

Table des Matières

1	Difféomorphisme dans un espace de Banach	2
1.1	Diverses notions de différentiabilité	2
1.1.1	Dérivée directionnelle	2
1.1.2	Applications linéaires continues	2
1.1.3	Gâteaux-différentiabilité	3
1.1.4	Fréchet différentiabilité	3
1.1.5	Lien entre Fréchet et Gâteaux différentiabilité	3
1.1.6	Différentielles d'ordre supérieur	4
1.2	Difféomorphisme	4

Chapitre 1

Difféomorphisme dans un espace de Banach

1.1 Diverses notions de différentiabilité

Soient $(X, \|\cdot\|)$ et $(Y, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et $f : X \rightarrow Y$ une application

1.1.1 Dérivée directionnelle

Définition 1.1.1 On dit que f est dérivable en x dans la direction v si la limite $Df_x(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$ existe.
 $df_x(v)$ s'appelle la dérivée directionnelle de f en x dans la direction v .

1.1.2 Applications linéaires continues

On note $L_c(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y . Rappelons qu'une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si elle est continue en 0 et ceci a lieu si et seulement si T est bornée.

$$\|T\|_{L_c(X, Y)} = \sup_{x \in X / \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Définition 1.1.2 $f : X \rightarrow Y$ un isomorphisme si et seulement si $f \in L_c(X, Y)$, bijective et f^{-1} est continue.

1.1.3 Gâteaux-différentiabilité

Définition 1.1.3 On dit que f est différentiable au sens de R- Gâteaux (G -différentiable en abrégé) en x lorsque $Df_x(v)$ existe pour toute v et $Df_x : v \rightarrow Df_x(v)$ est une application linéaire continue de X dans Y . ($Df_x \in L_c(X, Y)$).

1.1.4 Fréchet différentiabilité

Définition 1.1.4 On dit que f est différentiable au sens de M- Fréchet (F -différentiable en abrégé) en $x \in X$, s'il existe $A \in L_c(X, Y)$ et tel que:

$$\frac{\|f(x+u) - f(x) - A(u)\|}{\|u\|} \rightarrow 0 \quad \text{quand } u \rightarrow 0$$

$$\text{Ou encore: } f(x+u) = f(x) + A(u) + o(u)$$

L'application linéaire continue A , notée $D_F f(x)$ ou simplement $Df(x)$.

la notation $o(u) : X \rightarrow \mathbb{R}$ désignant une fonction tel que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{o(u)}{\|u\|} = 0$.

Définition 1.1.5 Soient U un ouvert de X . On dit que l'application $f : X \rightarrow Y$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue, $df_a : X \rightarrow Y$ telle que

$$\|f(a+u) - f(a) - df_a(u)\|_Y = o(u)$$

Il est facile de voir que cette application linéaire est unique. On appelle df_a la différentielle de f au point a .

On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U .

On dit que f est de classe C^1 sur U si elle est différentiable en tout point de U et si l'application $df : U \rightarrow L(X, Y), a \rightarrow df_a$ est continue.

1.1.5 Lien entre Fréchet et Gâteaux différentiabilité

Il est clair que si f est Fréchet différentiable alors f est Gâteaux différentiable.

La réciproque est fautive en général comme le montre l'exemple simple suivant :

Exemple 1

$$f(x, y) = \frac{x^6}{(y - x^2)^2 + x^8} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

et $f(0, 0) = 0$.

f est G -différentiable en $(0, 0)$ mais elle n'est pas F -différentiable en $(0, 0)$.

1.1.6 Différentielles d'ordre supérieur

Soient $f : U \rightarrow Y$ une fonction différentiable et U est un ouvert de l'evn $\mathbb{X}$

$$Df : U \rightarrow L_c(X, Y), x \rightarrow Df(x).$$

* On dit que f est deux fois différentiable si l'application Df est différentiable.

c'est à dir il existe une application $D^2f : U \rightarrow L_c(X, L_c(X, Y)) = L_c^2(X, Y)$.

* On dit que f est 3- différentiable si l'application D^2f est différentiable.

c'est à dir il existe une application $D^3f : U \rightarrow L_c(X, L_c^2(X, Y)) = L_c^3(X, Y)$.

.....

* On dit que f est r - différentiable ($r \in \mathbb{N}^*$) si l'application $D^r f$ est différentiable.

c'est à dir il existe une application $D^{r+1}f : U \rightarrow L_c(X, L_c^r(X, Y))$.

1.2 Difféomorphisme

Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E , V un ouvert de F (U et V non vides)
et $f : U \rightarrow V$ une application

Définition 1.2.1 On dit que f est un **homéomorphisme** de U sur V si et seulement si f est une bijection et f, f^{-1} sont continues.

Définition 1.2.2 On dit que f est un **difféomorphisme** de U sur V si et seulement si f est une bijection et f, f^{-1} sont différentiables (respectivement sur U et sur V).

Définition 1.2.3 On dit que f est un **difféomorphisme de classe C^k** de U sur V si et seulement si f est une bijection et f, f^{-1} des classes C^k (respectivement sur U et sur V).

Définition 1.2.4 On dit que f est un **difféomorphisme local de classe C^k** de E sur F si et seulement si pour tout $a \in E$ il existe un voisinage V de a tel que $f : V \rightarrow f(V)$ est un **difféomorphisme de classe C^k** .

Définition 1.2.5 On dit que f est un **difféomorphisme global de classe C^k** de E sur F si et seulement si $f : E \rightarrow F$ est un **difféomorphisme de classe C^k** .

Définition 1.2.6 (Banach). Soit $L \in L_c(E, F)$. Si L est bijective alors L^{-1} est continue.

Proposition 1.2.1 Si f est un difféomorphisme alors f est un homéomorphisme.

Preuve. Clair ■

Proposition 1.2.2 Si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme et $a \in U$ alors

$$Df_{f(a)}^{-1} = (Df_a)^{-1}$$

et Df_a est un isomorphisme.

Preuve. On a $f^{-1} \circ f(x) = x$ alors $d(f \circ f^{-1})_a = I_x$
alors $df_{f(a)}^{-1} = I_x$ donc $df_{f(a)}^{-1} = f_x^{-1}$. ■

Corollaire 1.2.1 Soit $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^1 avec U un ouvert non vide.

f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si elle est injective, et sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de E sur F .

Preuve. il suffit de montrer que $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ une application de classe C^1 .

(On a sa différentielle est en tout point de F est continue.) ■

Corollaire 1.2.2 Dimension finie. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \rightarrow f(U)$ injective et de classe C^1 . Alors f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si le déterminant de sa matrice jacobienne (que l'on appelle jacobien de f) ne s'annule pas sur U .

Exemple 2 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, x + y)$ et $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

injective et de classe C^1 et $df_{(x,y)} = J(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

et $\det J(f)_{(x,y)} = 2$.