



MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

ÉLASTICITÉ

Roland FORTUNIER
ENSM-SE, centre SMS
158, cours Fauriel
42023 Saint-Etienne cedex 02

20 février 2004

Table des matières

INTRODUCTION	9
1 CINÉMATIQUE	13
1.1 Équilibre et continuité	13
1.1.1 Équilibre d'un solide	13
1.1.2 Continuité de la matière	14
1.2 Transformation d'un solide	15
1.2.1 Configurations	15
1.2.2 Description lagrangienne	16
1.2.3 Description eulérienne	18
1.3 Équations de transport	19
1.3.1 Tenseur gradient d'une transformation	19
1.3.2 Transport de quantités élémentaires	20
1.4 Équations de conservation	21
1.4.1 Notion de dérivée particulaire	21
1.4.2 Conservation de la masse	23
1.5 Exercices	25
2 DÉFORMATIONS	27
2.1 Formulation eulérienne en vitesses	27

2.1.1	Tenseur gradient des vitesses de déplacement	27
2.1.2	Tenseur des taux de déformation et de rotation	28
2.1.3	Intégration dans le temps	29
2.2	Formulation en déplacements	29
2.2.1	Tenseur des dilatations	29
2.2.2	Tenseurs des déformations	30
2.3	Hypothèse des petites perturbations	32
2.3.1	Tenseur gradient des déplacements	32
2.3.2	Déformations et de rotation de corps solide	33
2.3.3	Dilatation volumique	33
2.3.4	Équations de compatibilité	34
2.3.5	Mesures des déformations	36
2.3.6	Conditions aux limites	36
2.4	Exercices	37
3	CONTRAINTES	41
3.1	Tenseur des contraintes	41
3.1.1	Hypothèses de base	41
3.1.2	Théorème de l'action et de la réaction	42
3.1.3	Signification physique du vecteur contrainte	43
3.1.4	Les autres tenseurs de contraintes	44
3.2	Signification physique des contraintes	46
3.2.1	Contraintes normale et tangentielle	46
3.2.2	Conditions aux limites en pression	47
3.2.3	Contraintes dans un repère orthonormé	47
3.3	Équations d'équilibre	48

3.3.1	Description globale	48
3.3.2	Équilibre des forces	49
3.3.3	Équilibre des moments	49
3.4	Utilisation du tenseur des contraintes	50
3.4.1	Contraintes principales	50
3.4.2	Contrainte moyenne et déviateur	50
3.4.3	Contraintes équivalentes	51
3.5	Exercices	52
4	ÉLASTICITÉ	55
4.1	Historique	55
4.1.1	Résistance des solides	55
4.1.2	Relation contrainte-déformation	56
4.2	L'essai de traction	57
4.2.1	Courbe force-allongement	57
4.2.2	Courbe contrainte-déformation	57
4.2.3	Domaine d'élasticité	59
4.2.4	Exemples	61
4.3	Loi de comportement élastique linéaire	61
4.3.1	Loi de Hooke généralisée	61
4.3.2	Énergie de déformation élastique	63
4.3.3	Relations de symétrie	65
4.3.4	Thermo-élasticité linéaire	68
4.4	Exercices	69
5	MÉTHODES SEMI-INVERSESES	71
5.1	Bilan	71

5.1.1	Nombre d'inconnues, nombre d'équations	71
5.1.2	Méthodes de résolution	72
5.2	Résolution en déplacements	72
5.2.1	Équations de Lamé-Clapeyron	72
5.2.2	Cas particuliers	73
5.3	Résolution en contraintes	74
5.3.1	Équations de Beltrami-Michell	74
5.3.2	Cas particuliers	75
5.4	Exercices	76
6	MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES	83
6.1	Cadre général	83
6.1.1	Principe des puissances virtuelles	83
6.1.2	Principe des travaux virtuels	85
6.2	Formulation variationnelle	86
6.2.1	Approche en déplacements	86
6.2.2	Approche en contraintes	87
6.2.3	Encadrement	88
6.3	Exercices	89
7	APPLICATION AUX POUTRES	93
7.1	Cinématique	93
7.1.1	Géométrie	93
7.1.2	Hypothèse de Navier	95
7.2	Contraintes et déformations	98
7.2.1	Torseur des déformations	98
7.2.2	Torseur des efforts	99

7.2.3	Énergie de déformation	100
7.3	Élasticité	100
7.3.1	Loi de comportement	100
7.3.2	Conditions aux limites	101
7.4	Méthode de résolution	103
7.4.1	Calcul des efforts internes	103
7.4.2	Calcul des déplacements et des rotations	106
7.4.3	Poutre à plan moyen chargée dans son plan	106
7.5	Exercices	108

ANNEXES **115**

A ALGÈBRE TENSORIELLE **115**

A.1	Composantes d'un vecteur	115
A.2	Composantes d'un tenseur	117
A.3	Opérations sur les tenseurs	119

B GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE **121**

B.1	Repère naturel	121
B.2	Opérateurs différentiels	123

C OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS **127**

C.1	Coordonnées cartésiennes	127
C.2	Coordonnées cylindriques	128
C.3	Coordonnées sphériques	131

INTRODUCTION

La mécanique des milieux continus est l'étude du comportement de solides déformables soumis à des sollicitations extérieures. Cette discipline scientifique est relativement ancienne, et a permis la réalisation d'ouvrages importants pour notre vie de tous les jours. Les exemples les plus impressionnants se trouvent dans le domaine du génie civil. En effet, pour fabriquer des ouvrages d'art tels que les viaducs et les ponts, il fallait tout d'abord étudier leur résistance mécanique. Ces ouvrages devaient tout d'abord résister à une sollicitation volumique liée à leur propre poids. Ensuite, ils devaient résister à différentes sollicitations telles que le vent, le poids des véhicules ou des objets qui les traversent,



FIG. 1 – *Vue d'ensemble du viaduc du Viaur*

La figure 1 illustre la construction d'un viaduc permettant au chemin de fer d'enjamber le Viaur à l'endroit où il sépare les départements du Tarn et de l'Aveyron. La figure 2 illustre les étapes de construction de ce viaduc. Il est évident que le cahier des charges d'une telle construction ne comporte pas uniquement des critères mécaniques. Par exemple, la tenue à la corrosion est

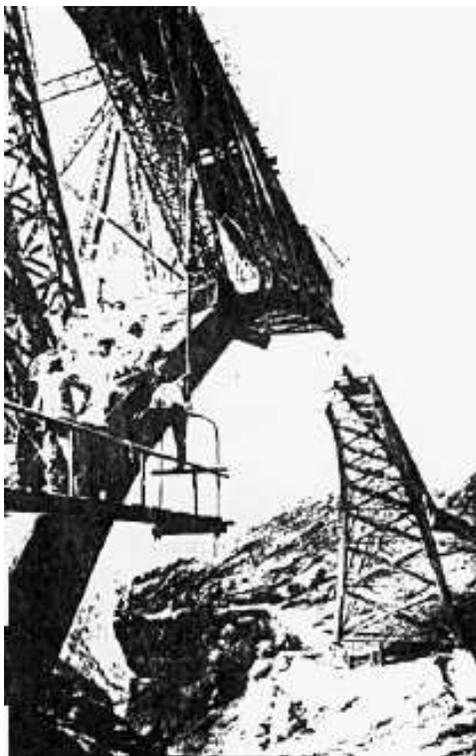


FIG. 2 – *Construction du viaduc du Viaur*

un facteur important. Toutefois, nous nous limitons dans ce document aux aspects mécaniques.

Dans le premier chapitre, nous introduisons la cinématique des milieux continus déformables, qui sert à décrire mathématiquement leur transformation sous l'effet d'une sollicitation mécanique. Ensuite, les chapitres deux et trois sont consacrés à la définition des tenseurs de déformation et de contrainte. Ces tenseurs sont à la base de toute analyse mécanique des milieux continus déformables. Ils sont reliés entre eux par une "loi de comportement", qui caractérise les propriétés du ou des matériaux constituant le milieu étudié. Les cas traités dans l'industrie permettent très souvent de se placer dans l'hypothèse d'une loi de comportement élastique linéaire du matériau. L'objectif du chapitre quatre est donc de donner un aperçu relativement général de ce type de loi de comportement.

Les chapitres cinq et six donnent les méthodes les plus couramment employées pour résoudre des problèmes de mécanique des milieux continus, dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire du matériau. Les méthodes

semi-inverses (chapitre cinq) permettent de déterminer la solution exacte dans quelques cas simples, tandis que les méthodes énergétiques (chapitre six) permettent plus souvent de l'encadrer en termes d'énergie.

Le dernier chapitre de ce document est une application de la mécanique des milieux continus au cas des milieux curvilignes (les poutres). Dans ce cas, l'ensemble des notions introduites peut être appliqué pour mettre en place une stratégie de résolution de ce type de problème.

Le lecteur pourra éventuellement se familiariser avec le calcul tensoriel, largement utilisé en mécanique, à l'aide des annexes et de de [2, 4, 6, 7, 9]. Il pourra également approfondir les notions et les méthodes introduites dans ce document à l'aide de [8] (autre présentation de ces notions et méthodes), de [5] (aspects thermodynamiques de la mécanique et autres lois de comportement), et même de [1, 3] (généralisation des milieux continus : les milieux de Cosserat ou milieux "micro-poreux").

Chapitre 1

CINÉMATIQUE

1.1 Équilibre et continuité

1.1.1 Équilibre d'un solide

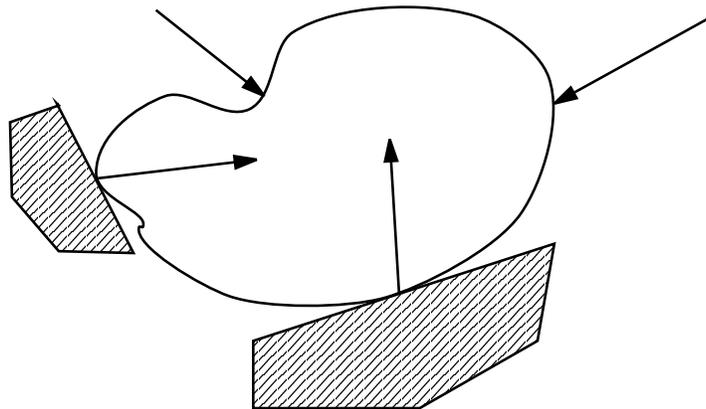


FIG. 1.1 – *Équilibre d'un solide*

Tout solide dont on étudiera les efforts internes et les déformations sera considéré en équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées (figure 1.1). Les réactions des appuis font équilibre aux charges directement appliquées. Ceci se traduit par des équations générales d'équilibre du corps. Si le nombre d'équations est suffisant pour déterminer les réactions, la struc-

ture est dite isostatique. Sinon, il est nécessaire de faire appel à d'autres relations, et la structure est dite hyperstatique.

1.1.2 Continuité de la matière

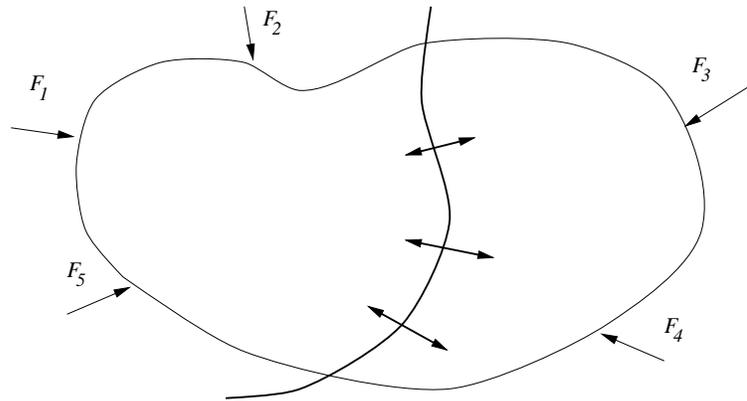


FIG. 1.2 – *Continuité de la matière*

Toutes les charges appliquées (y compris les réactions aux appuis et le poids propre) provoquent des forces internes qui sollicitent la matière du corps considéré. La continuité de la matière implique que les efforts internes qui s'exercent de part et d'autre d'une section quelconque s'équilibrent (figure 1.2). Les efforts internes d'un côté de cette section font équilibre à toutes les forces extérieures appliquées depuis cette section jusqu'à l'extrémité du corps considéré.

La continuité de la matière suppose que l'on se place d'un point de vue suffisamment macroscopique pour étudier son comportement. En effet, à l'échelle atomique par exemple, la matière n'est plus continue. Elle est constituée d'atomes dont la masse est essentiellement concentrée sur le noyau. Le fait de se placer d'un point de vue macroscopique permet en outre de définir dans le matériau une masse volumique ρ qui, intégrée sur l'ensemble de son volume, fournit la masse totale du solide.

1.2 Transformation d'un solide

1.2.1 Configurations

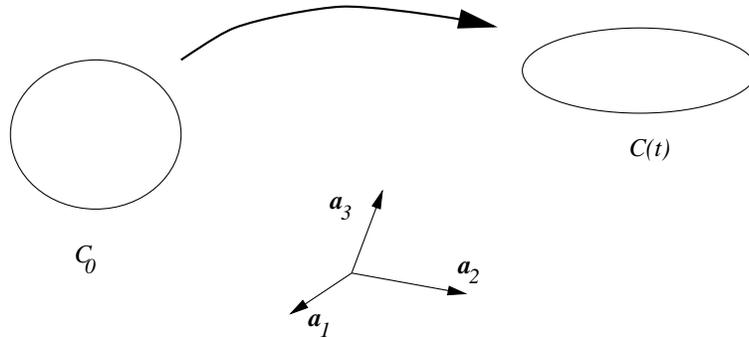


FIG. 1.3 – Configurations initiale et actuelle d'un solide

Lorsqu'un solide continu se déforme au cours du temps, il adopte une série de configurations $C(t)$, et le fait de représenter une grandeur dans l'une ou l'autre de ces configurations change parfois sa valeur, et souvent sa vitesse de variation (notion de dérivée convective). Pour simplifier, nous ne considérerons ici que la configuration initiale C_0 et la configuration courante $C(t)$ d'un solide (des configurations intermédiaires sont parfois utilisées en mécanique, telles que la configuration "relâchée" en élasto-plasticité). La figure 1.3 schématise ces configurations.

La configuration utilisée pour représenter des grandeurs (forces, déplacements, ...) définit le type d'analyse réalisée. Si toutes les grandeurs sont représentées dans C_0 , le type d'analyse est dit lagrangien. Inversement, si toutes les grandeurs sont représentées dans $C(t)$, le type d'analyse est dit eulérien. Souvent, par abus de langage, on parle de configurations lagrangienne ou eulérienne.

Il convient de bien distinguer les notions de configuration et de repère. Dans la figure 1.3, le repère $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ est fixe. Toutes les grandeurs mentionnées dans ce texte peuvent être exprimées dans ce repère. Par exemple, si P_0 et P sont les positions d'un même point matériel respectivement à $t = 0$ (configuration C_0) et à l'instant t courant (configuration $C(t)$), on notera :

$$\overrightarrow{OP_0} = \vec{X} = X_i \vec{a}_i \quad (1.1)$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{x} = x_i \vec{a}_i \quad (1.2)$$

1.2.2 Description lagrangienne

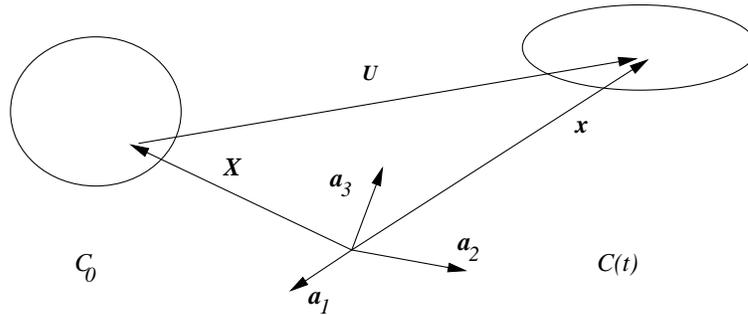


FIG. 1.4 – Description lagrangienne d'une transformation

Dans une analyse lagrangienne (figure 1.4), on décrit la transformation du solide à l'aide des coordonnées de chaque point \vec{x} . Ces coordonnées seront évidemment fonction du temps t , et de la position initiale du point \vec{X} . Ceci s'écrit sous la forme :

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) \text{ avec } \vec{\Phi}(\vec{X}, 0) = \vec{X} \quad (1.3)$$

où $\vec{\Phi}$ est une fonction vectorielle. Pour assurer la continuité du solide en cours de transformation, cette fonction doit être bijective (existence d'une transformation inverse), et de classe C^1 par rapport aux variables d'espace et de temps. Elle permet de définir le vecteur déplacement d'un point du solide au cours de la transformation. Entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant courant t , le vecteur déplacement \vec{U} d'un point de position initiale \vec{X} est donné par :

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) - \vec{\Phi}(\vec{X}, 0) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) - \vec{X} \quad (1.4)$$

En description lagrangienne, X_1, X_2, X_3 et t sont appelées *variables de Lagrange*, tandis que x_1, x_2 et x_3 sont appelées *inconnues de Lagrange*.

Trajectoire

Lorsque l'on suit un point du milieu au cours du temps, celui-ci décrit une courbe de l'espace paramétrée par t , appelée trajectoire. A l'aide de cette trajectoire, on peut définir la vitesse d'un point à l'instant t . Le point est caractérisé par sa position \vec{X} dans la configuration initiale C_0 , et sa vitesse courante \vec{V} est donnée par la relation :

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad (1.5)$$

Lignes d'émission

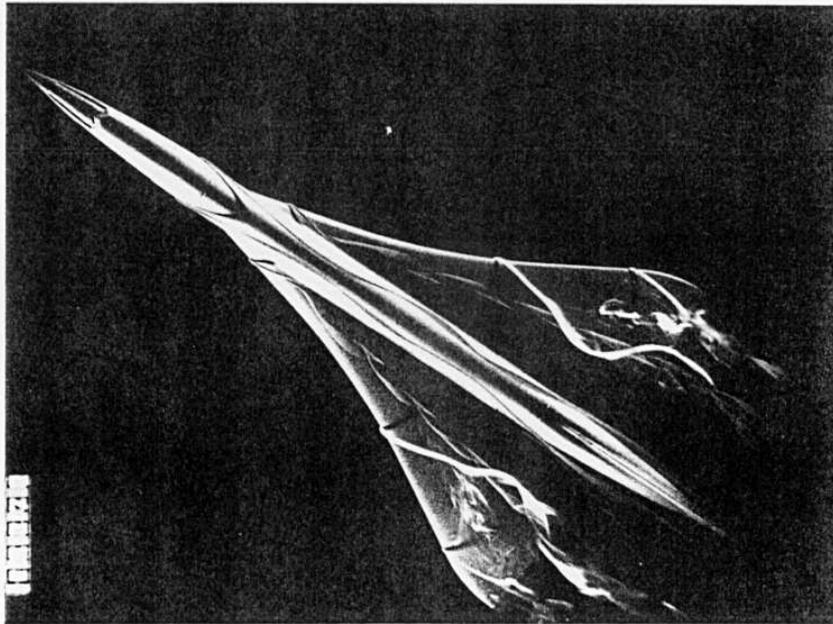


FIG. 1.5 – Émission de traceurs autour d'une maquette du Concorde

Lorsque l'on marque toutes les particules passant par un point P à l'instant t_0 , les positions de ces particules à tout instant ultérieur t décrivent les lignes d'émission du point P . En aérodynamique, ces lignes d'émission sont obtenues en utilisant des traceurs pour suivre les écoulements autour de l'objet se déplaçant (figure 1.5). Elles peuvent également être produites par un obstacle fixe sur un fluide en mouvement (figure 1.6).

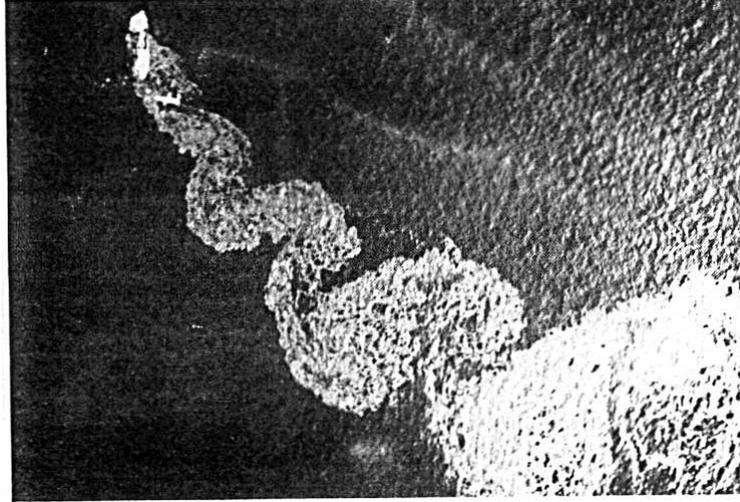


FIG. 1.6 – Trace produite sur la mer par un cargo échoué

1.2.3 Description eulérienne

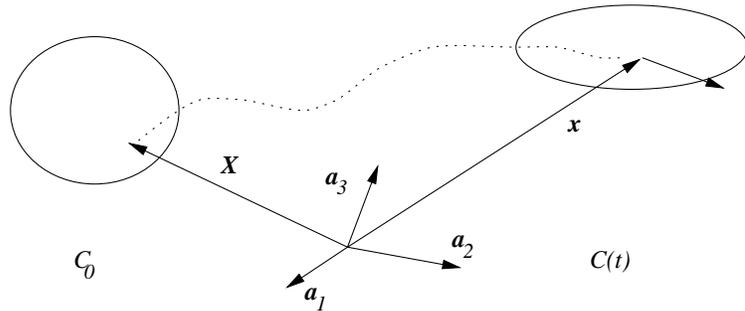


FIG. 1.7 – Description eulérienne d'une transformation

Dans une analyse eulérienne (figure 1.7), on décrit la transformation du solide à l'aide de la vitesse courante \vec{v} de chaque point \vec{x} de la configuration $C(t)$. Cette vitesse \vec{v} est donc ici une fonction de la position courante \vec{x} et du temps t .

x_1, x_2, x_3 et t sont appelées *variables d'Euler*, tandis que les composantes v_1, v_2 et v_3 du vecteur vitesse \vec{v} sont appelées *inconnues d'Euler*.

obtention des trajectoires

La vitesse eulérienne \vec{v} permet de retrouver la fonction $\vec{\Phi}$ de la description lagrangienne, et donc les trajectoires des points matériels, par intégration au cours du temps du système différentiel :

$$\begin{cases} d\vec{x} = \vec{v}(\vec{x}, t)dt \\ \vec{x} = \vec{X} \text{ à } t = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Toutefois, cette intégration en temps s'avère souvent délicate car il faut constamment actualiser la configuration du système. En effet, la vitesse eulérienne \vec{v} d'un point matériel dépend de sa position courante \vec{x} , elle-même fonction de sa position initiale et du temps.

Mouvement stationnaire

Lorsque la vitesse eulérienne des points matériels ne dépend pas du temps, le mouvement est dit stationnaire (ou permanent). Dans ce cas, la ligne d'émission d'un point P sera identique à la partie aval de la trajectoire passant par P , puisque l'instant de passage en ce point n'a plus d'influence. Les écoulements stationnaires (ou permanents) en mécanique des fluides correspondent à ce cas.

1.3 Équations de transport

1.3.1 Tenseur gradient d'une transformation

Pour décrire une transformation quelconque, on la remplace localement, en chaque point \vec{X} de la configuration C_0 , par son application linéaire tangente. Cette application est caractérisée par un tenseur \underline{F} , gradient de la fonction vectorielle $\vec{\Phi}$ reliant les positions initiale et courante d'un point. Nous avons donc :

$$\underline{F}(\vec{X}, t) = \underline{grad}(\vec{\Phi}(\vec{X}, t)) = \underline{I} + \underline{grad}(\vec{U}(\vec{X}, t)) \quad (1.7)$$

où \underline{I} est le tenseur identité. Le tenseur gradient de la transformation d'un solide \underline{F} permet donc de relier localement les configurations C_0 et $C(t)$. Il

suppose implicitement que la transformation du matériau est continue, c'est-à-dire qu'il ne se forme pas de trou ni d'interface. La formation de trous et d'interfaces résulte par exemple de l'endommagement du matériau en cours de transformation, mais ceci sort du cadre de ce cours. Le tenseur gradient de la transformation peut également s'écrire pour le passage inverse sous la forme :

$$\underline{F}^{-1}(\vec{x}, t) = \underline{grad}(\vec{\Phi})^{-1}(\vec{x}, t) \quad (1.8)$$

1.3.2 Transport de quantités élémentaires

D'après la définition précédente du tenseur gradient d'une transformation, un vecteur élémentaire $d\vec{X}$ de C_0 se transformera en un vecteur $d\vec{x}$ de $C(t)$ sous la forme :

$$d\vec{x} = \underline{F}.d\vec{X} = (\underline{I} + \underline{grad}(\vec{U})).d\vec{X} \quad (1.9)$$

Le transport d'un vecteur élémentaire se fait donc directement par l'application linéaire tangente de la transformation, ou à l'aide du gradient des déplacements.

Les volumes dv de $C(t)$ et dV de C_0 , associés respectivement à trois vecteurs élémentaires $d\vec{x}$, $d\vec{y}$ et $d\vec{z}$ de $C(t)$, et $d\vec{X}$, $d\vec{Y}$ et $d\vec{Z}$ de C_0 , sont donnés par les produits mixtes :

$$\begin{cases} dV = [d\vec{X}, d\vec{Y}, d\vec{Z}] = (d\vec{X} \wedge d\vec{Y}).d\vec{Z} \\ dv = [d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}] = (d\vec{x} \wedge d\vec{y}).d\vec{z} \end{cases} \quad (1.10)$$

En utilisant l'équation de transport des vecteurs élémentaires, on constate que dv et dV sont reliés entre eux sous la forme :

$$dv = JdV \text{ avec } J = \det(\vec{F}) \quad (1.11)$$

Nous considérons dans $C(t)$ une surface élémentaire caractérisée par un vecteur $d\vec{s} = \vec{n}ds$, où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à cette surface élémentaire, et ds son aire. Dans C_0 , cette surface élémentaire était caractérisée par un vecteur $d\vec{S} = \vec{N}dS$. Pour calculer l'évolution de cet élément

de surface, on construit un volume élémentaire à l'aide d'un vecteur $d\vec{z}$ (dans $C(t)$) ou $d\vec{Z}$ (dans C_0), non contenu dans cette surface. D'après l'équation 1.11, ce volume élémentaire se transporte de la façon suivante :

$$dv = d\vec{s} \cdot d\vec{z} = JdV = Jd\vec{S} \cdot d\vec{Z} \quad (1.12)$$

Il s'en suit, d'après l'équation 1.9, que l'élément de surface se transporte de la façon suivante :

$$d\vec{s} = J(\underline{F}^{-1})^t \cdot d\vec{S} \quad (1.13)$$

1.4 Équations de conservation

1.4.1 Notion de dérivée particulaire

Les équations de base de la mécanique des milieux continus résultent de l'écriture de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement sur le domaine étudié. Pour écrire ces lois de conservation, il est important de prendre en compte le mouvement du solide, et donc d'utiliser une dérivée particulaire pour les fonctions et pour les intégrales mises en jeu.

Dérivée particulaire d'une fonction

Considérons une grandeur physique quelconque associée à un point matériel P de coordonnées \vec{X} dans la configuration C_0 et \vec{x} dans la configuration $C(t)$. Nous exprimerons cette grandeur sous la forme :

- $G(\vec{X}, t)$ en configuration lagrangienne,
- $g(\vec{x}, t)$ en configuration eulérienne.

En configuration eulérienne, la vitesse de variation de g au cours de la transformation du solide doit prendre en compte le fait que, au cours de cette transformation, les coordonnées \vec{x} du point P changent. Cette vitesse de variation est donc calculée à l'aide d'une dérivée particulaire suivant la trajectoire du point P :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(g) \quad (1.14)$$

En configuration lagrangienne, la fonction G ne dépend que des coordonnées initiales (et donc fixes) du point P et du temps. La vitesse de variation de G est donc directement obtenue sous la forme :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} \quad (1.15)$$

Compte tenu de la relation vectorielle en les coordonnées \vec{X} et \vec{x} (équation 1.3), on a $g(\vec{x}, t) = g(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t) = G(\vec{X}, t)$. La vitesse de variation de la quantité physique considérée peut donc s'écrire de deux façons différentes :

$$\frac{dg}{dt}(\vec{x}, t) = \frac{\partial G}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad (1.16)$$

Ce que nous venons de voir pour une quantité scalaire peut tout à fait être appliqué à chaque composante d'un vecteur, et plus généralement d'un tenseur. Par exemple, la vitesse d'un point matériel est la vitesse de variation du vecteur position d'un point, Elle peut être écrite de façon lagrangienne (vecteur $\vec{V}(\vec{X}, t)$) ou eulérienne (vecteur $\vec{v}(\vec{x}, t)$), ce qui conduit à la relation suivante :

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{\Phi}(\vec{X}, t), t) \quad (1.17)$$

Dérivée particulière d'intégrales de volume

Considérons maintenant l'intégrale de volume de la fonction scalaire $g(\vec{x}, t)$:

$$I(t) = \int_{\Omega} g(\vec{x}, t) dv \quad (1.18)$$

On montre que la vitesse de variation de cette intégrale de volume est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\vec{v}) \right) dv \quad (1.19)$$

Si l'intégrale de volume porte sur une fonction à valeurs vectorielles $\vec{g}(\vec{x}, t)$, on obtient le résultat suivant :

$$\vec{I}(t) = \int_{\Omega} \vec{g}(\vec{x}, t) dv \quad (1.20)$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\vec{g} \otimes \vec{v}) \right) dv \quad (1.21)$$

1.4.2 Conservation de la masse

Si l'on considère un système matériel Ω formé d'un ou plusieurs constituants non miscibles et si on exclue l'existence d'éventuelles réactions chimiques alors la loi de conservation de la masse s'énonce ainsi : la masse de tout domaine matériel Ω_A , connexe, contenu dans Ω , et suivi dans son mouvement, reste constante. On a donc :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_A} \rho(\vec{x}, t) dv \right) = 0 \quad (1.22)$$

En utilisant la formule donnant la dérivée particulière d'une intégrale de volume, on obtient :

$$\int_{\Omega_A} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho \vec{v}) \right) dv = 0 \quad (1.23)$$

L'équation ci-dessus étant vraie quel que soit le domaine Ω_A considéré, on en tire l'équation locale de conservation de la masse dans une approche eulérienne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho \vec{v}) = 0 \text{ en tout point de } \Omega \quad (1.24)$$

En utilisant le fait que $\overrightarrow{div}(\rho \vec{v}) = \rho \overrightarrow{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\rho)$, on peut réécrire l'équation locale sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \overrightarrow{div}(\vec{v}) = 0 \text{ en tout point de } \Omega \quad (1.25)$$

On aurait pu exprimer la loi de conservation de la masse en écrivant qu'à tout instant la masse associée au domaine Ω_A est égale à la masse associée au même domaine dans la configuration initiale, Ω_A^0 . En appelant $\rho_0(\vec{X})$ et $\rho(\vec{x}, t)$ les masses volumiques du milieu respectivement dans sa configuration initiale et dans sa configuration courante, on peut écrire :

$$\int_{\Omega_A^0} \rho_0(\vec{X}) dV = \int_{\Omega_A} \rho(\vec{x}, t) dv \quad (1.26)$$

En utilisant maintenant l'équation 1.11, on peut transformer le second membre de l'équation précédente par changement de variable. On obtient :

$$\int_{\Omega_A} \rho(\vec{x}, t) dv = \int_{\Omega_A^0} \rho(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t) J dV \quad (1.27)$$

Cette équation nous conduit à la relation $\int_{\Omega_A^0} (\rho_0 - \rho J) dV = 0$, qui doit être vérifiée dans tout domaine Ω_A^0 . On en déduit alors la forme lagrangienne de l'équation de conservation de la masse :

$$\rho J = \rho_0 \text{ avec } J = \det(\underline{F}) \quad (1.28)$$

L'équation de conservation de la masse permet d'exprimer simplement la dérivée particulaire d'une intégrale prise par rapport à une distribution de masse $dm = \rho dv$. Pour illustrer ce calcul, nous pouvons calculer la dérivée particulaire de la quantité de mouvement calculée sur un domaine Ω_A du solide étudié :

$$\vec{p}(t) = \int_{\Omega_A} \vec{v} dm = \int_{\Omega_A} \rho \vec{v} dv \quad (1.29)$$

En effet, en utilisant les relations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \int_{\Omega_A} \left(\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) \right) dv \\
&= \int_{\Omega_A} \left(\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\vec{v} \otimes \vec{v}) \right)}_{=\frac{d\vec{v}}{dt}} + \underbrace{\vec{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) \right)}_{=0} \right) dv \\
&= \int_{\Omega_A} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dv = \int_{\Omega_A} \rho \vec{\gamma} dv
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Dans cette équation, $\vec{\gamma}$ définit l'accélération d'un point matériel au cours de la transformation.

1.5 Exercices

Élongation pure

Dans un repère cartésien orthonormé, on étudie la transformation d'élongation pure définie de façon lagrangienne pour $t \geq 0$:

$$x_1 = X_1(1 + \alpha t), x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ avec } \alpha > 0 \tag{1.31}$$

- Déterminer la vitesse et les trajectoires
- Donner la représentation eulérienne du mouvement
- Déterminer le tenseur \underline{F} , gradient de la transformation
- Étudier le transport d'un vecteur, d'un volume et d'une aire

Glissement simple

Dans un repère cartésien orthonormé, on étudie la transformation de glissement simple définie de façon lagrangienne pour $t \geq 0$:

$$x_1 = X_1 + 2\alpha t X_2, x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ avec } \alpha > 0 \tag{1.32}$$

- Déterminer la vitesse et les trajectoires

- Donner la représentation eulérienne du mouvement
- Déterminer le tenseur \underline{F} , gradient de la transformation
- Étudier le transport d'un vecteur, d'un volume et d'une aire

Recherche de trajectoires

Dans un repère cartésien orthonormé, on étudie la transformation définie de façon eulérienne :

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha x_2, v_2 = \alpha x_1, v_3 = 0 \text{ avec } \alpha > 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ x_1 &= X_1, x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ à } t = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

- Donner la description lagrangienne du mouvement
- Dessiner les trajectoires

Équations de transport

Démontrer dans un repère cartésien orthonormé l'équation 1.19. Pour cela, faire un changement de variable pour tout exprimer dans la configuration initiale avant de dériver, puis utiliser les symboles de permutation p_{ijk} pour exprimer la quantité J sous la forme :

$$J = \det(\underline{F}) = \frac{1}{6} p_{ijk} p_{lmn} F_{il} F_{jm} F_{kn} \text{ avec } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.34)$$

Chapitre 2

DÉFORMATIONS

2.1 Formulation eulérienne en vitesses

2.1.1 Tenseur gradient des vitesses de déplacement

Sous l'effet d'un chargement extérieur, un corps solide peut se déformer. Un point matériel P , de position initiale \vec{X} fixée dans la configuration C_0 , vient en position \vec{x} dans la configuration courante $C(t)$. Ces positions sont reliées entre elles par le vecteur déplacement \vec{u} . En configuration eulérienne, l'évolution de la position du point P est donnée dans $C(t)$ par sa vitesse instantanée \vec{v} .

Pour décrire localement la transformation du solide, nous avons vu que celle-ci était linéarisée autour du point P , ce qui permet de définir le tenseur gradient de la transformation \underline{F} . De la même façon, nous étudions ici l'évolution d'un vecteur \vec{dx} autour du point P par l'intermédiaire de sa variation au cours du temps. Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx}) = \frac{d}{dt}(\underline{F} \cdot \vec{dX}) = \dot{\underline{F}} \cdot \vec{dX} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \vec{dx} = \underline{L} \cdot \vec{dx} \quad (2.1)$$

avec $\underline{L} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{\text{grad}}(\vec{v}(\vec{x}, t))$

Cette équation permet de définir le tenseur gradient des vitesses de déplacement \underline{L} . Il est important de noter ici que ce tenseur n'est pas la dérivée par rapport au temps d'une quantité, mais le gradient d'une vitesse. C'est pour cela qu'il est noté sans *point* dessus. Ses composantes sont pour-

tant homogènes à l'inverse d'un temps (s^{-1}). Dans une base orthonormée fixe, ses composantes sont :

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

2.1.2 Tenseur des taux de déformation et de rotation

Par définition, le tenseur des *taux de déformation* \underline{D} , ou des vitesses de déformation d'Euler, est la partie symétrique du tenseur \underline{L} , gradient des vitesses de déplacement dans la configuration courante :

$$\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^t) \quad (2.3)$$

Comme le tenseur gradient des vitesses de déplacement, ses composantes sont homogènes à l'inverse d'un temps (s^{-1}), mais il n'est pas noté avec un *point* dessus. Dans une base orthonormée fixe, ses composantes sont :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Le tenseur des taux de déformation est symétrique. Il permet de décrire, en termes de vitesse instantanée, le changement de forme du solide, mais pas sa position par rapport à un repère fixe. Pour décrire l'évolution, toujours en termes de vitesse instantanée, de la position du solide par rapport à un repère fixe, on définit le tenseur *taux de rotation* $\underline{\Omega}$, ou tenseur des vitesses de rotation de corps solide. Il s'agit de la partie antisymétrique du tenseur \underline{L} gradient des vitesses de déplacement :

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^t) \quad (2.5)$$

Ce tenseur représente la vitesse de rotation des axes principaux du solide en cours de transformation. Ses composantes sont toujours homogènes à l'inverse d'un temps, mais il n'est pas la dérivée par rapport au temps d'une quantité définie. Dans une base orthonormée fixe, les composantes du tenseur taux de rotation s'écrivent :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

2.1.3 Intégration dans le temps

Nous avons vu précédemment que, dans une formulation eulérienne, l'intégration en temps de la vitesse courante des particules du solide était difficile. Ceci est dû à l'évolution de la configuration du solide en cours de transformation. De même, il est très délicat d'intégrer dans le temps les tenseurs \underline{L} , \underline{D} et $\underline{\Omega}$. La méthode la plus couramment employée actuellement est l'utilisation d'une formulation dite *lagrangienne réactualisée*, qui consiste à intégrer sans changer de configuration sur un petit incrément de temps Δt , puis à actualiser la configuration au nouvel instant calculé pour intégrer sur un nouveau petit incrément. Cette méthode ne sera pas exposée dans ce cours. Le lecteur trouvera plus de détails dans la bibliographie.

2.2 Formulation en déplacements

2.2.1 Tenseur des dilatations

Comme dans la formulation en vitesses, nous allons nous intéresser ici au voisinage d'un point matériel P , en considérant deux vecteurs infinitésimaux \vec{dx} et \vec{dy} dans $C(t)$, de positions initiales respectives \vec{dX} et \vec{dY} dans C_0 . On constate que, au cours de la transformation, le produit scalaire de ces deux vecteurs évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{dx} \cdot \vec{dy} &= \vec{dX} \cdot \underline{F}^t \cdot \underline{F} \cdot \vec{dY} \\ &= \vec{dX} \cdot \underline{C} \cdot \vec{dY} \text{ avec } \underline{C} = \underline{F}^t \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le tenseur \underline{C} ainsi défini est appelé *tenseur des dilatations*. Il est lagrangien car il s'applique aux vecteurs \vec{dX} et \vec{dY} de C_0 . On peut remarquer que, dans le cas d'une rotation de corps solide (sans déformation), le tenseur \underline{F} cela celui d'une rotation, et satisfera donc la condition $\underline{F}^t \underline{F} = \underline{I}$, où \underline{I} est le tenseur identité du second ordre. Le tenseur des dilatations devient dans ce cas le tenseur identité. Ce tenseur caractérise donc la déformation du solide.

En notant maintenant \vec{N}_X et \vec{N}_Y les vecteurs unitaires associés respectivement aux directions \vec{dX} et \vec{dY} de C_0 , on a $\vec{dX} = dL_X \vec{N}_X$ et $\vec{dY} = dL_Y \vec{N}_Y$, ce qui permet de calculer :

– la dilatation λ dans une direction quelconque (par exemple \vec{N}_X) :

$$\lambda(\vec{N}_X) = \frac{\|\vec{dx}\|}{\|\vec{dX}\|} = \sqrt{\frac{\vec{dX} \cdot \underline{C} \cdot \vec{dX}}{\vec{dX} \cdot \vec{dX}}} = \sqrt{\vec{N}_X \cdot \underline{C} \cdot \vec{N}_X} \quad (2.8)$$

– le glissement, ou évolution de l'angle α , entre deux directions (par exemple \vec{N}_X et \vec{N}_Y) :

$$\cos(\alpha(\vec{N}_X, \vec{N}_Y)) = \frac{\vec{dx} \cdot \vec{dy}}{\|\vec{dx}\| \|\vec{dy}\|} = \frac{\vec{dX} \cdot \underline{C} \cdot \vec{dY}}{\sqrt{\vec{dX} \cdot \underline{C} \cdot \vec{dX}} \sqrt{\vec{dY} \cdot \underline{C} \cdot \vec{dY}}} = \frac{\vec{N}_X \cdot \underline{C} \cdot \vec{N}_Y}{\lambda(\vec{N}_X) \lambda(\vec{N}_Y)} \quad (2.9)$$

La formule 2.7 montre en fait que la forme bilinéaire associée au tenseur \underline{C} est définie positive, et que ce tenseur est symétrique. Il est donc diagonalisable, et ses valeurs propres sont positives ou nulles. Ses directions propres correspondent aux directions principales de déformation. Ses valeurs propres caractérisent les dilatations du solide dans ces directions.

2.2.2 Tenseurs des déformations

Pour caractériser la déformation d'un solide en cours de transformation, on utilise l'écart entre les quantités $\vec{dx} \cdot \vec{dy}$ (dans $C(t)$) et $\vec{dX} \cdot \vec{dY}$ (dans C_0). Ceci permet d'estimer à la fois les variations de longueur et la variations d'angles. On peut écrire cette différence de nombreuses façons. En particulier, on peut choisir de l'exprimer soit en fonction des vecteurs \vec{dX} et \vec{dY} (description lagrangienne), soit en fonction des vecteurs \vec{dx} et \vec{dy} (description eulérienne). On obtient les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{dx} \cdot \vec{dy} - \vec{dX} \cdot \vec{dY} &= \vec{dX} \cdot \underline{C} \cdot \vec{dY} - \vec{dX} \cdot \vec{dY} \\ &= \vec{dX} \cdot (\underline{C} - \underline{I}) \cdot \vec{dY} \\ &= 2\vec{dX} \cdot \underline{E} \cdot \vec{dY} \text{ avec } \underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{F}^t \cdot \underline{F} - \underline{I}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
\vec{dx}.\vec{dy} - \vec{dX}.\vec{dY} &= \vec{dx}.\vec{dy} - \vec{dx}.\underline{F}^{-t}.\underline{F}.\vec{dy} \\
&= \vec{dx}.\left(\underline{I} - \underline{F}^{-t}.\underline{F}\right).\vec{dy} \\
&= 2\vec{dx}.\underline{e}.\vec{dx} \text{ avec } \underline{e} = \frac{1}{2}\left(\underline{I} - \underline{F}^{-t}.\underline{F}\right)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ces deux formules définissent les tenseurs de déformation de *Green-Lagrange* (tenseur \underline{E} lagrangien) et d'*Euler-Almansi* (tenseur \underline{e} eulérien). Ces deux tenseurs sont symétriques. Ils représentent la déformation du solide.

En utilisant la formule reliant le tenseur gradient de la transformation \underline{F} au vecteur déplacement \vec{u} , Le tenseur des déformations de Green-Lagrange \underline{E} peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{E} = \frac{1}{2}\left(\underline{grad}(\vec{u}) + \underline{grad}(\vec{u})^t + \underline{grad}(\vec{u})^t.\underline{grad}(\vec{u})\right) \tag{2.12}$$

On constate que cette expressions n'est pas linéaire en fonction du champ de déplacement $\vec{u}(\vec{X}, t)$ ou de son gradient. Ceci signifie que, dans le cas général, on ne peut pas ajouter deux tenseurs de déformation pour représenter la déformation issue de deux champs de déplacement successifs. En fait, cette addition ne peut être réalisée que dans l'hypothèse des petites perturbations.

On peut utiliser le tenseur de Green-Lagrange pour caractériser la variation de longueur dans une direction quelconque (par exemple $\vec{dX} = dL_X \vec{N}_X$). En posant $\vec{dx} = dl_x \vec{n}_x$, où \vec{n}_x est un vecteur unitaire, on obtient :

$$dl_x^2 - dL_X^2 = \vec{dx}.\vec{dx} - \vec{dX}.\vec{dX} = 2dL_X^2 \vec{N}_X.\underline{E}.\vec{N}_X \tag{2.13}$$

Le scalaire $\vec{N}_X.\underline{E}.\vec{N}_X$ est appelé *déformation dans la direction* \vec{N}_X . Il s'écrit en fonction de la dilatation $\lambda(\vec{N}_X)$ ou de l'allongement unitaire $\delta(\vec{N}_X) = \lambda(\vec{N}_X) - 1$ dans cette direction sous la forme :

$$\vec{N}_X.\underline{E}.\vec{N}_X = \frac{dl_x^2 - dL_X^2}{2dL_X^2} = \frac{1}{2}\left(\lambda^2(\vec{N}_X) - 1\right) = \delta(\vec{N}_X) \left(\frac{\delta(\vec{N}_X)}{2} + 1\right) \tag{2.14}$$

Enfin, il est possible de relier le tenseur des déformations de Green-Lagrange au tenseur des taux de déformation. Pour cela, il suffit de calculer la vitesse de variation de l'écart $\vec{dx}.\vec{dy} - \vec{dX}.\vec{dY}$ des deux façons suivantes :

$$\frac{d}{dt} (\vec{dx} \cdot \vec{dy} - \vec{dX} \cdot \vec{dY}) = 2\vec{dX} \cdot \frac{d\underline{E}}{dt} \cdot \vec{dY} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{dx} \cdot \vec{dy} - \vec{dX} \cdot \vec{dY}) &= \frac{d}{dt} (\vec{dx} \cdot \vec{dy}) \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{dx}) \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{dy}) \\ &= \vec{dx} \cdot \underline{L}^t \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \underline{L} \cdot \vec{dy} \\ &= 2\vec{dx} \cdot \underline{D} \cdot \vec{dy} \\ &= 2\vec{dX} \cdot \underline{F}^t \cdot \underline{D} \cdot \underline{F} \cdot \vec{dY} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Il en ressort la relation suivante :

$$\underline{\dot{E}} = \underline{F}^t \cdot \underline{D} \cdot \underline{F} \quad (2.17)$$

2.3 Hypothèse des petites perturbations

2.3.1 Tenseur gradient des déplacements

Dans l'hypothèse des petites perturbations, les gradients de déplacement dans le solide sont suffisamment faibles pour que l'on puisse se limiter à l'application linéaire tangente calculée dans C_0 pour décrire la transformation du solide. Ceci revient à confondre les configurations initiale C_0 et courante $C(t)$, et à faire l'approximation au premier ordre suivante :

$$\underline{F}^{-1} = (\underline{I} + \underline{grad}(\vec{u}))^{-1} \equiv \underline{I} - \underline{grad}(\vec{u}) \quad (2.18)$$

Le fait de confondre les configurations initiale et courante permet d'intégrer directement le tenseur gradient des vitesses de déplacements pour obtenir une estimation au premier ordre du tenseur gradient des déplacements (noté \underline{d}) sous la forme :

$$\underline{d} = \int \underline{L} dt = \int \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} dt \equiv \underline{grad}(\vec{u}) \quad (2.19)$$

Les composantes de ce tenseur sont fréquemment écrites sous la forme (voir

les annexes pour les notions de composantes de tenseur et de dérivée covariante) :

$$d_{ij} = u_{i,j} \quad (2.20)$$

2.3.2 Déformations et de rotation de corps solide

Le fait de négliger les termes du second ordre dans les tenseurs de déformation \underline{E} et \underline{e} permet d'obtenir pour ces tenseurs une expression unique, notée $\underline{\epsilon}$, qui coïncide avec l'intégration en temps du tenseur des taux de déformation \underline{D} . On obtient un seul tenseur des déformations sous la forme :

$$\underline{E} \equiv \underline{e} \equiv \int \underline{D} dt \equiv \frac{1}{2} (\underline{grad}(\vec{u}) + \underline{grad}(\vec{u})^t) \quad (2.21)$$

dont les composantes s'écrivent :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.22)$$

Les mêmes hypothèses permettent d'écrire le tenseur de rotation de corps solide sous la forme :

$$\underline{\omega} \equiv \frac{1}{2}(\underline{grad}(\vec{u}) - \underline{grad}(\vec{u})^t) \quad (2.23)$$

avec des composantes :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2.24)$$

2.3.3 Dilatation volumique

Du fait de la linéarisation des relations, la dilatation volumique $\frac{\Delta V}{V}$ du solide est donnée dans ce cas par l'équation 1.11 modifiée comme suit :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dv}{dV} - 1 = \det(\underline{F}) - 1 \equiv tr(\underline{\epsilon}) = div(\vec{u}) \quad (2.25)$$

2.3.4 Équations de compatibilité

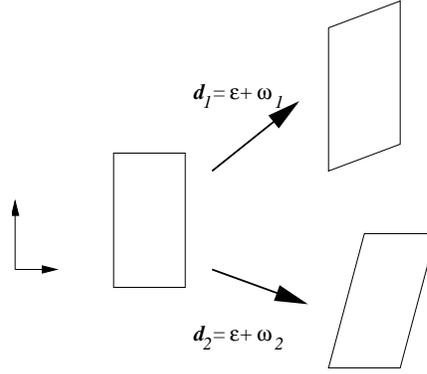


FIG. 2.1 – Deux transformations ayant le même tenseur de déformation, mais des gradients de déplacement différents

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur gradient des déplacements caractérise complètement le changement de forme du solide (figure 2.1), qui se décompose en un changement de forme (une déformation) et une rotation (de corps solide). En particulier, ce tenseur permet d'écrire :

$$\vec{dx} = (\underline{I} + \underline{d}).\vec{dX} \text{ , soit } \vec{du} = \underline{d}.\vec{dX} = \underline{grad}(\vec{u}).\vec{dX} \quad (2.26)$$

avec :

$$\underline{d} = \underline{grad}(\vec{u}) = \underline{\epsilon} + \underline{\omega} \quad (2.27)$$

Les équations précédentes conduisent à des relations supplémentaires que doit satisfaire le tenseur des déformations. En effet, si tout champ de déplacements permet par dérivation d'obtenir un champ de déformations, tout tenseur symétrique ne correspond pas forcément à un tenseur de déformations. Il faut pour cela que les termes du tenseur gradient des déplacements qui en découle forment une différentielle totale \vec{du} , c'est-à-dire que les dérivées secondes croisées coïncident :

$$u_{i,jk} = u_{i,kj} \Rightarrow d_{ij,k} = d_{ik,j} \Rightarrow \epsilon_{ik,j} - \epsilon_{ij,k} = \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} \quad (2.28)$$

En utilisant la définition des composantes de rotation de corps solide, le respect de la condition sur les dérivées secondes croisées du champ de

déplacements \vec{u} permet d'écrire le second terme de l'équation précédente sous la forme :

$$\begin{aligned}
\omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} &= \frac{1}{2} (d_{ij,k} - d_{ji,k} - d_{ik,j} + d_{ki,j}) \\
&= \frac{1}{2} (u_{i,jk} - u_{j,ik} - u_{i,kj} + u_{k,ij}) \\
&= \frac{1}{2} (-u_{j,ki} + u_{k,ji}) \\
&= \frac{1}{2} (d_{kj,i} - d_{jk,i}) \\
&= \omega_{kj,i}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ceci conduit à l'expression suivante en permutant le indices i et k dans les équations précédentes :

$$\epsilon_{ki,j} - \epsilon_{kj,i} = \omega_{ij,k} \tag{2.30}$$

Chaque terme $\epsilon_{ki,j} - \epsilon_{kj,i}$ représente donc la composante selon la direction k de la différentielle totale de rotation de corps solide $d\omega_{ij}$. Pour que ceci soit possible, il faut que l'égalité des dérivées secondes croisées soit satisfaite sur chaque $d\omega_{ij}$, soit $\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk}$. On aboutit alors aux équations suivantes sur les composantes du tenseur des déformations :

$$\epsilon_{ki,jl} + \epsilon_{lj,ik} = \epsilon_{kj,il} + \epsilon_{li,jk} \tag{2.31}$$

Cette équation représente 81 relations entre les déformations. Toutefois, seules six sont indépendantes. Elles sont obtenues par exemple en effectuant le produit doublement contracté par les termes g^{jl} de la métrique de l'espace (voir les annexes pour la définition de la métrique). Dans un repère orthonormé, ceci revient à faire $j = l$ et à sommer sur j . On obtient :

$$\sum_j \epsilon_{ki,jj} + \epsilon_{jj,ik} = \sum_j \epsilon_{kj,ij} + \epsilon_{ji,jk} \tag{2.32}$$

Ceci peut être écrit à l'aide des opérateurs différentiels classiques :

$$\underline{\Delta}(\underline{\epsilon}) + \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(tr(\underline{\epsilon}))) = \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon})) + \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon}))^t \tag{2.33}$$

Il s'agit d'une équation entre des tenseurs d'ordre 2, qui représente donc un ensemble de neuf relations, qui se réduit à six du fait de la symétrie des tenseurs résultants. Ces relations sont appelées "équations de compatibilité". Dans un repère orthonormé, elles sont souvent écrites sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} - 2\epsilon_{23,23} = 0 \\ \epsilon_{33,11} + \epsilon_{11,33} - 2\epsilon_{31,31} = 0 \\ \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,12} = 0 \\ \epsilon_{11,23} + (\epsilon_{23,1} - \epsilon_{31,2} - \epsilon_{12,3})_{,1} = 0 \\ \epsilon_{22,31} + (\epsilon_{31,2} - \epsilon_{12,3} - \epsilon_{23,1})_{,2} = 0 \\ \epsilon_{33,12} + (\epsilon_{12,3} - \epsilon_{23,1} - \epsilon_{31,2})_{,3} = 0 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Notons enfin que les équations de compatibilité fournissent une relation scalaire importante, qui est obtenue en multipliant la relation générale par les termes $g^{jk}g^{il}$, et en effectuant les deux produits doublement contractés. On obtient :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{div}}(\underline{\epsilon})) = \Delta(\operatorname{tr}(\underline{\epsilon})) \quad (2.35)$$

2.3.5 Mesures des déformations

La variation relative de longueur d'un vecteur élémentaire $\overrightarrow{dX} = dL_X \overrightarrow{N}_X$, que l'on notera δ , est liée à la déformation dans la direction \overrightarrow{N}_X par l'équation 2.14. Dans l'hypothèse des petites perturbations, cette équation devient :

$$\delta \left(\frac{\delta}{2} + 1 \right) = \overrightarrow{N}_X \cdot \underline{\epsilon} \cdot \overrightarrow{N}_X \quad (2.36)$$

Par exemple, si le vecteur élémentaire est parallèle au premier axe $\overrightarrow{N}_X = \overrightarrow{a}_1$, alors la relation s'écrit $\delta(\frac{\delta}{2} + 1) = \epsilon_{11}$. S'il est parallèle au second, on a $\delta(\frac{\delta}{2} + 1) = \epsilon_{22}$. Enfin, s'il est situé sur la bissectrice de \overrightarrow{a}_1 et \overrightarrow{a}_2 (à 45 degrés), alors $\delta(\frac{\delta}{2} + 1) = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + 2\epsilon_{12})$. Le placement de trois jauges tel que décrit sur la figure suivante permet donc de caractériser toutes les déformations dans le plan des jauges.

2.3.6 Conditions aux limites

Dans les problèmes de mécanique des milieux continus, les solides considérés sont reliés au milieu extérieur par des conditions aux limites. Par exemple, si une partie du solide est encastree, alors il faudra tenir compte dans la

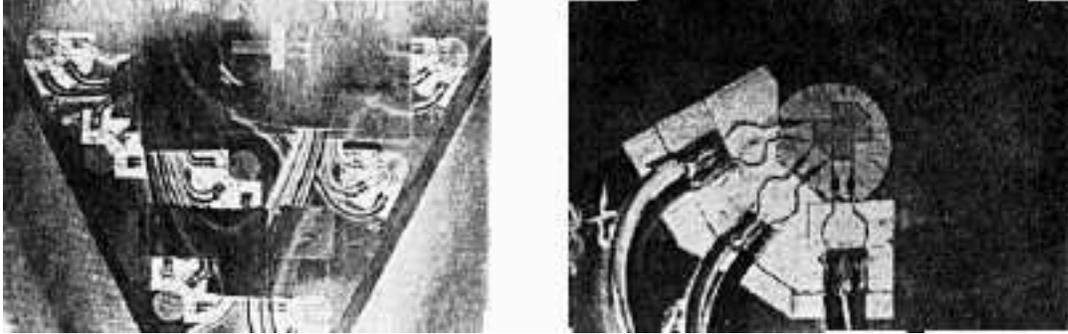


FIG. 2.2 – *Jauges de déformation placées sur un solide à 0, 45 et 90 degrés*

résolution du problème de cet encastrement. D'une façon plus générale, les conditions aux limites agissant sur la cinématique du problème sont formulées en déplacements. On note $\partial\Omega_U$ la partie de la frontière $\partial\Omega$ d'un solide Ω sur laquelle les déplacements sont imposés (au moins partiellement). Les conditions aux limites sont alors dites "en déplacements" et on écrit que :

$$\forall P \in \partial\Omega_U, \vec{u}(P) = \vec{U} \quad (2.37)$$

Parfois, seules certaines composantes de déplacement u_i de \vec{u} sont connues. La condition précédente n'est alors appliquée qu'à ces composantes. Toutefois, nous garderons une expression vectorielle de ces conditions aux limites dans la suite de ce support de cours, afin de ne pas compliquer encore les notations.

2.4 Exercices

Glissement simple

On considère une transformation de glissement simple donnée dans un repère orthonormé par sa description lagrangienne pour $t \geq 0$:

$$x_1 = X_1 + 2\alpha t X_2, x_2 = X_2, x_3 = X_3 \text{ avec } \alpha > 0 \quad (2.38)$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, c'est à dire pour $\alpha t \ll 1$:

- Calculer le tenseur gradient des déplacements, celui des déformations, et celui des rotations de corps solide
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus
- Que se passe-t-il lorsque αt n'est plus petit devant 1 ?

Dans le cas général, c'est-à-dire pour αt quelconque :

- Calculer le tenseur des dilatations
- Calculer les tenseurs des déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi
- Calculer les allongements unitaires et les directions principales de déformation
- Étudier l'évolution de ces directions principales au cours de la transformation

Cisaillement pur

On considère la transformation d'un solide donnée par le champ de déplacements suivant $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dans un repère cartésien (O, X_1, X_2, X_3) :

$$\begin{cases} u_1 = kX_2 \\ u_2 = kX_1 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

où k est une constante positive.

- Calculer le tenseur \underline{E} , gradient de la transformation, ainsi que son déterminant J .
- Calculer les tenseurs de déformation de Green-Lagrange \underline{E} et d'Euler-Almansi \underline{e} .
- Traduire l'hypothèse des petites perturbations par une condition sur la constante k . Montrer que dans cette hypothèse les tenseurs de déformation \underline{E} et \underline{e} coïncident. Exprimer ce tenseur unique en le notant $\underline{\epsilon}$, et en déduire les directions principales de déformation.
- Dessiner l'évolution d'un cube de côté unité selon cette transformation. En déduire de deux façons (géométriquement et par le calcul) la variation de volume.

Compatibilité des déformations

Dans l'hypothèse des petites perturbations, une transformation est donnée par le tenseur gradient des déplacements suivant :

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \alpha X^2 & \beta X_1 X_2 & \beta X_1 X_3 \\ \beta X_2 X_1 & \alpha X^2 & \beta X_2 X_3 \\ \beta X_3 X_1 & \beta X_3 X_2 & \alpha X^2 \end{bmatrix} \text{ avec } X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \quad (2.40)$$

- Donner la condition pour que ce tenseur dérive d'un champ de déplacements
- En déduire une description lagrangienne de cette transformation

Mesure de déformations

A l'aide de trois jauges placées à 0, 45, et 90 degrés de la direction X_1 , les variations relatives de longueur suivantes ont été mesurées successivement à la surface d'une pièce : 0,1, 0,05 et 0,2. En déduire les composantes du tenseur des déformations dans le plan de mesure.

Chapitre 3

CONTRAINTES

3.1 Tenseur des contraintes

3.1.1 Hypothèses de base

Nous considérons un solide Ω en cours de déformation, nous isolons une partie Ω_A de ce solide, et nous analysons les efforts agissant sur cette partie (figure 3.1). Nous sommes donc en configuration eulérienne.

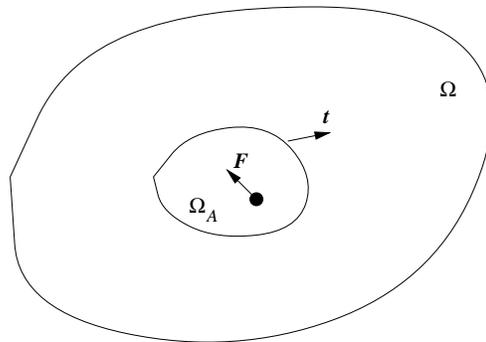


FIG. 3.1 – *Hypothèses de base pour la définition des contraintes*

Du fait de la déformation, le changement de position relative des points matériels fait qu'ils ne sont plus dans leur état d'équilibre primitif (*i.e.* avant déformation). Il en résulte l'apparition de forces qui tendent à faire revenir le corps dans son état d'équilibre. En particulier, les forces agissant sur la partie isolée Ω_A sont :

- celles présentes dans Ω_A , dues au changement de position relative des points matériels
- celles exercées sur Ω_A par le reste du volume, et qui ont provoqué le changement de position relative des points matériels (*i.e.* la déformation) de Ω_A

Les efforts présents dans Ω_A sont représentées par une densité volumique \vec{H} , illustrant les forces et les moments nécessaires pour changer localement les positions relatives des points matériels. Les efforts exercés par le reste du volume pourraient également être représentés par une densité volumique sur $\Omega - \Omega_A$. Mais l'hypothèse fondamentale de la mécanique des milieux continus est que le rayon d'action de ces efforts est suffisamment faible (de l'ordre des distances intermoléculaires) devant notre échelle d'observation (macroscopique) pour que l'on puisse se limiter à leur seule action très proche de la frontière de Ω_A . Il s'en suit que ces efforts sont représentés localement par une densité surfacique de forces \vec{t} et une densité surfacique de moments \vec{c} .

L'hypothèse fondamentale que nous venons d'énoncer conditionne l'échelle d'observation que l'on doit adopter en mécanique des milieux continus. Cette échelle est dite "macroscopique". Un volume élémentaire du solide devra donc contenir suffisamment de matière pour que cette hypothèse soit valable. Par exemple, dans le cas des matériaux cristallins, ce volume devra être largement supérieur au volume d'une maille élémentaire.

Une deuxième hypothèse en mécanique des milieux continus est que la densité surfacique de moments \vec{c} agissant sur la frontière de Ω_A est uniquement celle générée par la densité surfacique de forces \vec{t} , soit $\vec{c} = \vec{t} \wedge \vec{x}$. Ceci signifie que, localement, la structure du matériau ne transmet que des forces d'interaction (par exemple les forces de van der Waals), mais pas de couples. Cette hypothèse fournit le cadre de la mécanique des milieux continus "classiques". Toutefois, il convient de noter ici qu'il existe une théorie des milieux continus dits de "Cosserat", où cette hypothèse n'est pas réalisée [1]. Nous nous limiterons dans ce document aux milieux "classiques".

3.1.2 Théorème de l'action et de la réaction

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème de l'action et de la réaction sur la partie Ω_A du solide Ω :

- les résultantes des forces agissant sur Ω_A se neutralisent :

$$\int_{\Omega_A} \vec{H} dv = \int_{\partial\Omega_A} \vec{t} ds \quad (3.1)$$

– les résultantes des moments agissant sur Ω_A se neutralisent :

$$\int_{\Omega_A} (\vec{H} \wedge \vec{x}) dv = \int_{\partial\Omega_A} (\vec{t} \wedge \vec{x}) ds \quad (3.2)$$

Pour respecter la première condition, le théorème de la divergence nous conduit à définir un tenseur $\underline{\sigma}$ tel que :

$$\vec{H} = \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) \text{ et } \underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} \quad (3.3)$$

où \vec{n} est la normale unitaire sortant de la frontière de Ω_A . Le tenseur $\underline{\sigma}$ ainsi défini est appelé *tenseur des contraintes de Cauchy*, tandis que le vecteur \vec{t} est le *vecteur contrainte*. Ces deux quantités sont homogènes à une densité surfacique de forces, c'est-à-dire à une pression.

Dans la seconde condition, l'application du théorème de la divergence et de la définition du vecteur contrainte et du tenseur des contraintes nous conduit à l'expression suivante du premier membre :

$$\int_{\Omega_A} (\vec{H} \wedge \vec{x}) dv = \int_{\partial\Omega_A} (\vec{t} \wedge \vec{x}) ds - \int_{\Omega_A} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^t) dv \quad (3.4)$$

Le respect de la seconde condition implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy ($\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^t$), qui ne possède donc que six composantes indépendantes.

3.1.3 Signification physique du vecteur contrainte

Isolons maintenant une partie de la frontière de Ω_A sur la figure 3.1. Sur chaque élément de surface $d\vec{s}$, de normale unitaire \vec{n} , au point P , un élément de force $d\vec{f}$ s'exerce (figure 3.2). Cet élément de force rend compte des efforts locaux permettant de respecter la continuité du matériau (forces de cohésion).

Le vecteur contrainte \vec{t} (forces de cohésion par unité de surface) au point P est alors défini par :

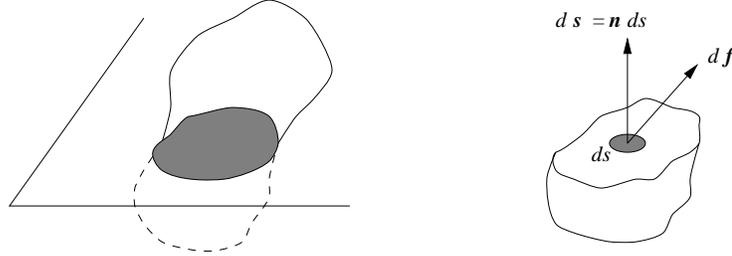


FIG. 3.2 – Forces de cohésion s'appliquant sur un élément de surface

$$\vec{t}(P, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\vec{f}}{ds} \quad (3.5)$$

Un vecteur contrainte n'est donc pas forcément porté par la normale \vec{n} à la surface sur laquelle il s'applique. Nous verrons plus loin que le vecteur contrainte sert aussi à schématiser les sollicitations extérieures appliquées à un solide. Par exemple, il est possible d'appliquer une pression normale ou tangentielle sur une surface. Une pression normale est décrite par un vecteur contrainte porté par la normale à la surface. Une pression tangentielle est décrite par un vecteur contrainte tangent à la surface. L'unité des composantes du vecteur contrainte est donc la même que celle d'une pression (force par unité de surface).

3.1.4 Les autres tenseurs de contraintes

Nous avons vu que le tenseur des contraintes de Cauchy est l'application linéaire qui relie le vecteur contrainte $\vec{t}(P, \vec{n})$ à la normale unitaire \vec{n} de l'élément de surface $d\vec{s}$ situé au point P , soit :

$$\vec{t}(P, \vec{n}) = \underline{\sigma}(P) \cdot \vec{n} \quad (3.6)$$

Ce tenseur est fonction du point P en lequel on se place, mais pas de la facette élémentaire considérée en ce point (normale \vec{n}). Il est important de ne pas confondre le vecteur contrainte \vec{t} et le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, bien que leurs composantes aient la même unité (homogène à une pression).

En notant $d\vec{s} = \vec{n} ds$, les équations 3.5 et 3.6 donnent pour le tenseur des contraintes de Cauchy (nous ne mentionnons pas ici le passage à la limite

pour simplifier les notations) :

$$d\vec{f} = \underline{\sigma}.d\vec{s} \quad (3.7)$$

Dans la suite de ce document, nous utiliserons le tenseur des contraintes de Cauchy, symétrique, pour lequel toutes les grandeurs sont exprimées dans la configuration courante $C(t)$. Il est toutefois important de connaître d'autres tenseurs des contraintes, qui sont parfois utilisés en mécanique. D'après les relations 1.9 et 1.13, on voit en effet que le choix de la configuration du solide dans laquelle seront représentés l'élément de force $d\vec{f}$ d'une part, et l'élément de surface $d\vec{s}$ de normale \vec{n} d'autre part, influera sur le type de contrainte utilisée.

Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

En transportant $d\vec{f}$ et $d\vec{s}$ dans C_0 (avec les notations $d\vec{f}_0$ et $d\vec{S}$), et en utilisant les équations 1.9 (pour le transport de $d\vec{f}$) et 1.13 (pour le transport de $d\vec{s}$), nous obtenons un tenseur des contraintes $\underline{\Pi}$ défini dans C_0 . Ce tenseur des contraintes est appelé tenseur de Piola-Kirchhoff. Il est lagrangien et symétrique :

$$d\vec{f}_0 = \underline{\Pi}.d\vec{S} \text{ avec } \underline{\Pi} = J\underline{F}^{-1}.\underline{\sigma}.\underline{F}^{-1})^t \quad (3.8)$$

Tenseur des contraintes de Piola-Lagrange

En ne transportant maintenant que l'élément de surface (et non l'élément de force), on obtient un nouveau tenseur de contraintes \underline{B} appelé tenseur de Piola-Lagrange (ou de Boussinesq), dans lequel les éléments de force sont représentés dans $C(t)$ et les éléments de surface dans C_0 :

$$d\vec{f} = \underline{B}.d\vec{S} \text{ avec } \underline{B} = J\underline{\sigma}.\underline{F}^{-1})^t \quad (3.9)$$

Ce tenseur n'est ni lagrangien, ni eulérien. Il n'est pas forcément symétrique.

3.2 Signification physique des contraintes

3.2.1 Contraintes normale et tangentielle

Le tenseur des contraintes permet de définir une contrainte normale σ_n et une contrainte tangentielle σ_t s'exerçant sur une facette (figure 3.3).

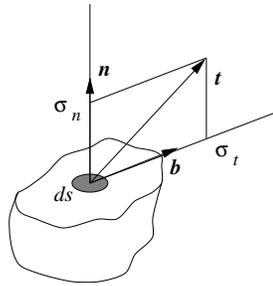


FIG. 3.3 – Contraintes normale et tangentielle

La contrainte normale σ_n est la projection du vecteur contrainte sur la normale à cette facette. Elle s'exprime sous la forme :

$$\sigma_n(M, \vec{n}) = \vec{t}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (3.10)$$

La contrainte tangentielle σ_t s'exerçant sur une facette est la projection du vecteur contrainte sur cette facette, c'est-à-dire sur le plan de normale \vec{n} . Elle peut également être définie comme le complément de la contrainte normale (portée par \vec{n}) dans le vecteur contrainte. En notant \vec{b} le vecteur unitaire du plan de normale \vec{n} portant la contrainte tangentielle, on peut écrire :

$$\sigma_t \vec{b} = \vec{t} - \sigma_n \vec{n} \text{ ou } \sigma_t = \vec{t} \cdot \vec{b} \quad (3.11)$$

Les contraintes normale et tangentielle sont d'une grande importance en mécanique des milieux continus. Elles permettent en particulier de définir les conditions aux limites en pression (contrainte normale sur une face), les conditions d'interface (lois de frottement reliant les contraintes normale et tangentielle), ...

3.2.2 Conditions aux limites en pression

D'une façon générale, des conditions de pression peuvent être appliquées à la frontière d'un solide (zone de chargement, face libre, ...). Ces conditions sont alors dites "aux limites". Elles se traduisent par des relations du type :

$$\underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T} \quad (3.12)$$

où \vec{T} est un vecteur contrainte représentant les pressions imposées sur la surface de normale unitaire \vec{n} . Comme dans le cas des déplacements, il se peut que l'on ne connaisse que certaines composantes du vecteur \vec{T} . La condition porte alors sur ces composantes connues, et pas sur les autres. Dans ce document, pour simplifier, nous utiliserons la notation vectorielle qui suppose que le vecteur \vec{T} est entièrement connu.

3.2.3 Contraintes dans un repère orthonormé

Considérons maintenant un cube dont les arêtes sont portées par les vecteurs de référence d'un système de coordonnées orthonormé (figure 3.4). Il est alors possible de donner une signification plus "physique" aux différentes composantes du tenseur des contraintes.

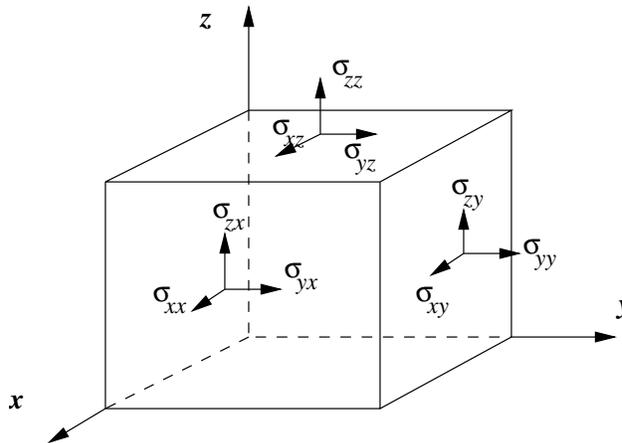


FIG. 3.4 – Contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube

En effet, σ_{xx} représente la contrainte normale appliquée au solide dans la direction \vec{x} , tandis que σ_{xy} et σ_{xz} sont les composantes de la contrainte

tangentielle agissant sur cette même facette. D'une façon plus générale, on voit donc que les composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} sont des contraintes normales tandis que les autres sont des contraintes tangentielles, lorsque l'on raisonne par rapport aux facettes orthogonales aux vecteurs de référence. Par contre, si on considère une facette quelconque de normale unitaire \vec{n} quelconque (l'extrémité de \vec{n} peut être située partout sur la sphère unité), alors les contraintes normale et tangentielle sont obtenues par les équations 3.10 et 3.11. Il sera donc toujours important de savoir par rapport à quel repère on écrit les composantes du tenseur des contraintes.

3.3 Équations d'équilibre

3.3.1 Description globale

Nous considérons un solide de volume Ω , en équilibre sous l'action de pressions extérieures \vec{T} appliquées sur une partie $\partial\Omega_T$ de la surface extérieure $\partial\Omega$ et de déplacements \vec{U}_d imposés sur $\partial\Omega_U$ (figure 3.5). Isolons une partie Ω_A du domaine Ω , soumise à des forces volumiques \vec{f}_v , à des forces d'inertie $\rho\gamma$, mais à aucune distribution de couple. Les forces exercées par le solide environnant $\Omega - \Omega_A$ sont représentées par le vecteur contrainte $\vec{t}(M, \vec{n})$, où \vec{n} est la normale extérieure à la surface frontière $\partial\Omega_A$ de Ω_A au point M .

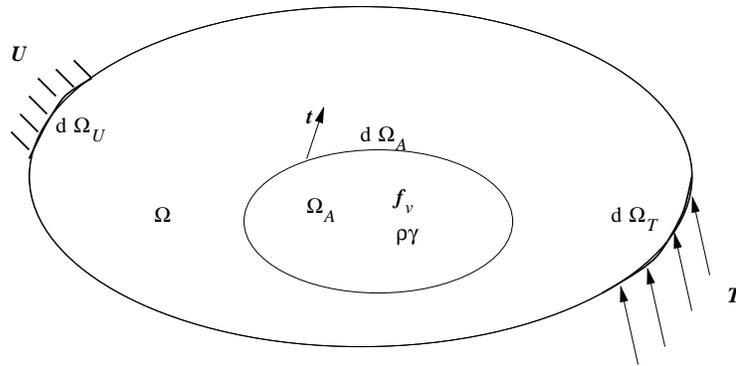


FIG. 3.5 – Description de l'équilibre d'une structure

3.3.2 Équilibre des forces

L'équilibre des forces extérieures ($\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\gamma}$) du domaine Ω_A s'écrit en égalant la somme des forces extérieures agissant sur Ω_A (la densité volumique \vec{f}_v et la densité surfacique \vec{t}) à la variation de quantité de mouvement de cette partie du solide :

$$\int_{\Omega_A} \vec{f}_v(M) dv + \int_{\partial\Omega_A} \vec{t}(M, \vec{n}) ds = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_A} \rho \vec{v} dv \right) = \int_{\Omega_A} \rho \vec{\gamma} dv \quad (3.13)$$

La transformation de Green-Ostrogradsky, ou théorème de la divergence, appliquée au vecteur contrainte dans l'équation précédente donne :

$$\int_{\partial\Omega_A} \vec{t}(M, \vec{n}) ds = \int_{\partial\Omega_A} \underline{\sigma}(M) \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega_A} \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}(M)) dv \quad (3.14)$$

En reportant cette équation dans l'équation globale précédente, on obtient l'intégrale volumique suivante, qui doit être nulle dans tout domaine Ω_A :

$$\int_{\Omega_A} (\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v - \rho \vec{\gamma}) dv = 0 \quad (3.15)$$

Il s'en suit que la quantité intégrée doit être nulle dans le domaine Ω , ce qui fournit l'équation locale de la dynamique :

$$\forall M \in \Omega, \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma} \quad (3.16)$$

3.3.3 Équilibre des moments

L'équilibre des moments autour des axes passant par un point M_0 du domaine Ω_A de la figure 3.5 ($\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ext} // M_0) = 0$) s'écrit :

$$\int_{\Omega_A} \vec{M}_0 \vec{M} \wedge \vec{f}_v(M) dv + \int_{\partial\Omega_A} \vec{M}_0 \vec{M} \wedge \vec{t}(M, \vec{n}) ds = \int_{\Omega_A} \vec{M}_0 \vec{M} \wedge \rho \vec{\gamma} dv \quad (3.17)$$

En appliquant le théorème de la divergence sur l'intégrale de surface de cette équation, on obtient à nouveau une intégrale volumique globale sur le domaine Ω_A , qui doit s'annuler pour tout domaine Ω_A :

$$\int_{\Omega_A} \left[\vec{M}_0 \vec{M} \wedge (\vec{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v - \rho \vec{\gamma}) + \begin{Bmatrix} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{Bmatrix} \right] dv = \vec{0} \quad (3.18)$$

La quantité intégrée doit donc être nulle dans le domaine Ω . En tenant compte de l'équation locale de la dynamique, cette condition d'équilibre des moments conduit à nouveau à la symétrie du tenseur des contraintes, qui ne possède donc que six composantes indépendantes (comme le tenseur des déformations).

3.4 Utilisation du tenseur des contraintes

3.4.1 Contraintes principales

Le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. Il est donc diagonalisable dans un repère orthonormé. Dans ce repère, dit principal, les trois valeurs propres du tenseur des contraintes sont souvent notées σ_I , σ_{II} et σ_{III} . Ce sont les contraintes principales du tenseur $\underline{\sigma}$. Dans le repère principal, le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Il est constitué de trois contraintes normales appliquées sur les facettes orthogonales aux directions du repère principal.

3.4.2 Contrainte moyenne et déviateur

Il est courant de décomposer le tenseur des contraintes de Cauchy en une partie dite sphérique et une partie dite déviatorique sous la forme :

$$\underline{\sigma} = \underline{S} + \sigma_m \underline{I} \text{ avec } \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) \quad (3.20)$$

où \underline{I} est le tenseur identité. σ_m est appelée contrainte moyenne et \underline{S} le tenseur déviateur des contraintes. On peut remarquer que le tenseur déviateur des contraintes \underline{S} est symétrique et de trace nulle.

3.4.3 Contraintes équivalentes

Il est très intéressant, en résistance des matériaux, de comparer les contraintes obtenues sur une structure (après mesures ou par le calcul) aux caractéristiques du ou des matériaux qui la constituent. Pour cela, il est commode d'utiliser des scalaires représentatifs du tenseur des contraintes, qui sont indépendants du repère dans lequel on travaille. Comme tout tenseur euclidien de dimension 2 dans un espace de dimension 3, le tenseur déviateur des contraintes de Cauchy possède trois invariants souvent notés J_1 , J_2 et J_3 qui sont :

$$\begin{cases} J_1 = \text{tr}(\underline{S}) = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{S} \cdot \underline{S}) \\ J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{S} \cdot \underline{S} \cdot \underline{S}) \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans le cas du tenseur des contraintes (et non du déviateur), ces invariants sont notés I_1 , I_2 et I_3 :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\underline{\sigma}) \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}) \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}) \end{cases} \quad (3.22)$$

Un scalaire représentatif du tenseur des contraintes, et indépendant du repère, est appelé contrainte équivalente. Il est souvent noté $\bar{\sigma}$. Il sert à comparer les contraintes dans la structure étudiée aux caractéristiques du matériau (par exemple sa limite d'élasticité). Les deux contraintes équivalentes les plus utilisées sont celles de von Mises et de Tresca.

La contrainte équivalente de von Mises

La contrainte équivalente de von Mises est fonction uniquement du second invariant du déviateur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (3.23)$$

Dans un repère orthonormé, elle s'écrit directement en fonction des composantes du déviateur ou du tenseur des contraintes sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} S_{ij} S_{ji}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{ji} - \frac{1}{2} \left(\sum_k \sigma_{kk} \right)^2} \quad (3.24)$$

La contrainte équivalente de Tresca

La contrainte équivalente de Tresca est définie en fonction des contraintes principales sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \text{Sup}(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|) \quad (3.25)$$

Elle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir s'écrire simplement en fonction des composantes du tenseur des contraintes. Pour l'obtenir, il faut diagonaliser ce tenseur. Dans un programme numérique, son estimation est donc plus coûteuse que celle de la contrainte équivalente de von Mises.

3.5 Exercices

Cission octaédrique

Calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle appliquées sur la facette dont la normale est la trissectrice du repère principal des contraintes. Comparer ces contraintes aux invariants et aux contraintes équivalentes.

La contrainte équivalente de von Mises est souvent appelée "cission octaédrique". Pourquoi ?

Cercles de Mohr

On se place dans le repère des contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} . On considère une facette de normale \vec{n} (de composantes n_1 , n_2 et n_3). On note respectivement σ_n et σ_t les contraintes normale et tangentielle appliquées sur cette facette. Écrire de deux façons, en fonction des contraintes principales, des contraintes normale et tangentielle, et de n_1 , n_2 et n_3 :

- la norme au carré du vecteur contrainte appliqué sur cette facette
- la contrainte normale appliquée sur cette facette
- la norme au carré de \vec{n}

En déduire l'ensemble des états de contraintes admissibles, et les représenter dans le plan (σ_n, σ_t) .

Traction uniaxiale

Lors d'un essai de traction uniaxiale selon l'axe X_3 , le tenseur des contraintes de Cauchy peut s'écrire de la façon suivante :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

où σ est la "contrainte de traction".

- Calculer les contraintes équivalentes de von Mises et de Tresca
- En utilisant deux méthodes (cercles de Mohr et vecteur contrainte), trouver les facettes de cisaillement maximum lors de cette essai

Construction d'un pilier de pont

Un viaduc autoroutier est en train de se construire sur la N88, au-dessus de la vallée du Viaur séparant les départements du Tarn (81) et de l'Aveyron (12). On vous demande de dimensionner les piliers de cet ouvrage d'art, avec pour chacun d'eux le cahier des charges suivant :

- hypothèse des petites perturbations
- poids propre de la structure non négligeable
- forme de révolution

- rayon supérieur fixé (noté r_0)
- hauteur totale fixée (notée H)
- pression verticale appliquée de la part du tablier du pont (notée P)

Calculer la forme des piliers, en fonction de H , P et r_0 , afin que la pression dans le pilier soit constante sur toutes les sections.

Le béton utilisé a une masse volumique de $2500\text{kg}/\text{m}^3$. Le pilier considéré a une hauteur de 100m , et un rayon supérieur de 10m . La pression P vaut 5MPa .

Calculer le rayon de la base R_0 .

Chapitre 4

ÉLASTICITÉ

4.1 Historique

4.1.1 Résistance des solides

Il semble que les premières analyses mathématiques de la résistance des solides à la rupture aient été faites par Galilée (1564-1642) dans son ouvrage "Discorsi e Dimostrazioni matematiche" publié en 1638 (figure 4.1).

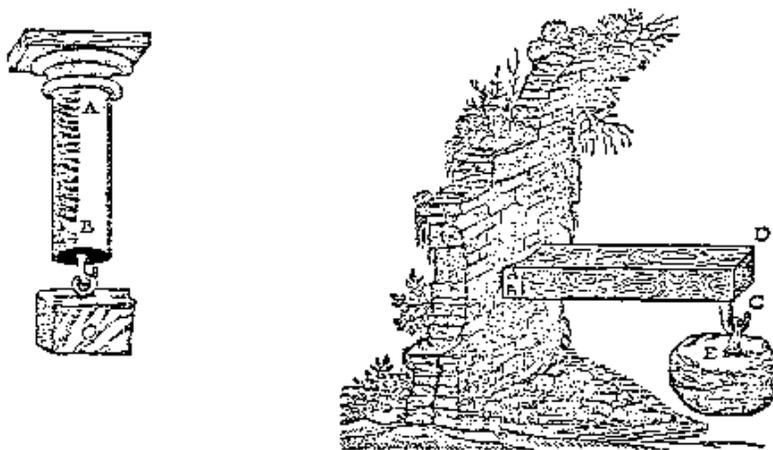


FIG. 4.1 – Dessins de Galilée pour illustrer l'essai de traction et l'essai de flexion

4.1.2 Relation contrainte-déformation

En Angleterre et en France, à la fin du 17^{ème} siècle, Hooke et Mariotte découvraient presque simultanément la relation entre déformations et contraintes en élasticité. Vers 1660, Hooke découvrit la loi entre l'allongement d'un ressort et la force qui lui est appliquée (figure 4.2). En fait, Hooke n'appliqua pas ses idées au problème de la flexion des poutres entrevu par Galilée (figure 4.1). C'est Mariotte qui, en 1680, publia la même loi et expliqua la différence entre fibres tendues et fibres comprimées dans une poutre en flexion. Ce n'est qu'en 1807 que Young (1773-1829) introduisit la notion de module d'élasticité.

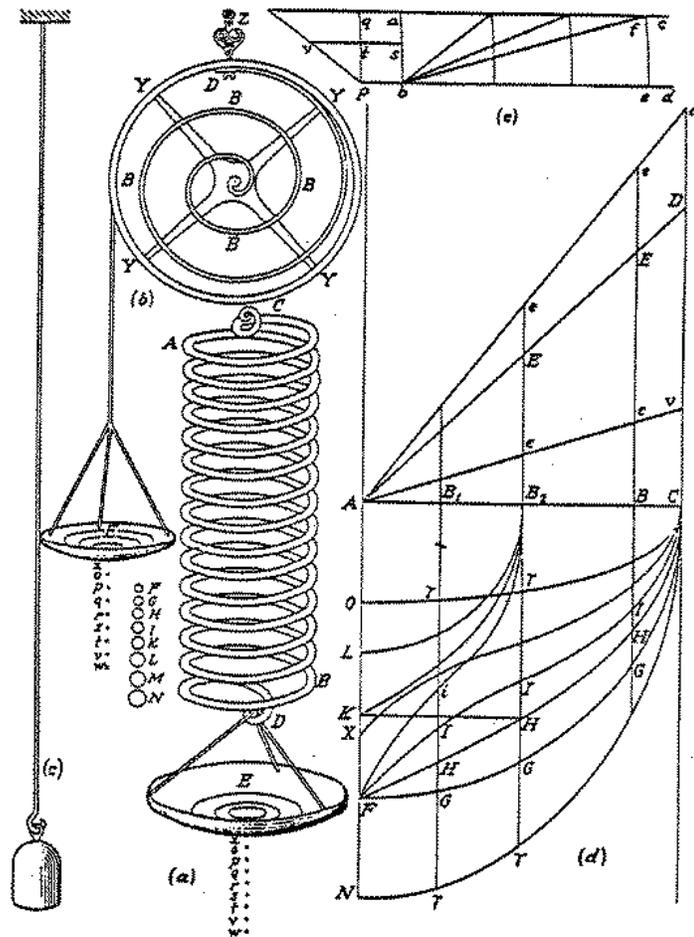


FIG. 4.2 – Schémas dus à Hooke et décrivant ses expériences

4.2 L'essai de traction

4.2.1 Courbe force-allongement

L'essai de traction est le test le plus couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau, et donc établir sa "loi de comportement". Cet essai consiste le plus souvent à soumettre une éprouvette (ou plus exactement une partie dite "utile" de l'éprouvette) à un allongement Δl par déplacement relatif de ses extrémités, et à mesurer la force F nécessaire à cet allongement. Une représentation schématique de l'essai de traction est donnée sur la figure 4.3. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement à la partie OA (déformation élastique) de la courbe "force-allongement". Les parties AB (déformation plastique homogène) et BC (déformation plastique localisée) n'entrent pas dans le cadre de ce cours. Nous nous plaçons de plus dans ce paragraphe dans le cas d'un matériau "isotrope", c'est-à-dire qui possède les mêmes propriétés dans toutes les directions.

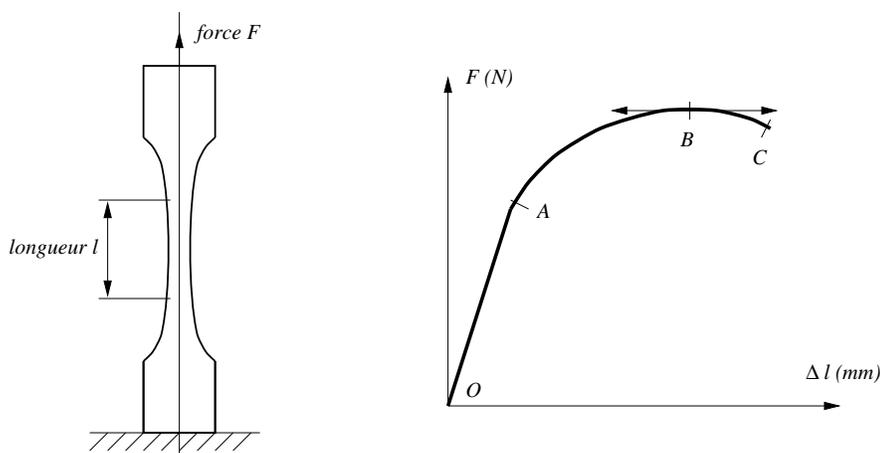


FIG. 4.3 – Représentation schématique d'un essai de traction

4.2.2 Courbe contrainte-déformation

Analysons les efforts appliqués à la partie utile de l'éprouvette de la figure 4.3 pour la déformer. Pour cela, nous nous plaçons dans un repère orthonormé. En choisissant l'axe \vec{x}_3 comme axe de traction, et en notant S la section de la partie utile, on constate que le vecteur contrainte appliqué sur la surface

normale à cet axe est parallèle à cet axe et vaut $\frac{F}{S}\vec{x}_3$. Les vecteurs contraintes appliqués sur les autres surfaces étant nuls, il s'en suit que le tenseur des contraintes de Cauchy vaut :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{S} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Analysons maintenant la cinématique de la transformation. Si α est la vitesse de déplacement de la partie supérieure de l'éprouvette (l'autre restant fixe), et si β est sa vitesse de rétrécissement supposée identique dans les deux autres directions, alors la description lagrangienne du mouvement donne dans un repère cartésien :

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) \text{ avec } \vec{\Phi}(\vec{X}, t) = \begin{cases} X_1(1 - \beta t) \\ X_2(1 - \beta t) \\ X_3(1 + \alpha t) \end{cases} \quad (4.2)$$

On en déduit facilement le tenseur gradient de la transformation (diagonal), le tenseur des dilatations (également diagonal, ce qui signifie que les axes principaux du solide restent fixes), et enfin les tenseurs de déformation de Green-Lagrange \vec{E} et d'Euler-Almansi \vec{e} sous la forme :

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} -\beta - \frac{1}{2}\beta^2 t^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta - \frac{1}{2}\beta^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\underline{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{(1-\beta t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{(1-\beta t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

L'utilisation du tenseur gradient de la transformation permet également d'écrire le tenseur gradient des vitesses de déplacement qui, symétrique, est identique au tenseur des vitesses de déformation d'Euler (la vitesse de rotation de corps solide est nulle). L'intégration dans la temps s'avère ici possible car les composantes de la vitesse de déformation ne dépendent pas de la coordonnée du point. On obtient alors un tenseur des déformations sous la forme :

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \ln(1 - \beta t) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1 - \beta t) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1 + \alpha t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

En utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations d'Euler, on peut donc déduire la courbe $\sigma_{33} - \epsilon_{33}$ de la courbe $F - \Delta l$. L'allure de cette courbe est donnée sur le figure 4.4. Elle est appelée "courbe rationnelle".

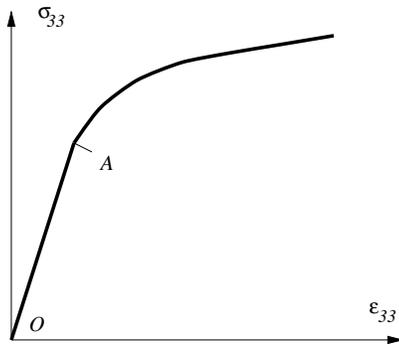


FIG. 4.4 – Courbe rationnelle de traction

En utilisant la condition aux limites $x_3 = l_0 + \Delta l$ en $X_3 = l_0$ (longueur initiale de l'éprouvette), on peut exprimer αt sous la forme $\frac{\Delta l}{l_0}$. L'abscisse de la courbe rationnelle de traction est donc obtenue directement à partir de l'allongement Δl et de la longueur initiale l_0 sous la forme :

$$\epsilon_{33} = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) \quad (4.6)$$

Par contre, pour obtenir l'ordonnée, c'est-à-dire la contrainte appliquée σ_{33} , il faut déterminer la section courante S de l'éprouvette. Ceci peut se faire par exemple en mesurant le rétrécissement dans une direction. Toutefois, cette mesure s'avère souvent délicate. Pour expliciter cette contrainte appliquée, nous allons nous limiter au domaine d'élasticité.

4.2.3 Domaine d'élasticité

Le domaine de l'élasticité linéaire OA de la courbe 4.4 est caractérisé par :

- une relation de proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation de l'éprouvette dans sa partie utile,
- une réversibilité de la déformation (si on relâche la force, l'éprouvette revient dans son état initial).

Dans le cas de l'essai de traction, la relation de proportionnalité peut s'écrire entre les composantes de la courbe rationnelle sous la forme :

$$\sigma_{33} = E\epsilon_{33} \quad (4.7)$$

La constante de proportionnalité E de la relation précédente est appelée module d'Young. Il s'agit de la pente de la courbe rationnelle dans le domaine d'élasticité. La relation elle-même est appelée loi de Hooke. On remarque que l'unité du module d'Young E est la même que celle d'une contrainte, c'est-à-dire celle d'une pression (force par unité de surface). En effet, les déformations sont sans unités. L'unité SI (Système International) d'une pression est le Pascal (Pa), qui vaut 1 Newton par mètre carré. Mais on rencontre souvent d'autres unités pour représenter les contraintes et le module d'Young qui sont :

le MPa (méga-Pascal)	$\rightarrow 1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$
le GPa (giga-Pascal)	$\rightarrow 1GPa = 10^9 Pa$
le kgf/mm^2	$\rightarrow 1kgf/mm^2 = 9,81N/mm^2$
le psi (pounds per square inch)	$\rightarrow 1psi = 6,895.10^3 Pa$

Nous avons vu que la section S de l'éprouvette de traction jouait un rôle dans le passage de la force appliquée F à la contrainte de Cauchy. En fait, cette section évolue par l'intermédiaire des déformations qui ont lieu perpendiculairement à l'axe de traction. Ainsi, selon les axes X_1 et X_2 , on constate que la déformation est donnée par :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{33} \quad (4.8)$$

où ν est appelé coefficient de Poisson (1781-1840). Les tenseurs $\vec{\sigma}$ et $\vec{\epsilon}$ ont donc la forme suivante dans un essai de traction sur un matériau isotrope élastique :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{33} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{\epsilon} = \epsilon_{33} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Notons enfin que la contrainte limite du domaine d'élasticité d'un matériau, représentée par l'ordonnée du point A de la figure 4.4, est appelée limite d'élasticité. Cette limite est d'une grande importance en résistance des matériaux. En effet, le dimensionnement des structures est souvent réalisé par rapport à cette valeur, à partir de laquelle il se produit une déformation plastique (irréversible) du matériau. Le lecteur pourra d'ailleurs remarquer que, dans le cas d'un essai de traction, la contrainte σ_{33} (ordonnée de la courbe) coïncide avec les contraintes équivalentes de von Mises et de Tresca.

4.2.4 Exemples

La figure 4.5 donne le module d'Young (en GPa) et le coefficient de Poisson (sans unité) de différents matériaux à différentes températures. On constate que le coefficient de Poisson est souvent voisin de 0,3. Si on calcule l'augmentation relative de volume du matériau en cours de traction (par la trace du tenseur des déformations), on remarque qu'elle vaut $(1 - 2\nu)\epsilon_{33}$. Dans un essai de traction, le matériau s'allonge et augmente généralement son volume dans le domaine d'élasticité.

4.3 Loi de comportement élastique linéaire

4.3.1 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est donc aujourd'hui souvent écrite sous la forme :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\epsilon} \quad (4.10)$$

où $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité (les composantes covariantes de ce tenseur sont C_{ijkl}). Le ten-

matériau	température (degré C)	module d'Young (<i>GPa</i>)	coefficient de Poisson
Alliage d'aluminium AU4G	20	72	0,32
	200	66	0,325
	500	50	0,35
Alliage de titane Ti 4Al 4Mn	20	315	0,34
	200	115	0,34
Acier XC10	20	216	0,29
	200	205	0,30
	600	170	0,315
Fonte grise	20	100	0,29
Acier inoxydable austénitique 316	20	196	0,3
	200	170	
	700	131	
Aluminium (A5)	20	68	0,33
Bronze	20	130	0,34
	180	61	
Plexiglass	20	2,9	0,4
Araldite	20	3	0,4
Caoutchouc	20	0,002	0,5
verre-epoxy (sens long)	20	19	0,3
carbone-epoxy (sens long)	20	87,6	0,32
Béton	20	30	0,2
Granit	20	60	0,27
Pin sylvestre (sens long)	20	17	0,45
Pin sylvestre (sens trans.)	20	1	

FIG. 4.5 – *exemples de caractéristiques élastiques*

seur des rigidités fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (4.11)$$

où $\underline{\underline{S}}$ est le tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques du matériau (ses composantes covariantes sont S_{ijkl}).

Les tenseurs $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{S}}$ ont a priori 81 composantes (chaque indice varie de 1 à 3). Toutefois, nous avons vu que les tenseurs des contraintes de Cauchy et des déformations sont symétriques. Ils n'ont donc chacun que 6 composantes indépendantes, et leur liaison linéaire peut alors être réalisée à l'aide de 36 termes seulement. La forme suivante est souvent utilisée, dans un repère orthonormé, pour relier les composantes des contraintes et des déformations :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

avec la condition $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk}$. Les composantes de la matrice présente dans la relation précédente sont souvent notées C_{IJ} , avec I et J variant de 1 à 6.

4.3.2 Énergie de déformation élastique

Nous avons jusqu'à présent utilisé la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, ainsi que leur relation linéaire via la loi de Hooke. Nous pouvons maintenant utiliser l'autre caractéristique de la déformation élastique, qui est sa réversibilité. Considérons donc un solide Ω , et isolons un sous-domaine Ω_A soumis à des forces volumiques \vec{f}_v , et à un vecteur contrainte \vec{t} sur sa frontière (pas de forces d'accélération, figure 4.6).

Nous nous intéressons à une transformation élémentaire associée aux efforts appliqués sur le sous-domaine Ω_A . Cette transformation élémentaire

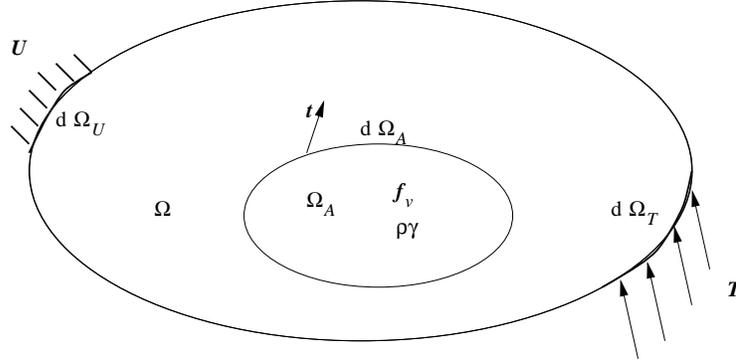


FIG. 4.6 – Solide en cours de transformation

réversible sera caractérisée par un vecteur déplacement $\delta \vec{u}$, et une énergie interne dE sous la forme :

$$dE = \delta W + \delta Q \text{ avec } \begin{cases} \delta W = \int_{\partial \Omega_A} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} ds + \int_{\Omega_A} \vec{f}_v \cdot \delta \vec{u} ds \\ \delta Q = T dS \end{cases} \quad (4.13)$$

où T est la température absolue et S l'entropie. Toutefois le terme δW peut être modifié comme suit, en utilisant le théorème de la divergence, le fait que le système est en équilibre, et la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\delta W = \int_{\Omega_A} \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon} dv \quad (4.14)$$

Il est donc possible d'écrire l'énergie interne par unité de volume dans le solide de sous la forme $de = \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon} + T ds$. La température est dans notre cas constante (pas d'échange de chaleur entre Ω_A et l'extérieur). De plus, e et s sont des fonctions d'état, de sorte que de et ds sont des différentielles totales. Le travail δw s'écrit donc sous la forme :

$$\delta w = de - T ds = d(e - Ts) = dw = \underline{\sigma} : d\underline{\epsilon} \quad (4.15)$$

On peut en déduire que :

$$\frac{\partial w}{\partial \underline{\epsilon}} = \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\epsilon}, \text{ d'où } \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{\epsilon} \partial \underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \quad (4.16)$$

L'énergie de déformation par unité de volume est finalement la forme quadratique définie positive suivante :

$$w = \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.17)$$

Les relations précédentes se traduisent par le fait que la matrice 6x6 de l'équation 4.12 est symétrique et définie positive. Cette matrice ne possède donc que 6x7/2=21 composantes indépendantes. Le tenseur des rigidités élastiques $\underline{\underline{C}}$ ne possède donc que 21 composantes indépendantes dans le cas le plus général. Un raisonnement analogue nous aurait conduit au même résultat pour le tenseur des compliances $\underline{\underline{S}}$, qui ne possède aussi que 21 composantes indépendantes.

4.3.3 Relations de symétrie

En pratique, les matériaux possèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Les principaux cas rencontrés sont l'orthotropie (symétrie par rapport à trois plans orthogonaux), qui réduit le nombre de composantes à 9 (c'est le cas par exemple du bois et des cristaux orthorhombiques), la symétrie cubique (orthotropie avec des propriétés identiques dans les trois directions orthogonales aux plans de symétrie), qui réduit le nombre de composantes à 3 (c'est la cas de la structure de nombreux métaux), et l'isotropie (mêmes propriétés dans toutes les directions), qui réduit le nombre de composantes à 2 (cette hypothèse est largement utilisée en mécanique des milieux continus, pour les matériaux courants).

Symétrie cubique

Dans le cas de la symétrie cubique, les trois composantes indépendantes de $\underline{\underline{C}}$ sont souvent notées $C_{11}(= C_{1111})$, $C_{12}(= C_{1122})$ et $C_{44}(= C_{2323})$. Des notations identiques pour $\underline{\underline{S}}$ conduisent aux relations suivantes :

Material	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	C_{11}	C_{44}	C_{12}
Ag	22.58	21.68	-9.83	124.0	46.1	93.4
Ag	22.2	22.3	-9.93	120.0	43.6	89.7
Ag-Au (25 At. % Au)	20.7	20.5	-8.91	—	—	—
Ag-Au (50 At. % Au)	19.7	19.7	-8.52	—	—	—
Ag-Au (75 At. % Au)	20.5	20.6	-7.09	—	—	—
Ag-Cd (1.34 At. % Cd)	23.07	21.69	-9.91	122.3	46.1	92.5
Ag-Cd (1.9 At. % Cd)	23.10	21.77	-9.91	121.6	45.9	91.3
Ag-In (8.36 At. % In)	25.1	22.20	-10.95	156.6	45.0	89.0
Ag-Ng (3.97 At. % Mg)	22.37	21.74	-10.01	119.3	46.0	89.8
Ag-Ng (7.33 At. % Mg)	23.94	22.10	-10.24	115.9	45.2	86.6
Ag-Pd (6.25 At. % Pd)	21.95	20.79	-9.40	127.7	48.1	95.3
Ag-Sn (1.17 At. % Sn)	24.29	21.83	-10.31	121.0	45.8	92.2
Ag-Zn (2.4 At. % Zn)	22.89	21.85	-10.30	120.9	45.8	91.6
Ag-Zn (2.53 At. % Zn)	23.54	21.68	-10.18	122.0	46.1	93.3
Al	17.40	15.1	-5.6	105.6	28.5	63.9
Al	15.7	14.9	-5.8	112.0	27.9	66.0
Al-Cu (5% Cu)	15.0	17.0	-6.9	96.1	27.1	142.2
Al-Sb (50 At. % Sb)	—	—	—	59.4	41.5	44.2
Au	23.2	23.8	-10.7	136.0	42.0	157.0
Au-Cd (47.5 At. % Cd)	112.4	23.63	-54.46	—	—	—
Au-Cd (50 At. % Cd)	89.2	22.75	-42.75	—	—	—
Cu	14.95	13.23	-6.28	171.0	75.6	124.0
Cu	15.3	13.5	-6.3	170.0	64.5	124.0
Cu	15.0	13.26	-6.3	168.0	75.4	121.0
Cu-Al (4.81 At. % Al)	15.80	13.25	-6.73	165.3	74.9	121.6
Cu-Al (9.98 At. % Al)	16.75	13.05	-7.11	159.5	76.6	117.6
Cu-Au (23 At. % Au)	13.4	15.1	-5.65	225.0	66.2	173.0
Cu-Ga (1.28 At. % Ga)	13.38	13.46	-6.45	165.0	74.0	118.2
Cu-Ga (4.15 At. % Ga)	13.91	13.50	-6.73	163.2	74.1	121.0
Cu-Ge (1.03 At. % Ge)	15.44	13.33	-6.50	166.6	75.0	121.0
Cu-Ge (1.71 At. % Ge)	15.72	13.35	-6.60	163.1	75.0	118.2
Cu-Si (4.17 At. % Si)	16.10	13.37	-6.85	167.5	74.8	124.2
Cu-Si (5.16 At. % Si)	16.71	13.35	-7.10	160.8	74.9	118.8
Cu-Si (7.69 At. % Si)	17.72	13.30	-7.66	165.5	74.1	126.4
Cu-Zn (4.59 At. % Zn)	15.91	13.48	-6.71	163.4	74.2	119.2
Cu-Zn (7.0% Zn)	19.4	13.9	-8.35	147.0	72.0	111.0
Cu-Zn (51.1 At. % Zn)	16.4	12.2	-6.8	127.9	52.2	109.1
Cu-Zn (55.1 At. % Zn)	41.03	13.44	-18.98	119.0	74.0	102.0
Fe	7.37	8.62	-2.82	237.0	116.0	141.9
Ga-Au (50 At. % Au)	126.4	186.0	-42.34	119.2	53.3	59.9
Ga-Sb (50 At. % Sb)	15.3	23.1	-4.96	38.1	43.3	40.4
Ge (20 °C)	8.78	14.90	-2.66	120.9	59.1	48.3
Ge (122 °C)	9.68	14.94	-2.70	131.6	58.9	50.9
In-Sb (50 At. % Sb)	24.2	23.1	-8.55	87.2	30.2	56.7
K	323.0	380.0	-170.0	4.59	2.63	1.72
Li (78 K)	295.0	92.0	-135.0	14.8	19.8	12.5
Mg	2.50	9.10	-0.78	255.0	110.0	176.0
Na (210 K)	550.0	203.7	-133.0	5.55	4.25	4.91
Nb	—	—	—	192.0	56.5	134.0
Ni (nonmagnétisé)	7.69	8.36	-2.92	243.6	119.6	149.4
Ni (magnétisé)	7.67	8.24	-2.95	251.0	121.3	157.1
Ni (magnétisé)	7.50	8.16	-2.86	242.6	122.8	156.1
Ni (magnétisé)	7.21	8.08	-2.73	242.8	123.8	152.0
Pb	93.0	69.4	-42.6	48.3	14.4	40.4
Pd	—	—	—	225.6	71.3	175.1
Si	7.65	11.9	-2.16	168	84.0	86.0
Ta	—	—	—	265.0	83.1	159.0
Tb	27.2	26.9	-10.7	75.3	47.8	48.9
V	—	—	—	229.0	43.8	117.0
W	2.573	6.45	-0.729	501.0	151.0	198.0

FIG. 4.7 – Rigidités et compliances de différents métaux cubiques

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Le tableau 4.7 donne des valeurs pour ces coefficients dans le cas de métaux dont la maille élémentaire est à symétrie cubique. Les compliances sont en TPa^{-1} , soit $10^{-12}Pa^{-1}$. Les rigidités sont en GPa , soit 10^9Pa .

Isotropie

Dans le cas isotrope, le nombre de coefficients est réduit à deux par la relation $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$. Il existe plusieurs façon d'exprimer ces coefficients. On peut par exemple choisir ceux de Lamé $\lambda = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})$ et $\mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$, ou le module d'Young $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ et le coefficient de Poisson $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ vus dans le cas de l'essai de traction. La loi de comportement élastique linéaire s'écrit dans le cas isotrope de la façon suivante :

$$\underline{\sigma} = 2\mu\underline{\epsilon} + \lambda tr(\underline{\epsilon})\underline{I} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\underline{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} tr(\underline{\epsilon})\underline{I} \right) \quad (4.20)$$

et dans le sens inverse :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \underline{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} tr(\underline{\sigma})\underline{I} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} tr(\underline{\sigma})\underline{I} \quad (4.21)$$

où \underline{I} est le tenseur identité.

Notons enfin que le module de compression hydrostatique K est également utilisé. Il relie la partie hydrostatique de la déformation ($\epsilon_H = tr(\underline{\epsilon})$) à la contrainte hydrostatique ($\sigma_H = tr(\underline{\sigma})$). Il peut être exprimé en fonction des coefficients de Lamé ou en fonction de E et ν sous la forme :

$$K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu} \quad (4.22)$$

4.3.4 Thermo-élasticité linéaire

Les matériaux sont souvent soumis à des chargements thermiques qui ont pour effet de dilater les structures. Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à la variation de température ΔT , par le coefficient de dilatation thermique α :

$$\underline{\epsilon}^{th} = \alpha \Delta T \underline{I} \quad (4.23)$$

Lorsque la structure n'est pas liée mécaniquement à l'extérieur, alors ce champ de déformation thermique ne générera pas de contraintes s'il vérifie les équations de compatibilité. On montre qu'une telle condition impose un champ de températures linéaire dans la structure. Dans le cas contraire, ou si la structure est liée mécaniquement à l'extérieur (on parle alors de dilatation contrariée), alors des contraintes seront générées dans le solide.

Par exemple, lorsque l'on chauffe de façon homogène une barre de métal, celle-ci se dilate sans qu'il y ait création de contraintes à l'intérieur. Par contre, si on impose à celle-ci de garder la même longueur, alors une contrainte de compression sera créée dans la barre pour respecter cette condition. Une autre façon de créer des contraintes dans la barre est de la chauffer de façon non homogène. Par exemple, lors d'un chauffage par induction à haute fréquence, le diamètre extérieur de la barre est plus dilaté que le centre. La partie extérieure de la barre sera donc mise en compression par la partie intérieure.

D'une façon plus générale, lors d'une sollicitation dite "thermo-mécanique", les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations mécaniques, elles-même reliées aux contraintes par la loi de comportement du matériau. Dans le cas élastique linéaire isotrope, on obtient une relation entre les déformations et les contraintes sous la forme :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma} + \left(\alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} tr(\underline{\sigma}) \right) \underline{I} \quad (4.24)$$

L'inversion de cette relation nous fournit la loi de comportement dite "thermo-élastique" du matériau :

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\underline{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} tr(\underline{\epsilon}) \underline{I} \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \Delta T \underline{I} \quad (4.25)$$

4.4 Exercices

Contraintes planes - Déformations planes

Nous travaillons ici dans un système de coordonnées cartésien (O, x_1, x_2, x_3) , dans l'hypothèse des petites perturbations, et avec une loi de comportement élastique linéaire isotrope donnée par les coefficients E (module d'Young) et ν (coefficient de Poisson).

- l'hypothèse des déformations planes revient à supposer un champ de déplacements $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

En déduire la forme du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$ et celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$. Faire un dessin illustrant cette hypothèse et expliquer l'expression obtenue pour le terme σ_{33} .

- l'hypothèse des contraintes planes revient à supposer un vecteur contrainte nul sur la surface de normale x_3 . En déduire la forme du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$ et celle du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$. Faire un dessin illustrant cette hypothèse et expliquer l'expression obtenue pour ϵ_{33} .
- Nous désirons analyser le comportement mécanique d'une tôle épaisse sollicitée dans son plan. Pour simplifier les calculs, nous souhaitons schématiser ce comportement à l'aide de deux zones : le plan moyen de la tôle (zone 1) et sa surface supérieure (zone 2). Déterminer en le justifiant quelle zone sera plutôt en contrainte plane, et quelle zone subira plutôt une déformation plane.

Torsion d'un barreau élastique

On considère un cylindre plein, de rayon R , d'axe Oz , et de hauteur H . On note r, θ, z les coordonnées cylindriques que nous utiliserons pour traiter le problème. Le matériau est supposé avoir un comportement élastique isotrope. La face inférieure ($z = 0$) du cylindre est fixe. La surface latérale est libre. La surface supérieure ($z = H$) subit un couple de torsion C , ce qui entraîne une rotation d'angle α de celle-ci.

- En supposant que chaque tranche horizontale du cylindre reste dans le même plan, écrire de quelles coordonnées r, θ ou z dépendent les compo-

- santes u , v et w du déplacement de chaque point du cylindre. En déduire une expression simplifiée du tenseur gradient des déplacements \underline{d} , puis du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$. En utilisant les coefficients de Lamé λ et μ , exprimer ensuite le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$.
- Écrire le système d'équations correspondant à l'équilibre statique local du cylindre. En supposant $v(r, z)$ linéaire en r et en z , intégrer les équations obtenues pour obtenir une expression de $v(r, z)$. Appliquer ensuite les conditions aux limites en déplacements pour déterminer les constantes.
 - En écrivant la condition aux limites en contraintes (couple C), donner la relation entre ce couple et l'angle de rotation α de la face supérieure. En déduire l'évolution de la contrainte équivalente de von Mises en fonction de ce couple dans le cylindre. Lors d'un essai, on souhaite que cette contrainte équivalente ne dépasse pas 200MPa , pour éviter une déformation irréversible (plastification) du cylindre. Calculer le rayon maximum du cylindre utilisable pour un couple appliqué $C = 100\text{Nm}$.

Chapitre 5

MÉTHODES SEMI-INVERSES

5.1 Bilan

5.1.1 Nombre d'inconnues, nombre d'équations

En élasticité linéaire, et dans l'hypothèse des petites perturbations, le nombre d'inconnues dans un problème de mécanique des milieux continus est égal à 15. En effet, l'objectif est de déterminer en chaque point du solide le vecteur déplacement \vec{u} (trois composantes), le tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$ (six composantes indépendantes) et le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ (six composantes indépendantes).

Pour résoudre un tel problème, nous devons donc disposer de 15 équations. Ces équations sont les trois équations d'équilibre :

$$\vec{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v = 0 \quad (5.1)$$

les six équations de compatibilité des déformations (qui assurent que les déformations dérivent d'un champ de déplacement sous la forme $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$) obtenues par le système :

$$\underline{\Delta}(\underline{\epsilon}) + \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(tr(\underline{\epsilon}))) = \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon})) + \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\epsilon}))^t \quad (5.2)$$

et les six équations de comportement reliant les contraintes aux déformations sous la forme :

$$\underline{\sigma} = 2\mu\underline{\epsilon} + \lambda tr(\underline{\epsilon})\underline{I} \quad (5.3)$$

où le tenseur \underline{I} représente le tenseur identité.

On constate que les équations sont en fait des équations différentielles. Leur intégration se fera donc à une constante près, qui sera déterminée à l'aide des conditions aux limites en pression ou en déplacement :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{U} \text{ sur } \partial\Omega_U \\ \vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T} \text{ sur } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (5.4)$$

5.1.2 Méthodes de résolution

Il existe beaucoup de méthodes de résolution des équations précédentes. Toutefois, les méthodes dites "semi-inverses" présentent l'avantage de fournir des expressions analytiques pour les champs de déplacement, de déformations et de contraintes dans le solide. Ce chapitre est consacré aux méthodes semi-inverses, dans le cas de matériaux homogènes, au comportement élastique linéaire et isotrope. De plus, nous négligerons les effets d'accélération (résolution statique). En effet, ces hypothèses permettent de mettre en place des équations relativement simples à résoudre.

Il existe deux grandes méthodes de résolution semi-inverse de ce type de problèmes. La première, dite "résolution en déplacements", consiste à écrire toutes les conditions que doivent satisfaire les déplacements dans la structure, pour en déduire une solution. La seconde, dite "résolution en contraintes", consiste à écrire ces équations à l'aide du tenseur des contraintes.

5.2 Résolution en déplacements

5.2.1 Équations de Lamé-Clapeyron

Lorsque l'on souhaite obtenir un champ de déplacements dans le matériau, on traite un problème à trois inconnues (les trois déplacements dans les trois

directions). Pour cela, on dispose de trois équations, qui sont les équations d'équilibre que l'on va formuler en déplacements en utilisant la loi de comportement et la définition des déformations. En effet, le champ de déformation que l'on déduira du champ de déplacement respectera par définition les six équations de compatibilité. L'ensemble des équations précédentes nous permet d'exprimer la divergence de l'état de contrainte sous la forme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) &= \mu(\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{div}(\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{u})^t)) + \lambda\overrightarrow{div}(tr(\underline{\epsilon})\underline{I}) \\ &= \mu\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + (\lambda + \mu)\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{div}(\overrightarrow{u}))\end{aligned}\quad (5.5)$$

La résolution en déplacements d'un problème de mécanique des milieux continus se fait donc à l'aide des trois équations différentielles dites de "Lamé-Clapeyron" ou de "Navier" :

$$\mu\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + (\lambda + \mu)\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{div}(\overrightarrow{u})) + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0}\quad (5.6)$$

La résolution de ces équations est surtout pratique lorsque les conditions aux limites (qui servent à déterminer les constantes d'intégration) sont exprimées en déplacement. Si des conditions sont exprimées en contraintes, alors il faut calculer le tenseur des contraintes à partir du champ de déplacements, puis appliquer ces conditions pour déterminer les constantes.

5.2.2 Cas particuliers

Déformation pure

Dans le cas d'une déformation pure (pas de rotation de corps solide), le champ de déplacements dérive d'un potentiel ϕ sous la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{grad}(\phi)$, de sorte que les équations de Lamé-Clapeyron peuvent s'écrire sous forme suivante :

$$(\lambda + 2\mu)\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0}\quad (5.7)$$

En l'absence de forces volumiques, le champ de déplacements correspondant à une déformation pure est une fonction harmonique, c'est-à-dire qui vérifie la condition :

$$\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\quad (5.8)$$

Matériau incompressible

Dans le cas d'un matériau incompressible ($tr(\underline{\epsilon}) = div(\vec{u}) = 0$), les équations de Lamé-Clapeyron se réduisent à :

$$\mu \vec{\Delta}(\vec{u}) + \vec{f}_v = \vec{0} \quad (5.9)$$

En l'absence de forces volumiques, le champ de déplacements correspondant à un matériau incompressible est également une fonction harmonique.

Thermo-élasticité linéaire

Dans le cas où la température intervient, les relations entre les contraintes et les déformations sont modifiées (voir chapitre sur l'élasticité). Il s'en suit que les équations de Lamé-Clapeyron deviennent :

$$\mu \vec{\Delta}(\vec{u}) + (\lambda + \mu) \overrightarrow{grad}(div(\vec{u})) + \vec{f}_v - (3\lambda + 2\mu)\alpha \overrightarrow{grad}(\Delta T) = \vec{0} \quad (5.10)$$

5.3 Résolution en contraintes

5.3.1 Équations de Beltrami-Michell

Lorsque seules des conditions aux limites en contraintes existent, il peut être intéressant de résoudre le problème en utilisant les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes comme inconnues. Il faut alors disposer de six équations, qui sont obtenues en écrivant que les déformations obtenues par la loi de comportement respectent les équations de compatibilité. Les équations d'équilibre sont donc ici simplement utilisées pour simplifier les équations de compatibilité exprimées en contraintes. Ces équations s'écrivent tout d'abord globalement sous la forme suivante, en notant Σ le scalaire représentant la trace du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} & \underline{\Delta}(\underline{\sigma}) + \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma)) - \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\sigma})) - \underline{grad}(\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}))^t \\ & - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(\Delta(\Sigma)\underline{I} - \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma))) = \underline{0} \end{aligned} \quad (5.11)$$

On remarque que l'expression à annuler dans l'équation précédente est un tenseur d'ordre 2 symétrique. Il n'y a donc que six équations indépendantes. En utilisant les équations d'équilibre, on peut écrire cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \underline{\Delta}(\underline{\sigma}) + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma)) \\ + & (\underline{grad}(\overrightarrow{f}_v) + \underline{grad}(\overrightarrow{f}_v)^t) - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \Delta(\Sigma) \underline{I} = \underline{0} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Une simplification est encore possible à l'aide des équations d'équilibre, en utilisant la relation scalaire issue des équations de compatibilité et la loi de comportement. On obtient alors :

$$div(\overrightarrow{f}_v) = \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \Delta(\Sigma) \quad (5.13)$$

Ceci conduit aux équations dites de "Beltrami-Michell", qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} & \underline{\Delta}(\underline{\sigma}) + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \underline{grad}(\overrightarrow{grad}(\Sigma)) \\ + & \underline{grad}(\overrightarrow{f}_v) + \underline{grad}(\overrightarrow{f}_v)^t - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} div(\overrightarrow{f}_v) \underline{I} = \underline{0} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ce système d'équations différentielles permet d'obtenir le champ de contraintes, à des constantes près qu'il faut déterminer en utilisant les conditions aux limites en pression. Toutefois, il est difficile ici d'introduire les conditions aux limites en déplacements, car le champ de déplacements n'est pas obtenu directement à partir du champ de contraintes. Il faut pour cela intégrer les déformations. Pour cette raison, la résolution en contraintes est moins utilisée que celle en déplacements.

5.3.2 Cas particuliers

Forces massiques homogènes

Dans le cas de forces massiques homogènes, leur gradient et leur divergence sont nuls, ce qui annule le terme en forces volumiques dans les équations de Beltrami-Michell, qui deviennent :

$$\underline{\Delta}(\underline{\sigma}) + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\Sigma)) = \underline{0} \quad (5.15)$$

De plus, appliquant l'opérateur laplacien à l'équation précédente, on fait apparaître le laplacien de Σ , qui est nul car il dépend uniquement de la divergence des forces volumiques. On en déduit que le tenseur des contraintes est dans ce cas "bi-harmonique", c'est-à-dire qu'il satisfait la condition $\underline{\Delta}(\underline{\Delta}(\underline{\sigma})) = \underline{0}$.

Utilisation pratique

Lorsque le problème possède des conditions aux limites en déplacements, celles-ci sont difficiles à introduire. En effet, le champ de déplacements n'est pas obtenu directement à partir du champ de contraintes. Il faut pour cela intégrer les déformations. Pour cette raison, la résolution en contraintes est moins utilisée que celle en déplacements.

5.4 Exercices

Disque de turbomachine

Nous souhaitons dimensionner un disque de compresseur de turbomachine en régime permanent (vitesse de rotation angulaire constante ω , figure 5.1). Pour cela, nous travaillons en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Le matériau est supposé élastique linéaire, isotrope, avec les constantes d'élasticité λ et μ (coefficients de Lamé) et une masse volumique ρ . Pour simplifier les calculs, le champ de déplacements (u, v, w) dans le disque est supposé de la forme $u = u(r)$, $v = 0$, $w = 0$. On néglige donc la réduction d'épaisseur du disque.

- Donner l'expression des tenseurs des déformations et des contraintes
- Écrire l'équilibre du disque en fonction du champ de déplacements
- Montrer qu'un champ du type $u(r) = ar^3 + br$ les satisfait, et déterminer les constantes a et b
- En utilisant la contrainte équivalente de Tresca, et en notant σ_0 sa valeur limite (avant plastification), déterminer le rayon maximal admissible du disque

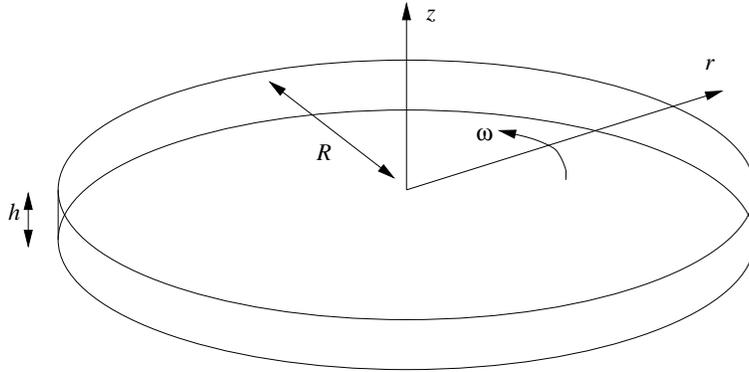


FIG. 5.1 – Schématisation du problème

- Parmi les matériaux proposés ci-dessous, sélectionner celui ou ceux permettant un fonctionnement à une vitesse de $50000tr/mn$ avec un rayon de $160mm$.

matériau	$\rho(kg/m^3)$	ν	$\sigma_0(MPa)$
INCO625	7800	0,3	900
TA6V	5500	0,34	700
Al 7075	2800	0,32	500

Tenue mécanique d'un bouchon

Nous souhaitons étudier la tenue mécanique d'un bouchon cylindrique introduit dans une bouteille supposée infiniment rigide. Pour cela, nous utilisons la schématisation de la figure 5.2 et nous travaillons en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Le matériau constituant le bouchon est supposé élastique linéaire, isotrope, avec les constantes d'élasticité λ et μ (coefficients de Lamé). Le champ de déplacements (u, v, w) dans le bouchon est supposé de la forme $u = u(r)$, $v = 0$, $w = w(r, z)$.

- Exprimer le tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$, le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, et les équations d'équilibre du bouchon, en fonction des déplacements (u, v, w) et de leurs dérivées partielles (non nulles). Montrer qu'un champ de déplacements de la forme suivante (où A, B, C, D sont des constantes) satisfait ces équations d'équilibre :

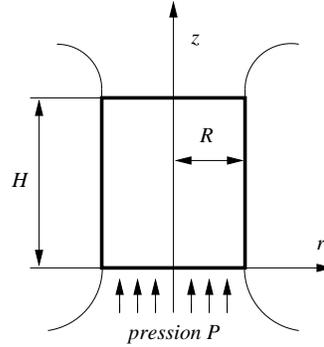


FIG. 5.2 – Schématisation du problème

$$\begin{cases} u = A \frac{r}{R} \\ v = 0 \\ w = \frac{B}{R^2} (r^2 - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} z^2) + C \frac{z}{H} + D \end{cases} \quad (5.16)$$

- Exprimer les constantes B et C en fonction de A, P, R, H, λ, μ en utilisant les conditions aux limites en pression sur les faces $z = 0$ (pression P dans la direction z) et $z = H$ (pression nulle dans la direction z).
- Donner l'expression de la constante A à l'aide de la condition aux limites en déplacement suivante : un déplacement $u = -\delta$ en $r = R$ est imposé (le bouchon est emmanché de force dans la bouteille!!).
- Donner l'expression complète du tenseur des contraintes. Expliquer pourquoi ce tenseur ne dépend pas de la constante D , et comment celle-ci pourrait être obtenue.
- Donner l'expression du vecteur contrainte \vec{t} exercé par la bouteille sur la face $r = R$ du bouchon (voir figure 5.3). En déduire les contraintes normale σ_n et tangentielle σ_t appliquées sur cette face.
- Ce vecteur contrainte pourra être exercé par la bouteille tant que le rapport $\frac{\sigma_t}{\sigma_n}$ n'excédera pas le coefficient de frottement m de l'interface bouteille-bouchon. En déduire la pression P limite à partir de laquelle le bouchon sortira.
- Calculer cette pression limite pour $H = 30mm, R = 10mm, \delta = 1mm, \lambda = 0, \mu = 6MPa$ et $m = 0,1$.

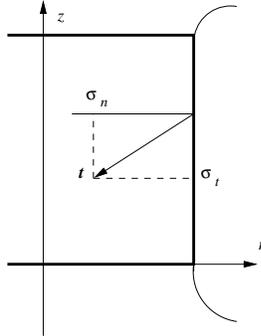
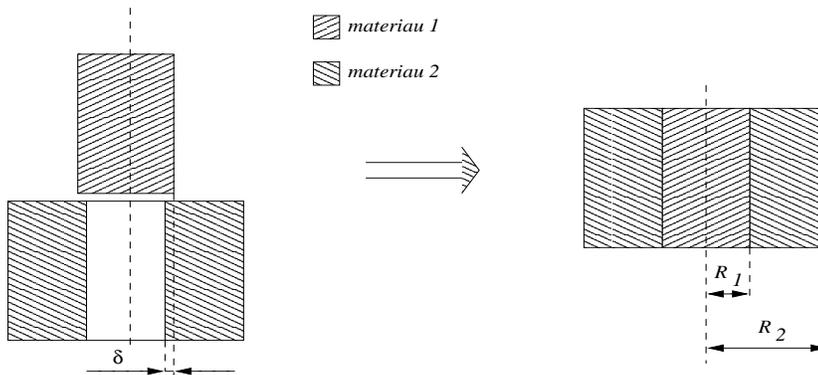


FIG. 5.3 – Schématisation du problème

Frettage cylindrique

Le "frettage cylindrique" consiste à emmancher deux formes axisymétriques l'une dans l'autre, la forme intérieure ayant auparavant un diamètre externe supérieur au diamètre interne de la forme extérieure. On parle alors d'emmanchement "serré". Dans ce travail, nous nous intéresserons simplement aux conséquences du fretage, sans nous soucier du mode d'assemblage (thermique ou mécanique). L'objectif est de calculer les champs de contraintes, de déformation, et les déplacements dans des assemblages cylindriques frétés. Nous allons traiter le cas du fretage d'un tube sur un cylindre plein, tel qu'il est décrit dans la figure 5.4.



Dans tous les calculs, nous nous placerons en coordonnées cylindriques et dans l'hypothèse des petites perturbations. De plus, nous négligerons le poids propre et les effets d'accélération, et nous supposerons que les matériaux frétés sont homogènes, et ont le même comportement élastique isotrope (nous noterons λ et μ leurs coefficients de Lamé). Enfin, le champ de déplacements

(u_i, v_i, w_i) à l'intérieur de chaque matériau i sera supposé radial et de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_i = u_i(r) \\ v_i = 0 \\ w_i = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

- Donner les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}^{(i)}$ et du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}^{(i)}$ dans le matériau i , en fonction de u_i et de ses dérivées successives. En déduire les équations d'équilibre dans chaque matériau formulées en déplacements.
- Trouver une forme analytique de $u_i(r)$, dépendant de deux constantes a_i et b_i , satisfaisant les équations d'équilibre obtenues. Pour cela, intégrer les équations d'équilibre en effectuant un changement de variable $t_i = \ln(u_i)$.
- En notant δ l'écart entre les rayons initiaux de deux formes frêtées 1 (intérieure) et 2 (extérieure), montrer que les déplacements u_1 et u_2 satisfont la condition $u_2 - u_1 = \delta$ au niveau de l'interface. La quantité δ est appelée "serrage".
- A l'interface entre deux formes frêtées 1 et 2, écrire la continuité de la contrainte normale, et montrer que cette continuité se traduit par la condition $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}$.
- Appliquer les conditions aux limites au centre, à l'interface et à l'extérieur pour déterminer les quatre constantes a_1, b_1, a_2, b_2 . Exprimer ensuite les champs de déplacement, de contraintes et de déformation dans les matériaux frêtés en fonction des rayons R_1 et R_2 , du serrage δ , et des coefficients de Lamé.
- Dessiner l'évolution des contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} le long du rayon de l'assemblage. En déduire la contrainte équivalente de Tresca $\bar{\sigma}$ dans l'assemblage. Dessiner son évolution le long du rayon de l'assemblage. Donner la position dans l'assemblage où la plastification du matériau apparaîtra en premier.

Tube sous pression

On considère un tube d'axe Oz , infiniment long, de rayon intérieur r_0 , de rayon extérieur r_1 . On travaillera en coordonnées cylindriques r, θ, z . Le matériau est supposé avoir un comportement élastique isotrope caractérisé par ses coefficients de Lamé λ et μ . La face intérieure est soumise à une pression p_0 , celle de l'extérieur à une pression p_1 .

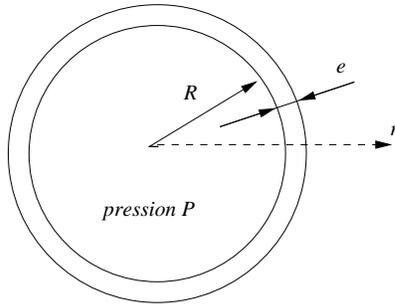
- Justifier le choix d'un champ de déplacements u, v, w tel que $u = u(r), v = 0, w = 0$ (champ radial). En déduire l'expression du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes en fonction de u et de ses dérivées par rapport à r .
- Résoudre le problème en déplacements en écrivant l'équilibre statique du système. Montrer qu'un champ de déplacements du type $u(r) = a + \frac{b}{r}$ satisfait cet équilibre.
- Résoudre le problème en contraintes en écrivant l'équilibre statique du système. Utiliser le champ de déplacements obtenu précédemment pour estimer une forme de champ de contraintes.
- Écrire les conditions aux limites pour déterminer les constantes a et b en fonction des caractéristiques du matériau et de la géométrie du système.

Dans la suite, nous supposons que $p_1 = 0$ (pas de pression externe).

- Exprimer les composantes du tenseur des contraintes, puis la contrainte équivalente de Tresca (que l'on notera σ), en fonction de la pression interne dans le tube, des caractéristiques élastiques du matériau, et de la géométrie. Tracer l'évolution de σ dans la paroi du tube.
- En utilisant un critère basé sur la contrainte équivalente de Tresca, et en notant σ_0 la limite d'élasticité du matériau, déterminer la pression interne maximale p_{max} pour laquelle il n'y a pas de plastification locale. Calculer p_{max} pour $\sigma_0 = 200MPa$, $r_0 = 100mm$ et $r_1 = 120mm$.

Ballon de football

Un ballon de football est gonflé à une pression P . On note R son rayon interne et e son épaisseur. Le matériau constituant le ballon est supposé homogène, élastique linéaire et isotrope (λ et μ sont ses coefficients de Lamé). On se place dans l'hypothèse des petites perturbations. On néglige la pression atmosphérique et le poids propre du matériau. On utilise un système de coordonnées sphériques r, θ, ϕ , dans lequel on suppose un champ de déplacements radial $u = u(r), v = 0, w = 0$.



- Exprimer le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes en fonction de u , de ses dérivées successives, et des coefficients de Lamé.
- Exprimer l'équilibre statique sous la forme d'une équation différentielle en $u(r)$. Montrer qu'un champ de la forme $u = Ar + B/r^2$ satisfait cet équilibre (A et B sont des constantes).
- Utiliser les conditions aux limites en pression pour déterminer les constantes A et B . En déduire un expression complète des contraintes.
- en notant $\delta = r - R$, montrer que la contrainte radiale s'exprime sous la forme $-P(1 - \delta/e)$ lorsque $e \ll R$.

Chapitre 6

MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES

6.1 Cadre général

6.1.1 Principe des puissances virtuelles

Pour schématiser les efforts mis en jeu dans les phénomènes que l'on souhaite étudier, il est commode d'imaginer des mouvements fictifs ou virtuels. Ces mouvements engendrent des puissances qui sont à leur tour des puissances virtuelles. Un mouvement virtuel dans un milieu matériel Ω est défini par un champ de vecteurs représentant la vitesse virtuelle instantanée \vec{v}^* de tous ses points M . Par exemple, pour évaluer la rigidité d'un ressort, on peut déplacer son extrémité à une certaine vitesse. Ce mouvement est virtuel, puisqu'il ne sert qu'à estimer cette rigidité. La puissance virtuelle P^* , associée à un mouvement virtuel donné, est le produit scalaire de la force \vec{F} nécessaire à ce mouvement par cette vitesse : $P^* = \vec{F} \cdot \vec{v}^*$.

Un milieu matériel étant isolé, on peut distinguer les actions extérieures qui agissent sur le milieu des actions intérieures qui représentent les liaisons entre toutes les parties du milieu. Les deux énoncés fondamentaux du principe des puissances virtuelles sont les axiomes d'objectivité et d'équilibre :

- L'axiome d'objectivité stipule que la puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement de corps rigide est nulle.
- L'axiome d'équilibre impose que, pour tout milieu matériel isolé, de do-

maine Ω , repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération P_a^* est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs P_e^* et des efforts intérieurs P_i^* .

Compte-tenu de l'axiome d'objectivité, et pour un système ne présentant pas de discontinuité de vitesse ou de contrainte (*i.e.* pas de propagation d'onde), la puissance virtuelle des efforts intérieurs est celle de l'ensemble des efforts internes $\vec{H} = \overrightarrow{div}(\underline{\sigma})$ (voir le chapitre sur les contraintes pour la définition des forces internes \vec{H}), puissance à laquelle on soustrait la contribution surfacique des contraintes. L'expression de cette puissance interne est donc :

$$P_i^* = \int_{\Omega} \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) \cdot \vec{v}^* dv - \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v}^* ds \quad (6.1)$$

où \vec{n} est la normale extérieure à Ω .

En appliquant la relation $div(\underline{\sigma} \cdot \vec{v}) = \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) \cdot \vec{v} + \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{v})$ au champ de vitesses virtuel \vec{v}^* , et en utilisant le théorème de la divergence et la symétrie du tenseur des contraintes, on peut encore écrire cette puissance sous la forme :

$$P_i^* = - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{v}^*) dv \quad (6.2)$$

Les efforts extérieurs comprennent d'une part les efforts exercés à distance par des systèmes extérieurs, représentés par une densité volumique de forces \vec{f}_v dans le domaine Ω , et d'autre part les efforts de contact exercés par des systèmes extérieurs, représentés par une densité surfacique de forces \vec{t} sur la surface extérieure $\partial\Omega$ de Ω . On définit alors la puissance des forces extérieures sous la forme :

$$P_e^* = \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v}^* dv + \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v}^* ds \quad (6.3)$$

Si $\vec{\gamma}$ est le vecteur des accélérations, réelles, en chaque point M , et ρ la masse volumique en ce point, alors la puissance virtuelle des quantités d'accélération est définie par :

$$P_a^* = \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v}^* dv \quad (6.4)$$

Les équations précédentes permettent d'écrire le principe des puissances virtuelles sous l'une des deux formes suivantes :

$$\forall \vec{v}^*, \int_{\Omega} (\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) + \vec{f}_v - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{v}^* dv + \int_{\partial\Omega} (\vec{t} - \underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v}^* ds = 0 \quad (6.5)$$

$$\forall \vec{v}^*, \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{v}^*) dv + \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v}^* dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v}^* dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{v}^* ds = 0 \quad (6.6)$$

Sur la première expression, on constate que le principe des puissances virtuelles conduit d'une part à vérifier l'équilibre local de la dynamique (intégrale volumique) et d'autre part à définir le tenseur des contraintes de Cauchy par son lien avec le vecteur contrainte \vec{t} appliqué en surface (intégrale surfacique). Toutefois, les approches énergétiques sont plutôt basées sur la seconde expression. Nous allons les étudier dans le cas statique (pas de termes d'accélération).

6.1.2 Principe des travaux virtuels

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le principe des puissances virtuelles devient le principe des travaux virtuels. Si \vec{u}^* représente un champ de déplacements virtuels dans le solide, l'intégration par rapport au temps du principe des puissances virtuelles se fait directement (pas de changement de configuration) et donne la quantité suivante à annuler :

$$\forall \vec{u}^*, W(\underline{\sigma}, \vec{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{u}^*) dv + \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u}^* ds = 0 \quad (6.7)$$

Cette équation conduit à vérifier l'équilibre local et à définir le tenseur des contraintes. Elle est à la base des méthodes énergétiques de résolution des problèmes de mécanique des milieux continus. Pour cela, on introduit les champs de déplacement cinématiquement admissibles et les champs de contraintes statiquement admissibles :

- Un Champ Cinématiquement Admissibles (CCA) est un champ de déplacements \vec{u}^* qui vérifie toutes les données cinématiques du problème.

Il est continu dans Ω et sur $\partial\Omega$, continûment dérivable par morceaux sur Ω , et satisfait les conditions aux limites en déplacement :

$$\vec{u}^* = \vec{U} \text{ sur } \partial\Omega_U \quad (6.8)$$

où \vec{U} est un déplacement connu. La solution associée à un CCA est un champ de contraintes qui est obtenu en calculant les déformations, et en appliquant la loi de comportement du matériau. Ce champ de contraintes ne satisfait pas forcément l'équilibre de la structure et/ou les conditions aux limites en pression.

- Un Champ Statiquement Admissible (CSA) est un champ de contraintes $\underline{\sigma}^*$ qui vérifie toutes les données statiques du problème. Il est continu dans Ω et sur $\partial\Omega$, continûment dérivable par morceaux sur Ω , et vérifie les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en efforts :

$$\begin{cases} \overline{div}(\underline{\sigma}^*) + \vec{f}_v = \vec{0} \text{ dans } \Omega \\ \underline{\sigma}^* \cdot \vec{n} = \vec{T} \text{ sur } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (6.9)$$

où \vec{T} est une pression connue. La solution associée à un CSA est un champ de déplacements qui est obtenu en appliquant la loi de comportement pour obtenir les déformations, puis en remontant aux déplacements en respectant les équations de compatibilité. Ce champ de déplacements ne satisfait pas forcément les conditions aux limites en déplacements.

6.2 Formulation variationnelle

6.2.1 Approche en déplacements

Pour introduire une formulation variationnelle en déplacements, les déplacements virtuels \vec{u}^* sont choisis comme variation des déplacements réels \vec{u} , $\vec{u}^* = \vec{u} + \delta\vec{u}$, l'opérateur δ vérifiant les propriétés $\delta(\delta\vec{u}) = \vec{0}$, $\delta(\underline{grad}(\vec{u})) = \underline{grad}(\delta\vec{u})$ et $\int_{\Omega} \delta\vec{u} dv = \delta(\int_{\Omega} \vec{u} dv)$. De plus, cette variation est choisie au sein des champs cinématiquement admissibles (CCA), de sorte que l'on a $\delta\vec{u} = \vec{0}$ sur $\partial\Omega_U$. En exprimant enfin les contraintes en fonction du champ de déplacements \vec{u} , et en utilisant le fait que la solution réelle \vec{u} annule la quantité W , on obtient l'expression suivante à annuler, où \underline{C} représente le tenseur de rigidité du matériau :

$$W(\vec{u}, \delta \vec{u}) = \int_{\Omega} \underline{\text{grad}}(\vec{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\text{grad}}(\delta \vec{u}) dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta \vec{u} dv - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T} \cdot \delta \vec{u} ds \quad (6.10)$$

Cette expression à annuler est ensuite exprimée comme la variation d'une énergie $\Pi_p(\vec{u})$ sous la forme :

$$W(\vec{u}, \delta \vec{u}) = \delta(\Pi_p(\vec{u})) = \frac{\partial \Pi_p}{\partial \vec{u}} \cdot \delta \vec{u} \quad (6.11)$$

avec :

$$\Pi_p(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\text{grad}}(\vec{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\text{grad}}(\vec{u}) dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u} dv - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T} \cdot \vec{u} ds \quad (6.12)$$

Cette fonction est appelée "énergie potentielle". Sa variation au second ordre est donnée par :

$$\delta^2(\Pi_p(\vec{u})) = \int_{\Omega} \underline{\text{grad}}(\delta \vec{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\text{grad}}(\delta \vec{u}) dv \quad (6.13)$$

Puisque les termes C_{ijkl} forment une matrice définie positive en (ij) , (kl) , alors cette variation au second ordre est strictement positive, et la solution du problème correspond à un minimum de l'énergie potentielle. L'approche énergétique en déplacements est également appelée "modèle variationnel en déplacements". Le principe est de se donner un champ de déplacements virtuels paramétré et cinématiquement admissible, de calculer l'énergie potentielle correspondante, et de la minimiser pour s'approcher de la solution réelle. On peut ainsi obtenir une approximation de la solution réelle, qui aura donc une énergie potentielle supérieure à la solution exacte, et constituera une borne supérieure. Cette méthode est donc également appelée "méthode de la borne supérieure".

6.2.2 Approche en contraintes

L'approche en contraintes consiste à considérer le champ de contraintes sous la forme $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^* - \delta \underline{\sigma}$, où $\underline{\sigma}^*$ est un champ de contraintes virtuel statiquement

admissible, c'est-à-dire satisfaisant les équations d'équilibres et les conditions aux limites en pression (sur $\partial\Omega_T$). La quantité à annuler peut alors s'écrire au premier ordre, en introduisant le tenseur \underline{S} des complaisances élastiques et en notant $\vec{u}^* = \vec{u} + \delta\vec{u}$ (où \vec{u} est le champ réel, mais où \vec{u}^* n'est pas nécessairement cinématiquement admissible) :

$$\begin{aligned}
W(\underline{\sigma}, \delta\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^* - \delta\underline{\sigma}) : \underline{grad}(\vec{u}^*) dv - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv - \int_{\partial\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u}^* ds \\
&= - \int_{\Omega} \delta\underline{\sigma} : \underline{grad}(\vec{u}^*) dv - \int_{\partial\Omega} (\vec{t} - \underline{\sigma}^* \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u}^* ds \\
&= - \int_{\Omega} \delta\underline{\sigma} : \underline{S} : \underline{\sigma} dv + \int_{\partial\Omega_V} \delta\underline{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot \vec{U} ds
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Cette expression à annuler est ensuite exprimée comme la variation d'une énergie $\Pi_c(\underline{\sigma})$ sous la forme :

$$W(\underline{\sigma}, \delta\underline{\sigma}) = \delta(\Pi_c(\underline{\sigma})) = \frac{\partial\Pi_c}{\partial\underline{\sigma}} : \delta\underline{\sigma} \tag{6.15}$$

avec :

$$\Pi_c(\underline{\sigma}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{S} : \underline{\sigma} dv + \int_{\partial\Omega_V} (\underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U} ds \tag{6.16}$$

Cette fonctionnelle est appelée "énergie complémentaire". Sa variation au second ordre est donnée par :

$$\delta^2(\Pi_c(\underline{\sigma})) = - \int_{\Omega} \delta\underline{\sigma} : \underline{S} : \delta\underline{\sigma} dv \tag{6.17}$$

Puisque les S_{ijkl} forment une matrice définie positive en $(ij), (kl)$, alors cette variation au second ordre est strictement négative, et la solution du problème correspond à un maximum de l'énergie complémentaire. Cette approche est également appelée "modèle variationnel en contraintes", ou "méthode de la borne inférieure". En effet, la solution obtenue par ce modèle aura une énergie inférieure à la solution réelle.

6.2.3 Encadrement

Les formulations variationnelles en déplacements et en contraintes permettent d'obtenir des solutions approchées à un problème de mécanique

des milieux continus. De plus, si \vec{u}^* est un champ de déplacement cinématiquement admissible obtenu par l'approche en déplacements, et si $\vec{\sigma}^*$ est un champ de contraintes statiquement admissible obtenu par l'approche en contraintes, alors on peut encadrer la solution réelle $(\vec{\sigma}, \vec{u})$ sous la forme :

$$\Pi_c(\underline{\sigma}^*) \leq \Pi_c(\underline{\sigma}) = \Pi_p(\vec{u}) \leq \Pi_p(\vec{u}^*) \quad (6.18)$$

6.3 Exercices

Allongement élastique d'une barre

On considère une barre élastique de section homogène S , de longueur L , et dont le matériau possède un module d'Young E . Cette barre est soumise à une traction par déplacement d'une de ses extrémités d'une quantité U , l'autre restant fixe. On se limitera à l'étude des états de contrainte uniaxiaux, de sorte que la contrainte de traction dans la barre σ sera liée à sa déformation $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ sous la forme $\sigma = E\epsilon$ (voir figure 6.1).

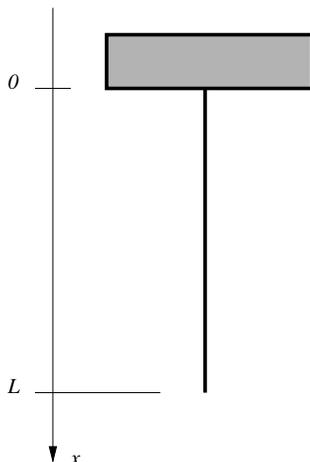


FIG. 6.1 – Schématisation d'une barre élastique

- Montrer qu'un champ de déplacement de la forme $u(x) = U(\frac{x}{L})^n$ avec $n \geq 1$ est cinématiquement admissible. En postulant un tel champ, calculer l'énergie potentielle de la barre Π_p , paramétrée par n . Calculer la forme du champ de déplacement qui minimise cette énergie.

- Montrer qu'un champ de contrainte de la forme $\sigma = \sigma_0$, où σ_0 est une constante, est statiquement admissible. En postulant un tel champ, calculer l'énergie complémentaire de la barre Π_c , paramétrée par σ_0 . Calculer la valeur de σ_0 qui rend maximale cette énergie.
- Montrer que l'on a toujours $\Pi_p(n) \geq \Pi_c(\sigma_0)$, et que ces deux énergies coïncident lorsqu'elles sont rendues extrémales. En déduire la rigidité réelle de la barre K .

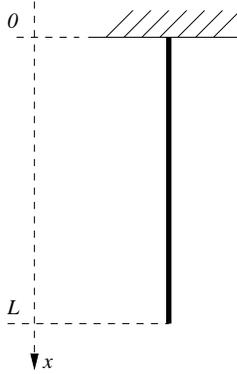
Traction élastique d'une barre

On considère une barre élastique de section homogène S , de longueur L , et dont le matériau possède un module d'Young E . Cette barre est soumise à une traction par application d'une force F à l'une de ses extrémités, l'autre extrémité restant fixe. On se limitera à l'étude des états de contrainte uniaxiaux, de sorte que la contrainte de traction dans la barre σ sera reliée à sa déformation $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ sous la forme $\sigma = E\epsilon$ (voir figure 6.1).

- Montrer qu'un champ de déplacement de la forme $u(x) = U(\frac{x}{L})^n$ avec $n \geq 1$ est cinématiquement admissible. En postulant un tel champ, calculer l'énergie potentielle de la barre Π_p , paramétrée par U et n .
- Calculer la forme du champ de déplacement qui minimise l'énergie potentielle de la barre.

Barre sous son propre poids

Une barre de section homogène S , de longueur L , et de module d'Young E , est soumise à son propre poids (masse volumique ρ , accélération de la pesanteur g). Elle est fixée à son extrémité supérieure. On se limitera à l'étude des états de contrainte uniaxiaux, de sorte que la contrainte de traction dans la barre σ sera reliée à sa déformation $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ sous la forme $\sigma = E\epsilon$. On postule un champ de déplacements dans la barre sous la forme $u(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des constantes, et un champ de contraintes $\sigma(x) = Ax + B$, où A et B sont des constantes. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations, et on néglige les effets d'inertie.



- Déterminer la constante c pour que le champ $u(x)$ soit cinématiquement admissible. Calculer l'énergie potentielle de la barre Π_p , paramétrée par a et b . Déterminer les valeurs de a et b qui minimisent cette énergie.
- Déterminer les constantes A et B pour que le champ $\sigma(x)$ soit statiquement admissible. En déduire l'énergie complémentaire de la barre Π_c .
- Montrer à l'aide de critères énergétiques que les champs obtenus $u(x)$ et $\sigma(x)$ sont exacts.

Chapitre 7

APPLICATION AUX POUTRES

7.1 Cinématique

7.1.1 Géométrie

Une poutre est un solide engendré par une aire plane S qui est déplacée dans l'espace de manière que durant son mouvement, le centre de gravité G de la section S parcourt une ligne donnée L , et que l'aire se maintienne constamment normale à cette surface (figure 7.1). La ligne L est appelée *fibres moyenne* de la poutre. Une poutre est dite :

- gauche si la ligne L suit une courbe gauche,
- plane si la ligne L suit une courbe plane,
- droite si la ligne L suit une droite.

De plus, une poutre prismatique a une section S constante, et une poutre à plan moyen est une poutre plane dont le plan est un plan de symétrie de la section S . Enfin, si la fibre moyenne est une courbe fermée, on parlera d'anneau (les sections droites initiale et finale sont confondues).

Une poutre est caractérisée géométriquement par :

- une section S suffisamment massive,
- une longueur selon L grande devant les dimensions transversales,
- un rayon de courbure de L grand devant les dimensions transversales,

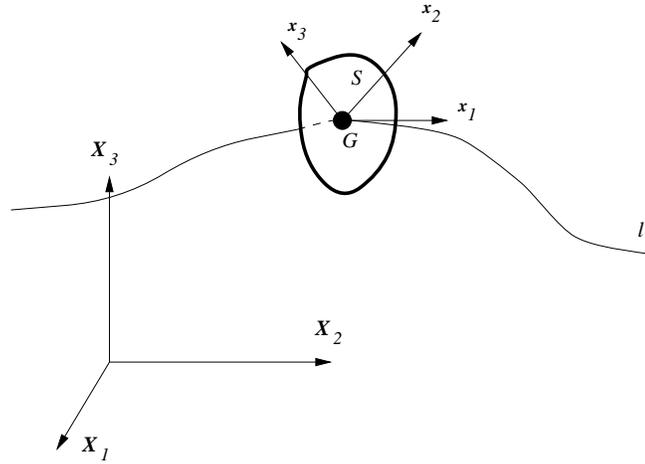


FIG. 7.1 – Définition géométrique d'une poutre

- un profil sans discontinuité.

La théorie élastique des poutres est basée sur celle des *milieux curvilignes*. Une position sur la poutre sera caractérisée uniquement par l'abscisse curviligne l d'un point sur la fibre moyenne L . Le reste de la géométrie, c'est-à-dire la section S , sera caractérisé en chaque point de la fibre moyenne par :

- la section S de la poutre obtenue sous la forme :

$$S = \int_S ds = \int_S dx_2 dx_3$$

- des moments d'ordre 1 nuls puisque le point G de la fibre moyenne est le centre de gravité de la section S :

$$\int_S x_2 ds = \int_S x_3 ds = 0$$

- des moments d'ordre 2, ou moments quadratiques, ou moments d'inertie :

$$I_2 = \int_S x_3^2 ds \text{ et } I_3 = \int_S x_2^2 ds$$

- un moment produit :

$$I_{23} = \int_S x_2 x_3 ds$$

- un moment de giration :

$$I = \int_S (x_2^2 + x_3^2) ds = I_2 + I_3$$

Par exemple, pour une section S circulaire, de rayon R , on a $I_2 = I_3 = \frac{\pi R^4}{4}$ et $I_{23} = 0$, tandis que pour une section rectangulaire, de longueur et largeur L_2 et L_3 , on a $I_2 = \frac{L_2 L_3^3}{12}$, $I_3 = \frac{L_2^3 L_3}{12}$ et $I_{23} = 0$.

7.1.2 Hypothèse de Navier

Dans ce document, nous nous limiterons à la cinématique des déplacements issue de l'hypothèse de *Navier*. Selon cette hypothèse, au cours de la déformation de la poutre, la section droite S reste droite (elle ne subit aucun gauchissement). Cette section S subit donc :

- un mouvement de corps rigide,
- une déformation dans son plan.

Mouvement de corps rigide de S

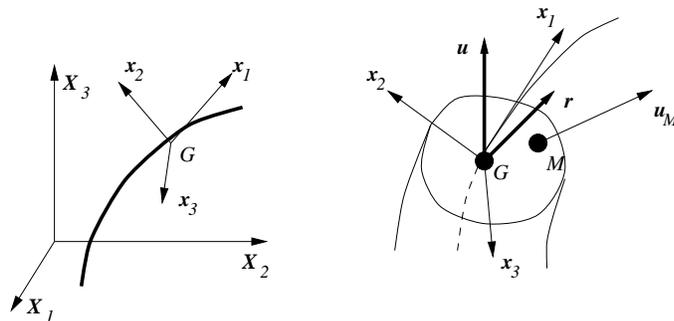


FIG. 7.2 – *Hypothèse cinématique de Navier*

La figure 7.2 illustre la caractérisation du mouvement de corps rigide de la section S par un vecteur de déplacement \vec{u} et un vecteur de rotation \vec{r} appliqués à son centre de gravité G . Le déplacement d'un point M de la section S dû à ce mouvement de corps rigide sera de la forme :

$$\vec{u}_M = \vec{u} + \vec{r} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Comme la section S est normale à la fibre moyenne L (avant déformation), le vecteur \overrightarrow{GM} est contenu dans le plan formé par les vecteurs \overrightarrow{x}_2 et \overrightarrow{x}_3 . Les composantes du vecteur \overrightarrow{u}_M s'écrivent donc dans le repère local de la section S :

$$\overrightarrow{u}_M = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_2x_3 - r_3x_2 \\ -r_1x_3 \\ r_1x_3 \end{vmatrix}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, on calcule le tenseur des déformations au point M , $\underline{\epsilon}_M$, comme la partie symétrique du tenseur gradient des déplacements en ce point, \underline{d}_M . Comme les vecteurs \overrightarrow{u} et \overrightarrow{r} s'appliquent au point G de la section S , et donc sur la ligne L , ils ne dépendent que de l'abscisse curviligne l sur cette ligne. Les seuls gradients non nuls pour ces vecteurs sont donc ceux mettant en jeu la première coordonnée x_1 , tandis que la dépendance en x_2 et x_3 est donnée explicitement par l'équation précédente. Dans la suite, nous noterons x' la dérivée de toute quantité x par rapport à la première coordonnée. Ceci permet d'écrire :

$$\overrightarrow{d}_M = \begin{bmatrix} u'_1 + r'_2x_3 - r'_3x_2 & -r_3 & r_2 \\ u'_2 - r'_1x_3 & 0 & -r_1 \\ u'_3 + r'_1x_3 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut remarquer sur cette équation que les dérivées mises en jeu sont des dérivées totales. Dans le cas d'une poutre courbe par exemple, ces dérivées devront prendre en compte le fait que le repère $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$ "tourne" lorsque l'on parcourt la fibre moyenne L .

A partir du tenseur gradient des déplacements \underline{d}_M , on peut maintenant obtenir le tenseur des déformations $\underline{\epsilon}_M$ par sa partie symétrique. On constate que ce tenseur ne possède que trois termes non nuls qui sont :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = u'_1 + r'_2x_3 - r'_3x_2 \\ 2\epsilon_{12} = u'_2 - r'_1x_3 - r_3 \\ 2\epsilon_{13} = u'_3 + r'_1x_3 + r_2 \end{cases}$$

Le mouvement de corps rigide de la section S ne produit donc pas de déformations dans le plan de cette section.

Déformation dans le plan de S

Le plan de la section S contient les vecteurs \vec{x}_2 et \vec{x}_3 . Il s'en suit qu'une déformation dans son plan (une déformation plane) ne produira que des déformations ϵ_{22} , ϵ_{23} et ϵ_{33} . Ces déformations permettront de satisfaire les conditions aux limites au bord de la section. Sur ce bord, on doit avoir $\sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$.

Dans le cas de poutres homogènes, on fait souvent l'hypothèse que les contraintes σ_{22} , σ_{33} et σ_{23} sont nulles dans toute la section S . En considérant un matériau à comportement élastique isotrope, cette hypothèse nous donne les valeurs suivantes pour les déformations dans la section S (λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau) :

$$\begin{cases} 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 0 \\ 2\mu\epsilon_{23} = 0 \\ 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{23} = 0 \\ \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\epsilon_{11} \end{cases}$$

On constate que, dans ce cas, les déformations de la section S dans son plan sont complètement déterminées à partir de la composante ϵ_{11} calculée à partir de son mouvement de corps rigide.

Degrés de liberté

Les résultats précédents nous montrent que le mouvement du solide peut être complètement déterminé à partir des vecteurs \vec{u} et \vec{r} de la figure 7.2. Ces vecteurs décrivent respectivement le déplacement et la rotation de la section S en un point quelconque de la fibre moyenne L . Les quantités \vec{u} et \vec{r} forment les composantes du *torseur des déplacements*. Elles sont les éléments de réduction au point G des déplacements dans une section de la poutre.

La cinématique des déplacements ainsi mise en place permet de concentrer les inconnues du problème sur la fibre moyenne L de la poutre. Le solide tridimensionnel est remplacé par la ligne L . Chaque point de la ligne dispose de six degrés de liberté au lieu de trois (les déplacements dans les trois directions). Ces six degrés de liberté sont :

- les déplacements dans les trois directions du point G de la ligne L , représentés par le vecteur \vec{u} , de composantes u_1 , u_2 et u_3 ,
- la rotation de la section S , représentée par le vecteur rotation \vec{r} , de composantes r_1 , r_2 et r_3 , appliqué au point G .

7.2 Contraintes et déformations

7.2.1 Tenseur des déformations

Les hypothèses faites sur la cinématique des déplacements dans la poutre nous conduisent au tenseur symétrique suivant des déformations en un point M quelconque d'une section S :

$$\vec{\epsilon}_M = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} = u'_1 + r'_2 x_3 - r'_3 x_2 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u'_2 - r'_1 x_3 - r_3) & \epsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\epsilon_{11} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} = \frac{1}{2}(u'_3 + r'_1 x_2 + r_2) & \epsilon_{23} = 0 & \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\epsilon_{11} \end{bmatrix}$$

Ce tenseur des déformations ne comporte que trois termes indépendants : ϵ_{11} , ϵ_{12} et ϵ_{13} . En RdM, ces termes sont associés sous la forme d'un vecteur \vec{e}_M , appelé *vecteur déformation* :

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \end{pmatrix}$$

Le vecteur \vec{e}_M contient une dilatation dans la direction de la fibre moyenne comme premier terme, puis des glissements (doubles des cisaillements entre deux sections voisines). Il représente la déformation du milieu curviligne au point M . Cette déformation peut à son tour être exprimée en fonction d'une déformation \vec{e} et d'un gradient de rotation (une courbure) $\vec{\kappa}$ au point G sous la forme :

$$\vec{e}_M = \vec{e} + \vec{\kappa} \wedge \overrightarrow{GM}$$

où \vec{e} et $\vec{\kappa}$, éléments de réduction de la déformation au point G de S , constituent le *torseur des déformations* défini par :

$$\vec{e} = \vec{u}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{r}' = \begin{cases} u'_1 \\ u'_2 - r_3 \\ u'_3 + r_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\kappa} = \vec{r}' = \begin{cases} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{cases}$$

7.2.2 Torseur des efforts

D'après les hypothèses faites sur les contraintes dans le plan d'une section S , les seules contraintes non nulles dans le solide sont σ_{11} , σ_{12} et σ_{13} . En RdM, ces contraintes sont associées dans un vecteur \vec{t}_M , appelé *vecteur contrainte* :

$$\vec{t}_M = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}$$

Comme la normale à S est le vecteur \vec{x}_1 , on peut remarquer que le vecteur contrainte \vec{t}_M coïncide avec celui défini en mécanique des milieux continus, agissant sur un élément de surface contenu dans S .

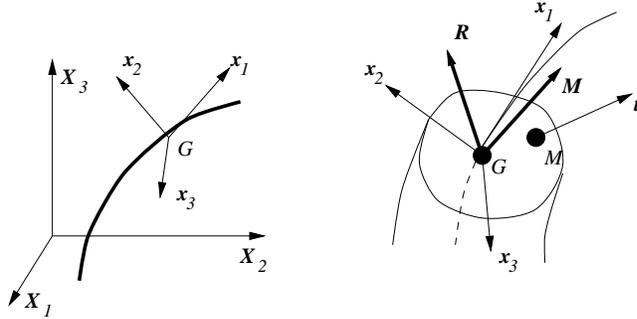


FIG. 7.3 – *Hypothèse de Saint-Venant, torseur des efforts*

L'hypothèse de *Saint-Venant* est que les efforts agissant sur S peuvent être schématisés par une force \vec{R} et un moment \vec{M} , appliqués au centre de gravité G de S , et définis par (figure 7.3) :

$$\vec{R} = \int_S \vec{t}_M ds = \begin{cases} \int_S \sigma_{11} ds \\ \int_S \sigma_{12} ds \\ \int_S \sigma_{13} ds \end{cases}$$

$$\vec{M} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{t}_M ds = \begin{cases} \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) ds \\ \int_S x_3 \sigma_{11} ds \\ \int_S -x_2 \sigma_{11} ds \end{cases}$$

Les quantités \vec{R} et \vec{M} forment les composantes du *torseur des efforts*. Elles sont les éléments de réduction au point G des efforts dans une section de la poutre. La schématisation des efforts par leurs éléments de réduction sera utilisée dans la théorie élastique des poutres. Mais pour cela, on doit utiliser un principe fondamental, appelé *principe de Saint-Venant*, selon lequel, loin des points d'application des sollicitations de la poutre, son comportement ne dépend que des éléments de réduction de ces sollicitations, et non de la manière dont elles sont appliquées. Il s'en suit que deux systèmes de forces (ou de vecteurs contraintes) ayant les mêmes éléments de réduction ne peuvent pas être distingués.

7.2.3 Énergie de déformation

En élasticité, l'énergie de déformation du solide peut s'écrire $W = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} dv$. En RdM, cette énergie peut être écrite simplement à l'aide des composantes des torseurs des efforts et des déformations. En effet, en utilisant la définition des vecteurs déformation \vec{e}_M et contrainte \vec{t}_M , on obtient :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_L \int_S \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} ds dl \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \int_S \vec{t}_M \cdot \vec{e}_M ds dl \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \int_S \vec{t}_M \cdot (\vec{e} + \vec{\kappa} \wedge \vec{GM}) ds dl \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \vec{e} \cdot \left(\int_S \vec{t}_M ds + \vec{\kappa} \cdot \int_S \vec{GM} \wedge \vec{t}_M ds \right) dl \\
 &= \frac{1}{2} \int_L (\vec{R} \cdot \vec{e} + \vec{M} \cdot \vec{\kappa}) dl
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ceci montre que les forces \vec{R} agissant sur la fibre moyenne L sont associées à sa déformation \vec{e} , tandis que les moments \vec{M} sont associés à sa courbure $\vec{\kappa}$ (gradient de la rotation).

7.3 Élasticité

7.3.1 Loi de comportement

La connaissance des déformations en tout point M du milieu curviligne permet d'obtenir les contraintes en utilisant la loi de comportement. Nous nous

sommes limités au cas d'un comportement élastique linéaire isotrope. En notant λ et μ les coefficients de Lamé du matériau constituant la poutre, on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\epsilon_{11} = E\epsilon_{11} = E(u'_1 + r'_2x_3 - r'_3x_2) \\ \sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} = \mu(u'_2 - r'_1x_3 - r_3) \\ \sigma_{13} = 2\mu\epsilon_{13} = \mu(u'_3 + r'_1x_2 + r_2) \end{cases}$$

Dans cette équation, E désigne le module d'Young du matériau. A partir de ces contraintes, il est possible de calculer les éléments de réduction des efforts appliqués en un point G quelconque de la ligne L sous la forme :

$$\vec{R} = \begin{cases} \int_S \sigma_{11} ds = ESu'_1 = ES e_1 \\ \int_S \sigma_{12} ds = \mu S(u'_2 - r_3) = \mu S e_2 \\ \int_S \sigma_{13} ds = \mu S(u'_3 + r_2) = \mu S e_3 \end{cases}$$

$$\vec{M} = \begin{cases} \int_S (x_2\sigma_{13} - x_3\sigma_{12}) ds = \mu I r'_1 = \mu I \kappa_1 \\ \int_S x_3\sigma_{11} ds = E(I_2 r'_2 - I_{23} r'_3) = E(I_2 \kappa_2 - I_{23} \kappa_3) \\ \int_S -x_2\sigma_{11} ds = E(-I_{23} r'_2 + I_3 r'_3) = E(I_3 \kappa_3 - I_{23} \kappa_2) \end{cases}$$

On constate alors que le torseur des efforts s'écrit relativement simplement en fonction du torseur des déformations sous la forme :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & -EI_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_{23} & EI_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix}$$

7.3.2 Conditions aux limites

Nous avons vu que, selon l'hypothèse de Navier (sections droites), chaque point du milieu curviligne (sur la fibre moyenne) possède six degrés de li-

bertés. Ces degrés de liberté servent à représenter :

- le déplacement de la fibre moyenne (vecteur déplacement \vec{u}),
- la rotation de la section droite (vecteur rotation \vec{r}).

De même, selon l'hypothèse de Saint-Venant (efforts concentrés), les efforts internes (de cohésion) dans un milieu curviligne sont représentés par deux vecteurs, et donc six composantes, qui sont :

- les forces de cohésion de la fibre moyenne (vecteur force \vec{R}),
- les moments de cohésion de la fibre moyenne (vecteur moment \vec{M}).

Les conditions aux limites sur une poutre porteront donc sur ces six degrés de liberté et ces six efforts de cohésion. La frontière $\partial\Omega$ sur laquelle s'appliquent ces conditions sera donc remplacée par des abscisses sur la fibre moyenne. Les conditions aux limites en déplacements les plus communes sont les suivantes :

- l'encastrement : si une poutre est encadrée à l'une de ses extrémités, alors en ce point on a $\vec{u} = \vec{r} = \vec{0}$, et les vecteurs \vec{R} et \vec{M} sont inconnus.
- la rotule : une rotule empêche tout déplacement en ce point, $\vec{u} = \vec{0}$, mais laisse les rotations libres. En contre-partie, les moments de cohésion en ce point sont nuls, soit $\vec{M} = \vec{0}$, tandis que les forces sont inconnues.
- l'appui simple : un appui simple empêche un déplacement dans une direction, par exemple $u_3 = 0$, et laisse libre les autres degrés de liberté. Le seul effort de cohésion non nul sera alors R_3 .

Ces conditions aux limites sont d'une grande importance pour l'intégration des équations d'équilibre (obtention des efforts de cohésion) et de la cinématique (obtention des déplacements).

Pour déterminer les conditions aux limites en efforts, il est important de se fixer un sens de parcours de la ligne moyenne L . En effet, le torseur des efforts (les vecteurs \vec{R} et \vec{M}) est lié au vecteur contrainte \vec{t}_M , et donc à la normale à la section S . Comme la normale à considérer est toujours *sortante*, le torseur des efforts sera affecté d'un signe opposé entre les deux côtés de la poutre. En général, la convention de signe suivante est adoptée (voir par exemple l'expression du principe des travaux virtuels et le traitement de la flexion trois points). En parcourant la ligne L de la gauche vers la droite :

- le torseur des efforts est affecté d'un signe + à droite du segment considéré sur la poutre (la normale sortante de S est \vec{x}_1),
- le torseur des efforts est affecté d'un signe – à gauche du segment considéré sur la poutre (la normale sortante de S est $-\vec{x}_1$).

7.4 Méthode de résolution

7.4.1 Calcul des efforts internes

Pour obtenir les efforts internes dans une poutre, nous écrivons comme en mécanique des milieux continus les équations d'équilibre du solide, que nous intégrons en utilisant les conditions aux limites.

Une façon élégante d'obtenir les équations d'équilibre dans un milieu curviligne est d'utiliser le principe des travaux virtuels. Pour cela, on définit un champ de déplacements virtuel \vec{u}_M^* , qui se traduit par un déplacement virtuel \vec{u}^* et une rotation virtuelle \vec{r}^* sur la fibre moyenne L , et qui produit un champ de déformations virtuel $\underline{\epsilon}_M^*$ dans chaque section S (figure 7.4).

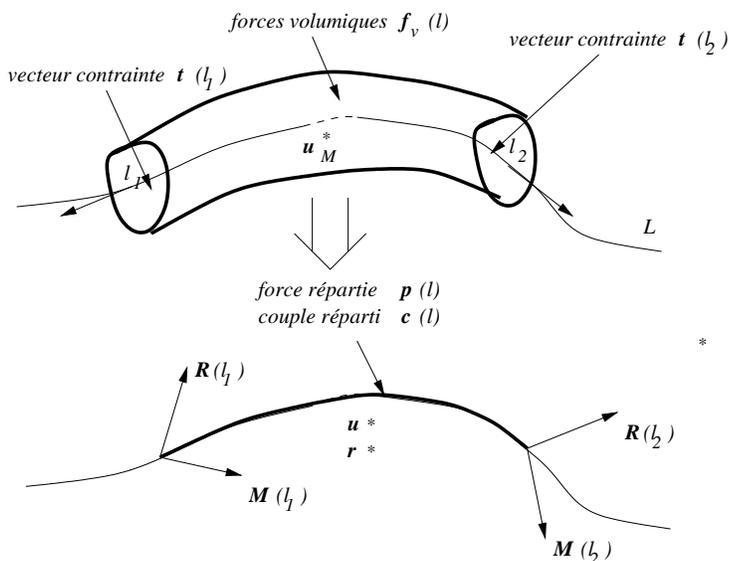


FIG. 7.4 – Segment d'une poutre où l'on applique le principe des travaux virtuels

Comme les bords des sections S sont toujours libres de contraintes, l'intégration sur la frontière du volume V se traduit par une intégrale sur la surface S aux points extrémités du segment de L considéré. En notant S_1 et S_2 les surfaces extrémités d'un tel volume, on remarque que sur S_1 , la normale sortante à la section est forcément opposée au sens de parcours de la fibre moyenne (vecteur $-\vec{x}_1$). Cela donne l'expression suivante du principe des travaux virtuels :

$$\int_V \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}_M^* dv - \int_V \vec{f}_v \cdot \vec{u}_M^* dv - \left(\int_{S_2} \vec{t}_M \cdot \vec{u}_M^* ds - \int_{S_1} \vec{t}_M \cdot \vec{u}_M^* ds \right) = 0$$

Dans cette équation, \vec{t}_M est le vecteur contrainte appliqué sur la section S considérée (avec une normale sortante). Les deux derniers termes peuvent donc être calculés assez simplement en remplaçant le champ virtuel \vec{u}_M^* par la cinématique issue de l'hypothèse de Navier. On obtient pour une section S quelconque (soit S_1 , soit S_2) :

$$\begin{aligned} \int_S \vec{t}_M \cdot \vec{u}_M^* ds &= \int_S \vec{t}_M \cdot (\vec{u}^* + \vec{r}^* \wedge \overrightarrow{GM}) ds \\ &= \vec{u}^* \cdot \int_S \vec{t}_M ds + \vec{r}^* \cdot \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{t}_M ds \\ &= \vec{R} \cdot \vec{u}^* + \vec{M} \cdot \vec{r}^* \end{aligned}$$

De même, l'intégrale sur V des forces de volume \vec{f}_v devient :

$$\begin{aligned} \int_V \vec{f}_v \cdot \vec{u}_M^* dv &= \int_L \int_S \vec{f}_v \cdot (\vec{u}^* + \vec{r}^* \wedge \overrightarrow{GM}) ds dl \\ &= \int_L \left(\vec{u}^* \cdot \int_S \vec{f}_v ds + \vec{r}^* \cdot \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{f}_v ds \right) dl \\ &= \int_{l_1}^{l_2} (\vec{p} \cdot \vec{u}^* + \vec{c} \cdot \vec{r}^*) dl \end{aligned}$$

Les vecteur \vec{p} et \vec{c} ainsi introduits représentent respectivement :

- une force par unité de longueur répartie sur la fibre moyenne (pour \vec{p}),
- un couple par unité de longueur réparti sur la fibre moyenne (pour \vec{c}).

Enfin, en utilisant la même méthode que pour l'équation 7.1, puis la définition du torseur des déplacements, puis enfin une intégration par parties, le premier terme de l'expression à annuler dans le principe des travaux virtuels s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\int_V \underline{\sigma} : \underline{\epsilon}^* dv &= \int_L (\vec{R} \cdot \vec{e} + \vec{M} \cdot \vec{\kappa}) dl \\
&= \int_L \begin{pmatrix} R_1 u_1' + R_2(u_2' - r_3^*) + R_3(u_3' + r_3^*) \\ + M_1 r_1' + M_2 r_2' + M_3 r_3' \end{pmatrix} dl \\
&= \int_L \begin{pmatrix} -R_1' u_1^* - R_2' u_2^* - R_3' u_3^* \\ -M_1' r_1^* - (M_2' - R_3) r_2^* - (M_3' + R_3) r_3^* \end{pmatrix} dl \\
&\quad + \vec{R}(l_2) \cdot \vec{u}^*(l_2) - \vec{R}(l_1) \cdot \vec{u}^*(l_1) \\
&\quad + \vec{M}(l_2) \cdot \vec{r}^*(l_2) - \vec{M}(l_1) \cdot \vec{r}^*(l_1) \\
&= - \int_{l_1}^{l_2} (\vec{R}' \cdot \vec{u}^* + (\vec{M}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}) \cdot \vec{r}^*) dl \\
&\quad + \vec{R}(l_2) \cdot \vec{u}^*(l_2) - \vec{R}(l_1) \cdot \vec{u}^*(l_1) \\
&\quad + \vec{M}(l_2) \cdot \vec{r}^*(l_2) - \vec{M}(l_1) \cdot \vec{r}^*(l_1)
\end{aligned}$$

En utilisant l'ensemble de ces résultats, le principe des travaux virtuels s'écrit simplement de la façon suivante sur tout segment de la fibre moyenne ne contenant pas d'effort ponctuel :

$$\forall (l_1, l_2) \in L, \int_{l_1}^{l_2} ((\vec{R}' + \vec{p}) \cdot \vec{u}^* + (\vec{M}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{R} + \vec{c}) \cdot \vec{r}^*) dl = 0$$

Cette équation doit être vérifiée sur tout segment, et pour tout champ de déplacement virtuel (c'est-à-dire pour tout torseur (\vec{u}^*, \vec{r}^*)). On en déduit les équations d'équilibre des milieux curvilignes :

$$\begin{cases} \vec{R}' + \vec{p} = \vec{0} \\ \vec{M}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{R} + \vec{c} = \vec{0} \end{cases}$$

Les équations d'équilibre sont deux équations vectorielles. Elles conduisent à six équations différentielles scalaires qui traduisent l'équilibre mécanique du milieu. Les forces volumiques sont représentées par les vecteurs \vec{p} (forces réparties sur le segment) et \vec{c} (couples répartis sur le segment). L'intégration de ces équations différentielles nécessite six conditions aux limites. Ces conditions sont obtenues aux points d'abscisse l_1 et l_2 , extrémités du segment considéré.

7.4.2 Calcul des déplacements et des rotations

La connaissance de $\vec{R}(l)$ et $\vec{M}(l)$ sur le segment permet, par la loi de comportement, d'obtenir les vecteurs de déformation $\vec{e}(l)$ et de courbure $\vec{\kappa}(l)$ constituant le torseur des déformations dans la poutre. Ce torseur est relié au torseur des déplacements (vecteur déplacement $\vec{u}(l)$ et vecteur rotation $\vec{r}(l)$) par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{\kappa} \\ \vec{u}' + \vec{x}_1 \wedge \vec{r} = \vec{e} \end{cases}$$

L'intégration des six équations différentielles ainsi obtenues permet d'obtenir le torseur des déplacements en tout point de la fibre moyenne de la poutre, et donc le champ de déplacement par la cinématique introduite. Lors de l'intégration, il est nécessaire d'utiliser six conditions aux limites, qui s'ajoutent aux six conditions aux limites en efforts utilisées précédemment.

Globalement, sur chaque segment considéré, les conditions aux limites (aux points d'abscisse l_1 et l_2) que l'on doit appliquer sont au nombre de douze. Ceci correspond aux six degrés de liberté de chaque côté du segment. En chaque point d'abscisse l_1 et l_2 , on doit donc connaître :

- soit u_1 , soit R_1 ,
- soit u_2 , soit R_2 ,
- soit u_3 , soit R_3 ,
- soit r_1 , soit M_1 ,
- soit r_2 , soit M_2 ,
- soit r_3 , soit M_3 .

En pratique, il arrive que certaines conditions aux limites proviennent de considérations de symétrie. Dans ce cas, les conditions portent sur la continuité des déplacements. Par exemple, en flexion trois points sur une poutre à plan moyen (voir exemple 2), on écrira la continuité de \vec{u}' au centre.

7.4.3 Poutre à plan moyen chargée dans son plan

Lorsqu'une poutre à plan moyen est chargée dans son plan, les efforts internes en tout point d'abscisse x (qui joue ici le rôle de l'abscisse curviligne l) sont :

- une réaction \vec{R} dans le plan xOy , donc avec deux composantes,

– un moment \vec{M} dirigé selon Oz , donc avec une composante.

Les deux composantes de \vec{R} sont alors notées $R_x = N$ (effort normal) et $R_y = T$ (effort tranchant), tandis que la composante non nulle de \vec{M} est notée $M_z = M$ (moment de flexion).

De même, les déplacements de tout point de la poutre (y compris des points situés hors de la ligne moyenne) sont représentés par :

- un vecteur déplacement de la fibre moyenne \vec{u} dans le plan xOy ,
- un vecteur rotation \vec{r} de la section selon Oz .

Les deux composantes non nulles de \vec{u} sont notées $u_x = u$ (déplacement normal) et $u_y = v$ (flèche), tandis que la composante non nulle de \vec{r} est notée $r_z = r$ (rotation). Nous voyons dans ce cas que nous travaillons sur trois degrés de liberté (au lieu de six).

Les équations d'équilibre deviennent dans ce cas fonctions des efforts N , T , et M , eux-mêmes fonctions de l'abscisse x sur la poutre. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} N' + p_x = 0 \\ T' + p_y = 0 \\ M' + T + c_z = 0 \end{cases}$$

On remarque sur ces équations que les charges et couples répartis sur la fibre moyenne de la poutre (issus des forces volumiques) se réduisent à :

- une force par unité de longueur \vec{p} avec seulement deux composantes non nulles p_x et p_y ,
- un couple par unité de longueur \vec{c} porté par l'axe z .

De même, les équations donnant les déplacements dans la poutre en fonction des composantes du torseur des déformations (que l'on obtient par la loi de comportement) sont :

$$\begin{cases} r' = \kappa_z = \frac{M}{EI_z} \\ u' = e_x = \frac{N}{ES} \\ v' - r = e_y = \frac{T}{\mu S} \end{cases}$$

En pratique, le terme e_y , dû à l'effort tranchant T , est souvent négligé. En effet, ce terme est d'un ordre de grandeur inférieur au terme de rotation r lors du calcul de la flèche v . Ceci est illustré dans le premier exemple.

On remarque finalement que, en négligeant la contribution de l'effort tranchant, et en dérivant la dernière équation, on obtient une équation différentielle en v et M . Cette équation est souvent utilisée pour obtenir rapidement la flèche de la poutre en fonction du moment M . La méthode est appelée *double intégration de la ligne élastique* :

$$EI_z v'' = M$$

7.5 Exercices

Flexion simple

La figure 7.5 représente une poutre à plan moyen chargée dans son plan en flexion par une force ponctuelle (vecteur \vec{P}).

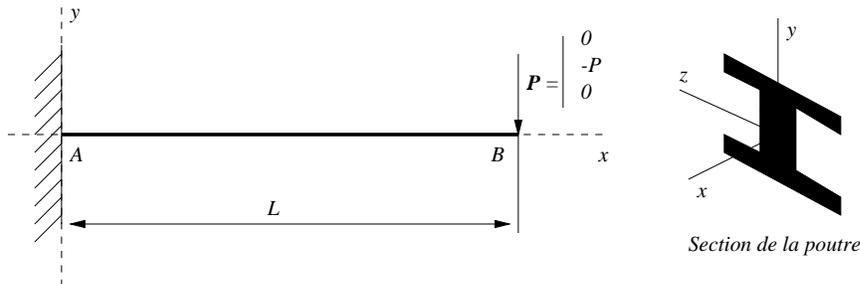


FIG. 7.5 – Flexion simple d'une poutre à plan moyen

- Donner l'expression du torseur des efforts internes en tout point de la poutre.
- En déduire le torseur des déformations en notant E le module d'Young du matériau, S la section de la poutre et I sont moment d'inertie par rapport à l'axe Oy .
- Donner la flèche et la rotation de la poutre en tout point x . Montrer que la contribution de l'effort tranchant peut être négligé dans ces expressions.

Flexion trois points

La figure 7.6 représente une poutre à plan moyen sollicitée en flexion trois points dans son plan par une force \vec{P} . Par symétrie, nous allons utiliser le segment $0 \leq x \leq L/2$ pour traiter le problème. Il s'en suit que la sollicitation ponctuelle \vec{P} est diminuée de moitié.

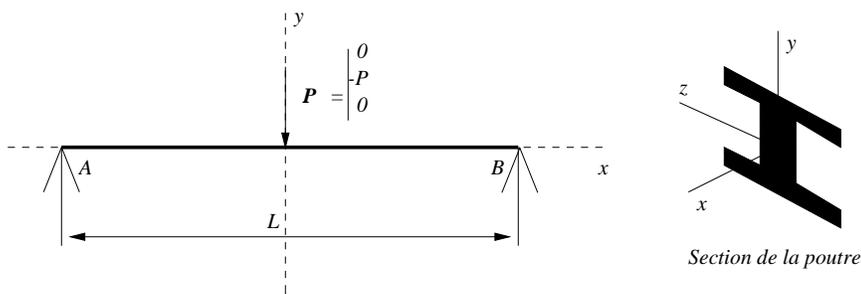


FIG. 7.6 – Flexion trois points d'une poutre à plan moyen

Donner l'expression du torseur des efforts, du torseur des déformations, de la flèche et de la rotation en tout point de la poutre.

Flexion quatre points

Nous allons étudier la flexion élastique (quatre points) d'une poutre dont la section circulaire présente une symétrie en y et z (voir figure ci-dessous, cas d'une section circulaire).

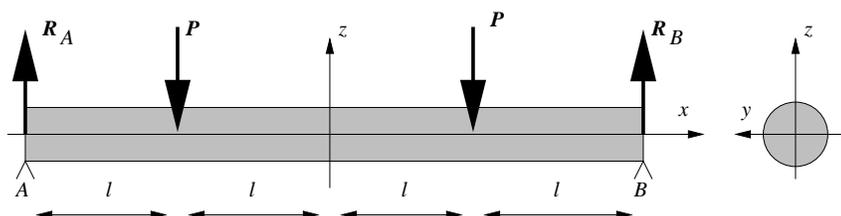


FIG. 7.7 – Schématisation du problème

L'objectif est de déterminer le champ de contraintes dans la section de la poutre entre les deux points de chargement.

- En utilisant des méthodes de RdM, montrer que la poutre est soumise à un moment fléchissant selon y constant entre les points d'application de la charge (flexion pure), et que toutes les autres composantes du torseur des efforts internes sont nulles. Donner l'expression de ce moment fléchissant.
- Montrer qu'un champ de contraintes uniaxial selon x , et linéaire selon y et z , est statiquement admissible (c'est-à-dire respecte l'équilibre et les conditions aux limites en contraintes) entre les points d'application de la charge. En déduire l'expression complète des contraintes dans la section de la poutre.

Bibliographie

- [1] E. Cosserat and F. Cosserat. Sur la théorie de l'élasticité. Premier mémoire, Faculté des sciences de Toulouse, 1896.
- [2] R. Fortunier. Elements de calcul tensoriel. cours ENSM-SE, 1998.
- [3] R. Fortunier. Introduction à la mécanique de cosserat. ENSM-SE, rapport MSN 98/001, 1998.
- [4] R. Hill. Aspects of invariance in solid mechanics. In *Advances in applied mechanics*, volume 18, pages 1–75. Academic Press, 1978.
- [5] J. Lemaitre and J. L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1988.
- [6] A. Lichnerowicz. *Eléments de calcul tensoriel*. Jacques Gabay, 1987. réimpression de Armand Colin (1946).
- [7] Murray and R. Spiegel. *Analyse vectorielle : cours et problèmes*. McGraw-Hill Inc, New-York, 1973. traduit de 'theory and problems of vector analysis'.
- [8] J. Rieu. Mécanique des milieux continus - élasticité. cours ENSM-SE, 1980.
- [9] C. Rieu-Bétréma. Elements de calcul tensoriel. cours ENSM-SE, 1985.

ANNEXES

Annexe A

ALGÈBRE TENSORIELLE

Dans l'ensemble de cette annexe, nous considérons un espace vectoriel euclidien E , de dimension N , sur le corps des réels \mathbb{R} . Chaque élément \vec{x} de cet espace sera appelé *vecteur*, et sera noté avec un trait dessous pour le différencier des *scalaires* du corps \mathbb{R} , par exemple λ .

Nous introduisons ici de façon très simplifiée la notion de tenseur euclidien. Dans un premier temps, nous définissons les composantes *covariantes* et *contravariantes* d'un vecteur \vec{x} , élément de E . Ensuite, nous introduisons la définition des tenseurs euclidiens et de leurs composantes. Enfin, les opérations classiques sur les tenseurs sont expliquées.

A.1 Composantes d'un vecteur

Nous considérons un vecteur quelconque \vec{x} de E , et un ensemble de N vecteurs de base \vec{a}_i . Il existe deux façons différentes d'exprimer les composantes de \vec{x} dans cette base :

- On peut décomposer \vec{x} sur ces vecteurs pour obtenir :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^N x^i \vec{a}_i \text{ souvent noté } \vec{x} = x^i \vec{a}_i \quad (\text{A.1})$$

Dans cette équation, une sommation implicite est effectuée sur les indices répétés en positions supérieure et inférieure dans un produit. C'est la convention de sommation dite d'*Einstein*.

- On peut effectuer le produit scalaire de \vec{x} avec ces vecteurs pour obtenir :

$$x_i = \vec{x} \cdot \vec{a}_i \quad (\text{A.2})$$

Le produit scalaire entre deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de E est ici noté $\vec{x} \cdot \vec{y}$. C'est un élément de \mathbb{R} . Il provient du caractère euclidien de l'espace vectoriel E , et possède différentes propriétés. Par exemple, si \vec{x} est non nul, alors $\vec{x} \cdot \vec{x}$ est strictement positif.

Les scalaires x^i et x_i ainsi obtenus sont les composantes du vecteur \vec{x} dans la base des \vec{a}_i . Elles peuvent être reliées entre elles par la relation :

$$x_i = \vec{x} \cdot \vec{a}_i = (x^j \vec{a}_j) \cdot \vec{a}_i = g_{ij} x^j \text{ avec } g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j \quad (\text{A.3})$$

Les termes g_{ij} ainsi définis forment une matrice symétrique de dimension $N \times N$, qui caractérise la base des \vec{a}_i . En effet, g_{ii} représente le carré de la norme du vecteur \vec{a}_i , tandis que les termes non diagonaux donnent l'angle entre les vecteurs de base. Par exemple, dans une base orthonormée, les termes g_{ij} forment la matrice identité, et les composantes x^i et x_i d'un vecteur \vec{x} coïncident.

Les composantes x^i du vecteur \vec{x} dans la base des \vec{a}_i sont dites *contravariantes*. En effet, si les vecteurs de base subissent une rotation, alors les composantes de \vec{x} dans la nouvelle base seront obtenues en appliquant la rotation inverse.

Les composantes x_i du vecteur \vec{x} dans la base des \vec{a}_i sont dites *covariantes*. En effet, si les vecteurs de base subissent une rotation, alors ces composantes seront modifiées en appliquant la même rotation.

Il est intéressant de définir ici l'ensemble des N vecteurs orthogonaux aux \vec{a}_i . Ces vecteurs sont en général notés \vec{a}^i , et sont tels que :

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On montre facilement que les vecteurs \vec{a}^i forment une base de E . Le vecteur \vec{x} peut donc être décomposé sur cette base. On constate que les composantes covariantes x_i de \vec{x} permettent de le décomposer sur cette base ($\vec{x} = x_i \vec{a}^i$), et que les composantes contravariantes x^i de \vec{x} sont les produits scalaires de \vec{x} sur cette base ($x^i = \vec{x} \cdot \vec{a}_i$). En définissant maintenant de façon analogue à précédemment les termes $g^{ij} = \vec{a}^i \cdot \vec{a}^j$, qui forment aussi une matrice

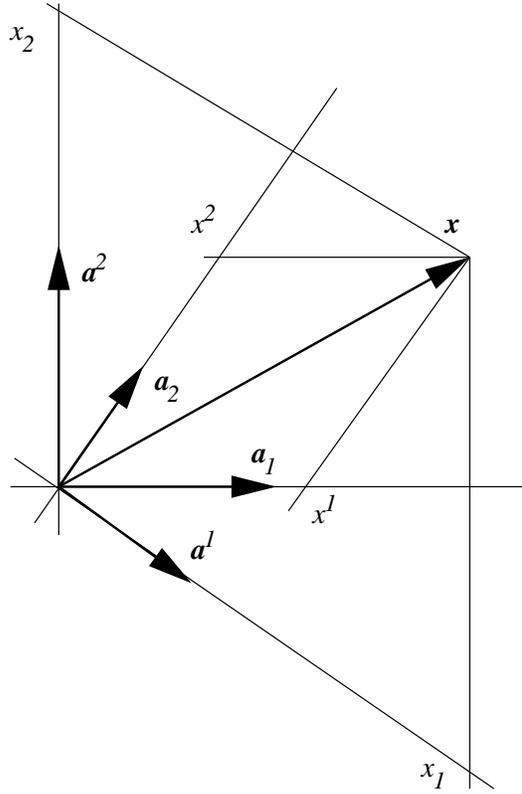


FIG. A.1 – Composantes d'un vecteur

symétrique de dimension $N \times N$, on peut écrire les relations fondamentales suivantes :

$$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = x^i \vec{a}_i = x_i \vec{a}^i \text{ avec } \begin{cases} x^i = g^{ij} x_j \\ x_i = g_{ij} x^j \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Composantes d'un tenseur

Les tenseurs sont construits sur la base d'une opération appelée "produit tensoriel", et notée \otimes . Nous nous limiterons ici au cas d'un seul espace vectoriel E , de sorte que nous ne considérerons que le produit tensoriel de E par lui-même (éventuellement plusieurs fois). Les propriétés du produit tensoriel sont telles que $E \otimes E$ (produit tensoriel de E par E) est lui-même un espace vectoriel. De plus, si les N vecteurs \vec{a}_i forment une base de E , alors les $N \times N$

vecteurs $\vec{a}_i \otimes \vec{a}_j$ forment une base d $E \otimes E$, qui est donc de dimension N^2 .

Par définition, un tenseur euclidien d'ordre n est un élément de l'espace vectoriel issu du produit tensoriel de E par lui-même n fois, $E \otimes \dots \otimes E$. Un tenseur d'ordre 1 est donc un élément de E , c'est-à-dire un vecteur. On peut alors définir ses composantes covariantes et contravariantes. Un tenseur d'ordre 2 est un élément de $E \otimes E$. On peut alors écrire ses composantes sous la forme :

$$\forall \underline{T} \in E \otimes E, \underline{T} = T^{ij} \vec{a}_i \otimes \vec{a}_j = T_{ij} \vec{a}^i \otimes \vec{a}^j = T_i^j \vec{a}^i \otimes \vec{a}_j = T_j^i \vec{a}_i \otimes \vec{a}^j \quad (\text{A.6})$$

L'ordre d'un tenseur correspond donc au nombre d'indices sur ses composantes. Dans le cas d'un tenseur d'ordre 2, \underline{T} , on remarque que l'on peut définir ses composantes covariantes T_{ij} , ses composantes contravariantes T^{ij} , et des composantes mixtes T_i^j . Il en est évidemment de même pour des tenseurs d'ordre supérieur.

Un tenseur d'ordre zéro est un scalaire invariant par changement de système de coordonnées. Un tenseur est dit symétrique par rapport à deux indices covariants ou deux indices contravariants si ses composantes restent inchangées dans une permutation des deux indices. Il sera dit antisymétrique par rapport à ces indices si ses composantes changent de signe dans une permutation.

Les termes g_{ij} , g^{ij} , $g_i^j = \delta_i^j$ et $g_j^i = \delta_j^i$ forment les composantes d'un tenseur symétrique appelé "tenseur métrique" ou "tenseur fondamental", noté \underline{g} , qui est d'une grande importance en calcul tensoriel. En effet, il permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques. On peut d'ailleurs remarquer que les composantes contravariantes g^{ij} sont obtenues en "inversant" la matrice formée par les g_{ij} , tandis que les composantes "mixtes" g_i^j forment la matrice identité.

Il existe enfin pour les tenseurs un autre type de composantes, largement utilisé en physique, dans les espaces euclidiens. Ces composantes sont d'ailleurs appelées "composantes physiques". Ce sont les projections du tenseur sur les vecteurs de base de l'espace. Nous avons par exemple pour un vecteur \vec{x} les composantes physiques x_I suivantes :

$$x_I = \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}_i}{\|\vec{a}_i\|} = \frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ij} x^j}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{A.7})$$

De même, pour un tenseur \underline{A} d'ordre 2, les composantes physiques A_{IJ} s'obtiennent de la façon suivante :

$$A_{IJ} = \underline{A} : \frac{\vec{a}_i \otimes \vec{a}_j}{\|\vec{a}_i \otimes \vec{a}_j\|} = \frac{A_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} = \frac{g_{ik}g_{jl}A^{kl}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \quad (\text{A.8})$$

Dans le cas d'une base orthogonale, les composantes de la métrique forment une matrice diagonale, ce qui permet de simplifier les relations précédentes. Dans un système orthonormé, les composantes du tenseur métrique coïncident toutes avec la matrice identité. Il s'en suit que tous les types de composantes d'un tenseur sont identiques. Dans ce cas, les indices sont tous placés "en bas" en ne considérant que les composantes covariantes des tenseurs. En calcul matriciel, ceci est couramment utilisé. La convention de sommation d'Einstein est alors étendue aux indices répétés en même position (et non en haut et en bas comme c'est normalement le cas).

A.3 Opérations sur les tenseurs

La somme de deux tenseurs du même ordre est un tenseur également du même ordre, dont les composantes sont la somme des composantes des tenseurs ajoutés. Toutefois, il convient de sommer les composantes de même type uniquement. De même, la soustraction de deux tenseurs donne un tenseur dont les composantes sont obtenues par soustraction.

Le produit de deux tenseurs (produit tensoriel) se fait en multipliant les composantes. Par contre, dans ce cas, le tenseur obtenu a un ordre égal à la somme des ordres des tenseurs multipliés. De plus, le produit de composantes de types différents peut être réalisé. Notons enfin que l'on ne peut pas écrire n'importe quel tenseur comme le produit de deux tenseurs d'ordres inférieurs. Pour cette raison, la division des tenseurs n'est pas toujours possible.

Si on pose l'égalité entre un indice contravariant et un indice covariant des composantes d'un même tenseur, le résultat indique qu'on doit faire une sommation sur les indices égaux d'après la convention d'Einstein. La somme résultante est la composante d'un tenseur d'ordre $N - 2$ où N est l'ordre du tenseur initial. Le procédé s'appelle une contraction. Par exemple, dans un tenseur \underline{X} d'ordre 4, si on applique une contraction à ses composantes X_{ij}^{kl} en posant $l = j$, on obtient les composantes $Y_i^k = X_{i1}^{k1} + \dots + X_{iN}^{kN}$ d'un nouveau tenseur \underline{Y} d'ordre 2.

Par un produit tensoriel de deux tenseurs suivi d'une contraction, on obtient un nouveau tenseur appelé *produit contracté* des tenseurs donnés. Par exemple, le produit d'un tenseur \underline{X} d'ordre 4 et d'un tenseur \underline{Y} d'ordre 2 fournit un tenseur d'ordre 6. En effectuant une contraction d'indice, on obtient un tenseur \underline{Z} d'ordre 4 dont les composantes sont par exemple $Z_{kl}^{im} = X_{kl}^{ij} Y_j^m$.

L'exemple le plus courant de produit contracté est le produit scalaire. En effet, le produit tensoriel de deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} (d'ordre 1) donne normalement un tenseur d'ordre 2 $\vec{x} \otimes \vec{y}$, dont les composantes sont les produits $x_i y_j$ (covariantes), $x^i y^j$ (contravariantes), $x_i y^j$ et $x^i y_j$ (mixtes). La contraction se fait en posant $i = j$ sur les composantes mixtes, de sorte que l'on retrouve $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y^i = x^i y_i$. La notation du produit scalaire (le *point*) est donc souvent utilisée pour indiquer qu'il y a contraction sur un indice.

Parfois, on utilise un produit "doublement contracté" de deux tenseurs. Il y a alors sommation sur deux indices, et l'ordre du tenseur final est diminué de 4. C'est le cas par exemple de l'énergie de déformation élastique W (scalaire ou tenseur d'ordre 0), issue du produit doublement contracté entre les tenseurs de contraintes $\underline{\sigma}$ (ordre 2) et de déformations $\underline{\epsilon}$ (ordre 2). Dans ce cas, on indique cette double contraction par un *double point* ":", comme par exemple lorsque l'on écrit $W = \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} = \sigma^{ij} \epsilon_{ij}$.

Annexe B

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Nous nous plaçons ici dans un espace ponctuel (affine) euclidien E_0 , dont l'espace vectoriel associé E est de dimension N , muni d'un repère (R) d'origine O et d'un système de coordonnées curvilignes (x^i) . Ce système de coordonnées est caractérisé par N fonctions plusieurs fois continûment différentiables reliant les coordonnées curvilignes x^i d'un point M à ses coordonnées X^i dans le repère (R) . De plus, nous supposons qu'il existe autour du point M une relation bi-univoque entre les x^i et les X^i . Les coordonnées curvilignes les plus utilisées en dimension 3 sont les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .

Dans un premier temps, nous définissons le repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes. Ensuite, nous étudions la variation de ce repère autour d'un point donné, variation caractérisée par les symboles de Christoffel. Enfin, nous introduisons les notions de différentielle absolue d'un tenseur et de dérivée covariante, qui sont à la base des opérateurs utilisés en physique (gradient, divergence, ...).

B.1 Repère naturel

En un point M de coordonnées curvilignes x^i , on définit un repère naturel de la façon suivante. L'origine du repère est fixée en M , et les vecteurs de base \vec{a}_i sont définis par :

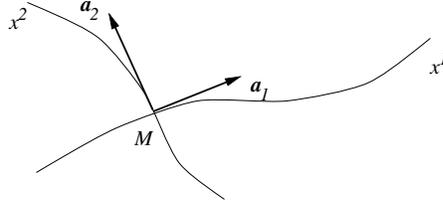


FIG. B.1 – *Repère naturel en un point de l'espace*

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}_i dx^i \text{ soit } \overrightarrow{a}_i = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^i} \quad (\text{B.1})$$

Ce repère naturel est donc tangent aux lignes de coordonnées (figure B.1). L'équation précédente montre que les dx^i sont les composantes contravariantes de $d\overrightarrow{OM}$ (vecteur de E) dans le repère naturel. Il est donc possible de définir le tenseur métrique (souvent appelé "métrique") de cet espace. Les composantes covariantes de ce tenseur sont issues du repère naturel ($g_{ij} = \overrightarrow{a}_i \cdot \overrightarrow{a}_j$). Ce tenseur dépend du point M , origine du repère naturel, et donc de la position à laquelle on se trouve dans l'espace E_0 .

Supposons maintenant que l'on définisse un nouveau système de coordonnées curvilignes (y^i). Au point M , un nouveau repère naturel sera constitué du point M et de vecteurs de base \overrightarrow{b}_i . D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on peut écrire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a}_i = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^i} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \overrightarrow{b}_j = A_i^j \overrightarrow{b}_j \text{ avec } A_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \\ \overrightarrow{b}_j = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y^j} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \overrightarrow{a}_i = B_j^i \overrightarrow{a}_i \text{ avec } B_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Cette équation montre qu'un changement de coordonnées curvilignes est caractérisé par un changement de repère naturel. Les composantes d'un tenseur changeront lorsque, en un point M fixé, on changera de système de coordonnées. Pour obtenir les nouvelles composantes du tenseur, on utilisera les relations de changement de base sur les vecteurs de base.

Les composantes d'un tenseur peuvent également changer lorsque l'on déplace le point M , tout en gardant le même système de coordonnées, puisque le repère naturel change. On parle alors de "champs de tenseurs".

B.2 Opérateurs différentiels

Nous avons vu que, en chaque point M de l'espace E_0 , on pouvait caractériser la métrique de cet espace par un tenseur de composantes covariantes g_{ij} . Ainsi, si l'on se déplace de quantités dx^i dans le repère naturel des \vec{a}_i , l'élément de longueur engendré ds est obtenu par le produit scalaire, dans E , du vecteur $d\vec{x}$ de composantes dx^i avec lui-même. On obtient alors :

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{B.3})$$

Le problème fondamental en géométrie différentielle réside dans le fait que le repère naturel, et donc la métrique, dépend du point M de l'espace. Il s'en suit que deux tenseurs définis par leurs composantes par rapport à deux repères différents (ou en deux points distincts de l'espace) ne pourront être comparés que si l'on connaît le lien entre ces deux repères. L'objectif des symboles de Christoffel est de réaliser le lien entre deux repères naturels infiniment voisins \vec{a}_i et $\vec{a}_i + d\vec{a}_i$.

Lorsque l'on déplace l'origine M du repère naturel d'une quantité $d\vec{x}$, les vecteurs de base \vec{a}_i de ce repère se modifient d'une quantité $d\vec{a}_i$. En notant dans le repère naturel initial dx^i et dx_i les composantes de $d\vec{x}$ ($d\vec{x} = dx^i \vec{a}_i$, $dx_i = d\vec{x} \cdot \vec{a}_i$) et $d\omega_i^j$ et $d\omega_{ij}$ celles de $d\vec{a}_i$ ($d\vec{a}_i = d\omega_i^j \vec{a}_j$, $d\omega_{ij} = d\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$), les symboles de Christoffel relient ces quantités sous la forme :

$$\begin{cases} d\omega_{kj} = \Gamma_{ikj} dx^i \\ d\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Les fonctions Γ_{ikj} et Γ_{ij}^k sont appelées symboles de Christoffel respectivement de première et de deuxième espèce. Il s'agit de N^3 fonctions reliées entre elles sous la forme $\Gamma_{ikj} = g_{kl} \Gamma_{ij}^l$ et $\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ilj}$ et définies en fonction du tenseur métrique par :

$$\begin{cases} \Gamma_{ikj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \\ \Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ilj} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Considérons maintenant un vecteur quelconque \vec{u} défini par ses composantes contravariantes u^i dans le repère naturel des \vec{a}_i au point M . Lorsque l'on va se déplacer d'une quantité infinitésimale sur le système de coordonnées curvilignes, les composantes de \vec{u} vont être modifiées d'une quantité du^i ,

mais comme le repère naturel change également, un terme (souvent appelé "convectif") va venir s'ajouter à cette variation pour obtenir :

$$d\vec{u} = du^j \vec{a}_j + u^j d\vec{a}_j \quad (\text{B.6})$$

Le dernier terme de cette équation est appelé "convectif". Il est dû à la variation du repère naturel au cours du déplacement dans l'espace. Il est illustré sur la figure B.2, où un vecteur \vec{u} est simplement transporté dans le système de coordonnées. On n'a donc pas de variation de ses coordonnées dans le repère initial ($du^i = 0$), mais ses nouvelles composantes (dans le nouveau repère naturel) sont tout de même modifiées.

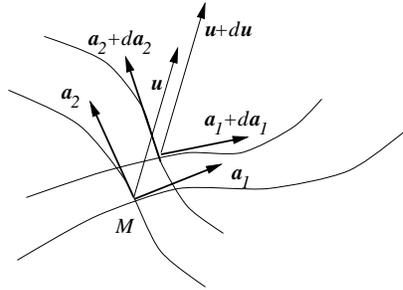


FIG. B.2 – Transport d'un vecteur en coordonnées curvilignes

En utilisant les définitions précédentes, les composantes contravariantes du vecteur $d\vec{u}$ peuvent être écrites sous la forme :

$$d\vec{u} = (\Delta u^k) \vec{a}_k \text{ avec } \Delta u^k = du^k + u^j d\omega_j^k \quad (\text{B.7})$$

On donne à Δu^k le nom de "différentielle absolue" de u^k . Il s'agit des composantes contravariantes du tenseur $d\vec{u}$, ce qui n'est pas le cas pour les termes du^k . Par abus de langage, on dit souvent que $d\vec{u}$ est la différentielle absolue de \vec{u} . En introduisant maintenant les dérivées partielles par rapport aux coordonnées curvilignes x^i , on peut écrire :

$$\Delta u^k = u_{,i}^k dx^i \text{ avec } u_{,i}^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k u^j \quad (\text{B.8})$$

Les termes $u_{,i}^k$ sont les composantes mixte d'un tenseur appelé "dérivée covariante" de \vec{u} . Si \vec{u} avait été donné par ses composantes covariantes u_k , alors

le même raisonnement nous aurait conduit à définir la dérivée covariante de \vec{u} par rapport à ses composantes covariantes. On peut résumer ces résultats par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u^k_{,i} &= \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} u^j \\ u_{k,i} &= \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \Gamma^j_{ki} u_j \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

La notion différentielle absolue et de dérivée covariante permet de définir les principaux opérateurs différentiels intervenant en physique :

- Le *gradient* d'un tenseur est à son tour un tenseur, dont les composantes sont les dérivées covariantes des composantes du tenseur de départ. Le gradient d'un tenseur d'ordre N est donc un tenseur d'ordre $N + 1$. Si f est un scalaire (tenseur d'ordre 0, invariant par changement de repère), le gradient de f est un tenseur d'ordre 1 (un vecteur) dont les composantes covariantes sont définies par $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Si \vec{u} est un vecteur (tenseur d'ordre 1), le gradient de \vec{u} est un tenseur d'ordre 2, dont les composantes covariantes et mixtes sont :

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k \quad \text{et} \quad u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k \quad (\text{B.10})$$

Le gradient est largement présent dans les disciplines scientifiques. Il sert par exemple à définir les déformations en mécanique, et les forces motrices en thermique (gradient thermique) et en chimie minérale (gradients de potentiels chimiques ou d'activité).

- La *divergence* d'un tenseur est à son tour un tenseur, dont les composantes sont obtenues par contraction de sa dérivée covariante (son gradient) par rapport à son dernier indice contravariant. La divergence d'un tenseur d'ordre N est donc un tenseur d'ordre $N - 1$. La divergence d'un vecteur \vec{u} est donc le scalaire $u^i_{,i}$, tandis que celle d'un tenseur \vec{A} d'ordre 2 est un vecteur dont les composantes contravariantes sont $A^{ij}_{,j}$.

La divergence est largement présente dans les équations d'équilibre en mécanique, ainsi que dans les équations de conservation en thermique et en transfert de masse. Elle est principalement appliqué sur des tenseurs d'ordre 1 et 2.

- Le *rotationnel* appliqué sur un vecteur \vec{u} (tenseur d'ordre 1) est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes covariantes sont $u_{i,j} - u_{j,i}$. Du fait de la symétrie des symboles de Christoffel de seconde espèce sur les indices covariants, les composantes covariantes du rotationnel d'un vecteur s'écrivent simplement $\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}$. Le rotationnel d'un vecteur est un

tenseur anti-symétrie. Il est présent dans les équations de Maxwell en électromagnétisme. Il peut être écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

où R_1 , R_2 et R_3 sont les composantes d'un *vecteur rotation* \overrightarrow{R} , parfois appelé *vecteur dual*.

- Le *laplacien* d'un tenseur, souvent noté Δ , est la divergence du gradient. Cet opérateur conserve donc l'ordre du tenseur. Appliqué sur une fonction scalaire f , on obtient le scalaire $\Delta(f) = (g^{ij} f_{,i})_{,j} = g^{ij} f_{,ji}$. Appliqué sur un vecteur \overrightarrow{u} , on obtient un tenseur d'ordre 1 dont les composantes covariantes sont $g^{kj} u_{i,jk}$.

Le laplacien est largement utilisé dans les équations d'équilibre ou de bilan, lorsque le comportement du matériau est linéaire.

Annexe C

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

C.1 Coordonnées cartésiennes

Dans un système de coordonnées cartésiennes, l'espace est muni d'un repère orthonormé fixe. Donc, tous les types de composantes coïncident. Nous noterons ici x , y et z les trois directions de l'espace. Ceci nous permet de définir :

- le gradient d'un scalaire f :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

- le gradient d'un vecteur \vec{u} :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

- la divergence d'un vecteur \vec{u} :

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{C.3})$$

- la divergence d'un tenseur \underline{A} du second ordre :

$$\vec{\text{div}}(\underline{A}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

– le vecteur rotation associé au rotationnel d'un vecteur \vec{u} :

$$\begin{cases} R_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ R_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ R_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{C.6})$$

– le laplacien d'un vecteur \vec{u} :

$$\vec{\Delta}(\vec{u}) = \begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

C.2 Coordonnées cylindriques

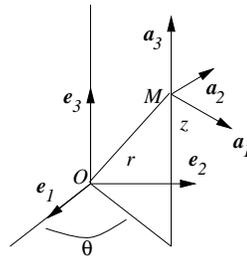


FIG. C.1 – *Système de coordonnées cylindriques*

Le système de coordonnées cylindriques est un système particulier de coordonnées curvilignes défini de la façon suivante (figure C.1). Soit un espace vectoriel E de dimension 3 sur le corps des réels, muni d'un système de coordonnées orthonormées (x^i) dans un repère (\vec{e}_i) . Soit \vec{u} un vecteur de E joignant les points O et M . Le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est généré par un repère naturel (\vec{a}_i) tel que, au voisinage du point M :

$$d\vec{u} = dx^1 \vec{e}_1 + dx^2 \vec{e}_2 + dx^3 \vec{e}_3 = dr \vec{a}_1 + d\theta \vec{a}_2 + dz \vec{a}_3 \quad (\text{C.8})$$

avec la relation suivante entre les coordonnées :

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta \\ x^2 = r \sin \theta \\ x^3 = z \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Les vecteurs \vec{a}_i ont donc comme composantes dans le repère orthonormé :

$$\vec{a}_1 = \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\text{C.10})$$

ce qui donne pour la métrique :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

Les composantes physiques d'un vecteur \vec{u} sont donc :

$$\begin{cases} u_r = u_1 = u^1 \\ u_\theta = \frac{u_2}{r} = r u^2 \\ u_z = u_3 = u^3 \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

tandis que celles d'un tenseur du second ordre \underline{A} seront :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A_{11} = A^{11} & A_{r\theta} = \frac{A_{12}}{r} = r A^{12} & A_{rz} = A_{13} = A^{13} \\ A_{\theta r} = \frac{A_{21}}{r} = r A^{21} & A_{\theta\theta} = \frac{A_{22}}{r^2} = r^2 A^{22} & A_{\theta z} = \frac{A_{23}}{r} = r A^{23} \\ A_{zr} = A_{31} = A^{31} & A_{z\theta} = \frac{A_{32}}{r} = r A^{32} & A_{zz} = A_{33} = A^{33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Les symboles de Christoffel de première espèce sont obtenus à l'aide de leur définition et de la métrique définie précédemment sous la forme :

$$\Gamma_{i1j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$\Gamma_{i2j} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\Gamma_{i3j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

L'ensemble de ces équations permet de retrouver l'expression des opérateurs physiques en coordonnées cylindriques. On trouve par exemple les composantes physiques suivantes :

– le gradient d'un scalaire f :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

– le gradient d'un vecteur \vec{u} :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

– la divergence d'un vecteur \vec{u} :

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{C.19})$$

– la divergence d'un tenseur \underline{A} du second ordre symétrique :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\underline{A}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} + \frac{A_{r\theta} + A_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} + \frac{A_{zr}}{r} \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

– les composantes du "vecteur rotation" associé au rotationnel d'un vecteur \vec{u} :

$$\begin{cases} R_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ R_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ R_z = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\text{C.22})$$

C.3 Coordonnées sphériques

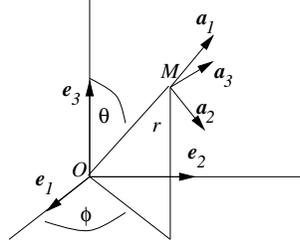


FIG. C.2 – *Système de coordonnées sphériques*

Le système de coordonnées sphériques est un système particulier de coordonnées curvilignes défini de la façon suivante (figure C.2). Soit un espace vectoriel E de dimension 3 sur le corps des réels, muni d'un système de coordonnées orthonormées (x^i) dans un repère (\vec{e}_i) . Soit \vec{u} un vecteur de E joignant les points O et M . Le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) est généré par un repère naturel (\vec{a}_i) tel que, au voisinage du point M :

$$d\vec{u} = dx^1 \vec{e}_1 + dx^2 \vec{e}_2 + dx^3 \vec{e}_3 = dr \vec{a}_1 + d\theta \vec{a}_2 + d\phi \vec{a}_3 \quad (\text{C.23})$$

avec des coordonnées liées entre elles sous la forme :

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \phi \\ x^2 = r \sin \theta \sin \phi \\ x^3 = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Les vecteurs \vec{a}_i ont donc comme composantes :

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

ce qui donne pour la métrique :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.26})$$

Les composantes physiques d'un vecteur \vec{u} sont donc :

$$\begin{cases} u_r = u_1 = u^1 \\ u_\theta = \frac{u_2}{r} = ru^2 \\ u_\phi = \frac{u_3}{r \sin \theta} = r \sin \theta u^3 \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

tandis que celles d'un tenseur du second ordre \underline{A} seront :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A_{11} & A_{r\theta} = \frac{A_{12}}{r} & A_{r\phi} = \frac{A_{13}}{r \sin \theta} \\ A_{\theta r} = \frac{A_{21}}{r} & A_{\theta\theta} = \frac{A_{22}}{r^2} & A_{\theta\phi} = \frac{A_{23}}{r^2 \sin \theta} \\ A_{\phi r} = \frac{A_{31}}{r \sin \theta} & A_{\phi\theta} = \frac{A_{32}}{r^2 \sin \theta} & A_{\phi\phi} = \frac{A_{33}}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

ou :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A^{11} & A_{r\theta} = rA^{12} & A_{r\phi} = r \sin \theta A^{13} \\ A_{\theta r} = rA^{21} & A_{\theta\theta} = r^2 A^{22} & A_{\theta\phi} = r^2 \sin \theta A^{23} \\ A_{\phi r} = r \sin \theta A^{31} & A_{\phi\theta} = r^2 \sin \theta A^{32} & A_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta A^{33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.29})$$

Les symboles de Christoffel de première espèce sont obtenus à l'aide de leur définition et de la métrique définie précédemment :

$$\Gamma_{i1j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.30})$$

$$\Gamma_{i2j} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r^2}{2} \sin(2\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{2} \sin(2\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{C.31})$$

$$\Gamma_{i3j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \sin(2\theta) \\ r \sin^2 \theta & \frac{r^2}{2} \sin(2\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \frac{1}{r} & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.32})$$

Ces équations permettent de retrouver les opérateurs différentiels classiques en coordonnées sphériques. On trouve par exemple les composantes physiques des tenseurs suivants :

– le gradient d'un scalaire f :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

– le gradient d'un vecteur \vec{u} :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} u_\phi \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} u_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

– la divergence d'un vecteur \vec{u} :

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} u_\theta \quad (\text{C.35})$$

– la divergence d'un tenseur \underline{A} symétrique d'ordre 2 :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\underline{A}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2A_{rr} - A_{\theta\theta} - A_{\phi\phi}}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_{r\theta} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\theta}}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} (A_{\theta\theta} - A_{\phi\phi}) \\ \frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\phi}}{r} + 2 \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_{\theta\phi} \end{cases} \quad (\text{C.36})$$

– le "vecteur rotation" associé au rotationnel d'un vecteur \vec{u} :

$$\begin{cases} R_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} u_\phi \\ R_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \\ R_\phi = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{C.37})$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\text{C.38})$$