = 0, $N_2 = 0$ et $N_7 = 1$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_2^0
1	L	0
2	$\sqrt{2}L$	0
3	L	0
4	$\sqrt{2}L$	0
5	L	$-1/\sqrt{2}$
6	L	$-1/\sqrt{2}$
7	$\sqrt{2}l$	1
8	$\sqrt{2}l$	1
9	L	$-1/\sqrt{2}$
10	L	$-1/\sqrt{2}$
11	L	0
12	$\sqrt{2}L$	0

- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{(3/2 + 2\sqrt{2})L}{EA}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{L}{2EA}, \quad \delta_{22} = \frac{2(1 + \sqrt{2})L}{EA}$$

$$\delta_{10} = -\frac{(2 + \sqrt{2})FL}{EA} \quad \text{et} \quad \delta_{20} = -\frac{(2 + \sqrt{2} + 1/\sqrt{2})FL}{EA}$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \frac{(3/2 + 2\sqrt{2})L}{EA} N_2 + \frac{L}{2EA} N_7 - \frac{(2 + \sqrt{2})FL}{EA} = 0 \\ \frac{L}{2EA} N_2 + \frac{2(1 + \sqrt{2})L}{EA} N_7 - \frac{(2 + \sqrt{2} + 1/\sqrt{2})FL}{EA} = 0 \end{cases}$$

A partir du système, on trouve :

$$\begin{cases} N_2 = 0.699F \\ N_7 = 0.781F \end{cases}$$

- Valeurs des efforts normaux du treillis hyperstatique réel

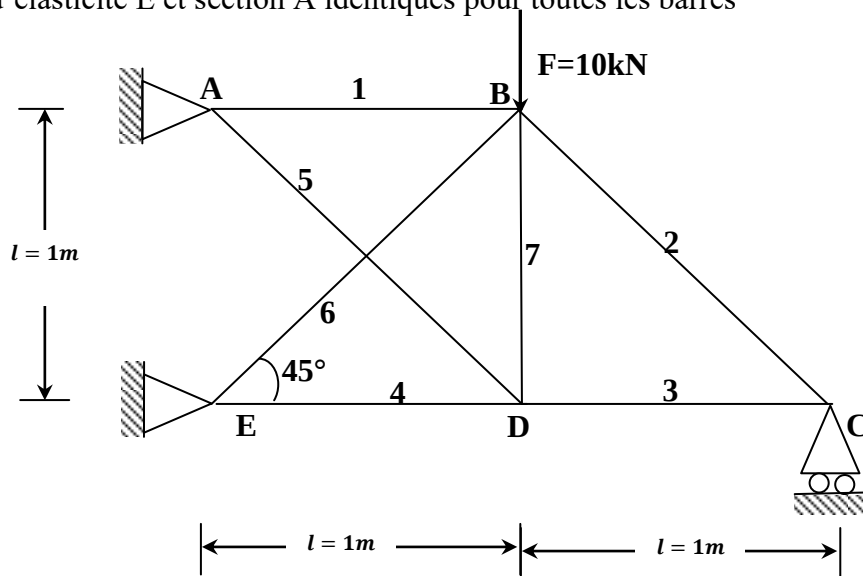
N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_1^0	Effort normal n_2^0	$N_{\Sigma F}^0 + N_2 n_1^0 + N_7 n_2^0$
1	L	$3F$	$-1/\sqrt{2}$	0	$2.506F$
2	$\sqrt{2}L$	0	1	0	$0.699F$
3	L	$-2F$	$-1/\sqrt{2}$	0	$-2.494F$
4	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$	1	0	$-0.716F$
5	L	F	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-0.047F$
6	L	$2F$	0	$-1/\sqrt{2}$	$1.448F$
7	$\sqrt{2}L$	0	0	1	$0.781F$
8	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$	0	1	$-0.633F$
9	L	$-F$	0	$-1/\sqrt{2}$	$-1.552F$
10	L	F	0	$-1/\sqrt{2}$	$0.448F$
11	L	F	0	0	F
12	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}F$	0	0	$-1.414F$

5.6.3. Exercice N° 5.3 :

Pour le treillis hyperstatique suivant, on demande :

- de déterminer le degré d'hyperstaticité;
- de déterminer les efforts dans toutes les barres.

Module d'élasticité E et section A identiques pour toutes les barres



- **Le degré d'hyperstaticité :**

$$d = b + l - 2n = 7 + 5 - 2.5 = 2$$

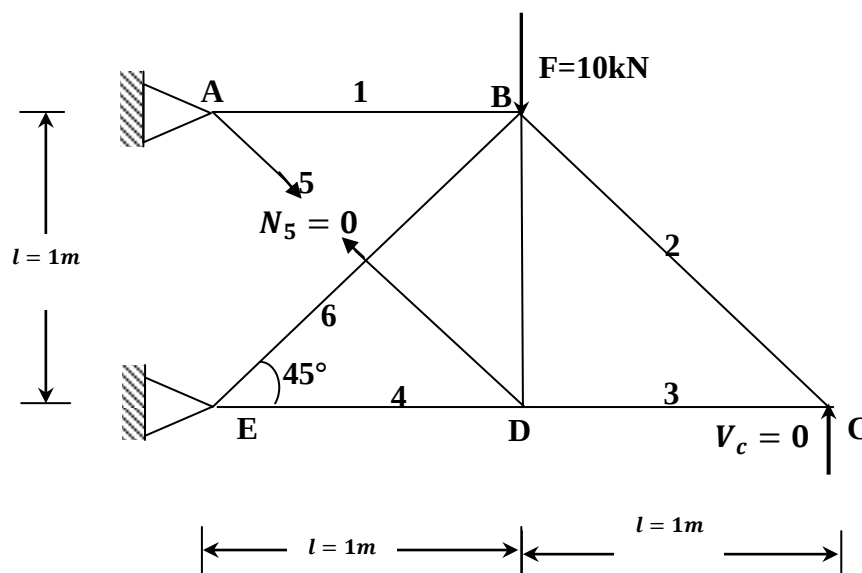
- **Système de base :**

On choisit comme inconnus la réaction verticale à l'appui C (V_C) et l'effort normal (N_5) de barre 5.

- **Calcul des efforts normaux pour les états 0, 1 et 2 :**

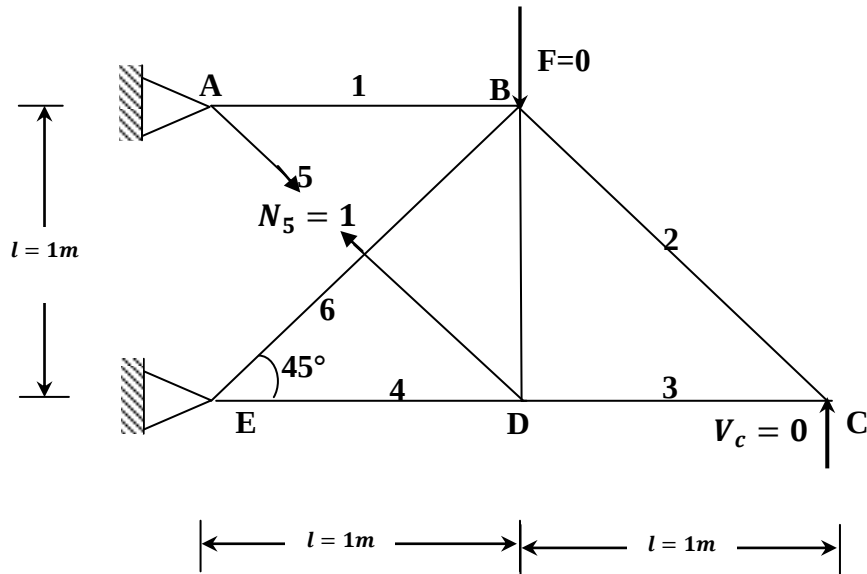
Les tableaux ci-dessous reprennent la valeur des efforts normaux dans les barres pour chacune des structures isostatiques (**Etat0, Etat 1 et Etat 2**).

- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$, $N_5 = 0$ et $V_C = 0$**



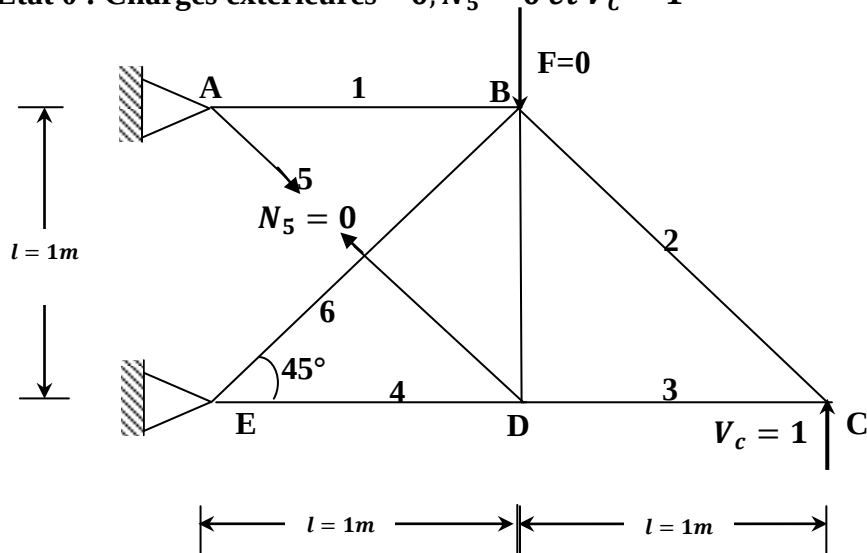
N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$
1	1	10
2	1.41	0
3	1	0
4	1	0
5	1.41	0
6	1.41	-14.14
7	1	0

- Etat 1 : Charges extérieures = 0, $N_5 = 1$ et $V_C = 0$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal n_7^0
1	1	-0.71
2	1.41	0
3	1	0
4	1	-0.71
5	1.41	1
6	1.41	1
7	1	-0.71

- Etat 0 : Charges extérieures = 0, $N_5 = 0$ et $V_C = 1$



N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $n_i(V_c = 1)$
1	1	-2
2	1.41	-1.41
3	1	1
4	1	1
5	1.41	0
6	1.41	1.41
7	1	0

- Calculer des déplacements δ_{ij} .

$$\delta_{11} = \frac{4.32}{EA}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2.7}{EA}, \quad \delta_{22} = \frac{11.62}{EA}$$

$$\delta_{10} = -\frac{27.1}{EA} \quad \text{et} \quad \delta_{20} = -\frac{48.11}{EA}$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \frac{4.32}{EA} N_5 + \frac{2.7}{EA} V_c - \frac{27.1}{EA} = 0 \\ \frac{2.7}{EA} N_5 + \frac{11.62}{EA} V_c - \frac{48.11}{EA} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_5 = 4.28 kN \\ V_c = 3.15 kN \end{cases}$$

- Valeurs des efforts normaux du treillis hyperstatique réel

N° de la barre	Longueur de la barre	Effort normal $N_{\Sigma F}^0$	Effort normal n_5^0	Effort normal $n_i(V_c = 1)$	$N_{\Sigma F}^0 + N_5 n_5^0 + V_c n_i$
1	1	10	-0.71	-2	0.67
2	1.41	0	0	-1.41	-4.45
3	1	0	0	1	3.15
4	1	0	-0.71	1	0.12
5	1.41	0	1	0	4.28
6	1.41	-14.14	1	1.41	-5.4
7	1	0	-0.71	0	-3.03

6. Conclusion :

L'objet de ce polycopié de cours et d'exercices est de servir de guide aux étudiants de génie civil de l'Université des sciences et de la technologie d'Oran et aux personnes souhaitant avoir une vue d'ensemble sur les méthodes de calcul des structures hyperstatiques.

Des références bibliographiques sont données ci-après pour permettre au lecteur d'approfondir chaque sujet abordé.

7. Bibliographie :

- Albiges M. Résistance des matériaux appliquée, tome1, Editions Eyrolles, Paris, 1969.
- Decelle A. F., et Legendre D., Mécanique appliquée au génie civil, Editions Eyrolles, Paris, 1983.
- Dreyfuss E., Leçons sur la Résistance des matériaux, Editions Eyrolles, Paris, 1966.
- Maquoi R., Mécanique des structures –première partie- Notes de cours destinées aux étudiants de 3ème Bachelier Génie Civil, Université de Liège –Faculté des sciences appliquées, 2008.
- Megson T. H., Structural and stress analysis, British library cataloguing in publication data, 1996.
- Nash W. A., Theory and problems of strength of materials. 4th Ed. McGraw-Hill, New York, 1998.
- Philippe B., Mécanique des Structures, ENPC, 2008.