Université Ahmed Zabana-Relizane

Fiche TD 1- Calcul diff-master 1 -2021/2022

$1^{ère}$ année master-LMD-Maths

Exercice 1:

1) Montrer que $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+2$ est un C^1-difféomorphisme

2) Montrer que $g:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2, g\left(x,y\right)=\left(y+f\left(x\right),x+f\left(y\right)\right)$ est un C^1-difféomorphisme

Exercice 2:

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach

et $f:\mathbb{X}\rightarrow\mathbb{X}$ une application de classe C^1, tel que $\exists k>0$ avec $\left\|f(y)-f(x)\right\|\geq k\left\|y-x\right\|.$

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{X})$ est fermée dans $\mathbb{X}$.
2. Montrer que f est surjective.
3. Est ce que f est C^1-difféomorphisme.

Exercice 3:

Soient $f,g\in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que si $\forall x,y\in\mathbb{R}, f'(x)\neq g'(y)$,

alors l'application $F:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2,(x,y)\rightarrow(x+y,f(x)+g(y))$

est un diffeomorphisme sur son image.

Exercice 4:

Soit $f\ [a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$.

S'il existe $M\geq0$ telle que $|f'(x)|\leq M$, pour tout $x,y\in[a,b]$.

Montrer que $|f(y)-f(x)|\leq M|y-x|$ pour tout $x,y\in[a,b]$.

Exercice 5:

Soient E et F deux des espaces vectoriels normés, U ouvert convexe de E.

Soit $f:U\rightarrow F$ une application différentiable,

on suppose qu'il existe $K>0$ telque $\|Df(x)\|\leq K$ pour tout $x\in U$.

Montrer que f est $K-$lipschitzienne.