

**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**  
**Centre universitaire AHMED ZABANA RELIZANE**  
**Institut des sciences et technologies**  
**Département de génie Civil**

**Dynamique des structures**  
**(1ier semestre)**  
**Master 1 VOA**

Responsable de la matière : **MENAD KAMEL**

Mail : menad.kamel@yahoo.fr

## Chapitre I

### Généralités

#### 1- Introduction :

Une charge dynamique est une charge qui varie avec le temps. Autrement dit, c'est une charge dont l'amplitude, la direction et le point d'application varient avec le temps. De l'application d'une telle charge sur une structure donnée résultent des déformations et des contraintes variant dans le temps et appelées **réponse dynamique**.

#### 2- Type de sollicitations dynamiques :

On peut classer les sollicitations 'dynamiques' en deux catégories principales :

- Les sollicitations de type périodique.
- Les sollicitations de type apériodique.

Contrairement aux chargements non-périodiques, les chargements périodiques présentent la particularité d'être caractérisés par une variation temporelle similaire pour un grand nombre de cycles.

#### 3- Différence entre un problème dynamique et un problème statique :

Les différences essentielles entre un problème statique et un problème dynamique résident dans deux aspects fondamentaux : le premier est relatif à la nature de l'excitation (variant dans le temps pour les problèmes dynamiques). Le deuxième et le plus important est le rôle que joue l'accélération dans un problème dynamique.

Pour montrer cette différence, prenons l'exemple d'une poutre simplement appuyée. Si on applique un chargement statique  $P$ , les efforts internes peuvent être déterminés facilement par les méthodes classiques de la statique (figure 1a). Les déplacements en tout point de la structure, ainsi que les efforts internes de réduction (Moment fléchissant  $M$  et un effort tranchant  $T$ ) dépendent uniquement du chargement  $P$ .

Si le même chargement mais dynamique est appliqué à la même structure, la déformation dynamique fait apparaître des accélérations qui engendrent à leur tour des forces d'inertie résistant au mouvement. Il faut donc que les efforts internes de réduction  $M$  et  $T$  équilibrent non seulement le chargement, mais également les forces d'inertie induites par le mouvement de la structure. La détermination de ces forces d'inertie dépend des méthodes de discrétisation utilisées dans le choix du modèle mathématique de la structure considérée.

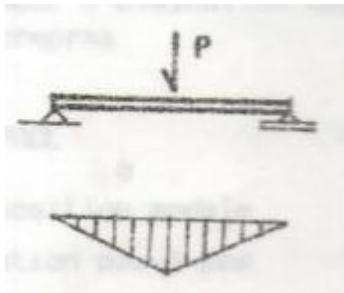


Figure 1-a : charge statique

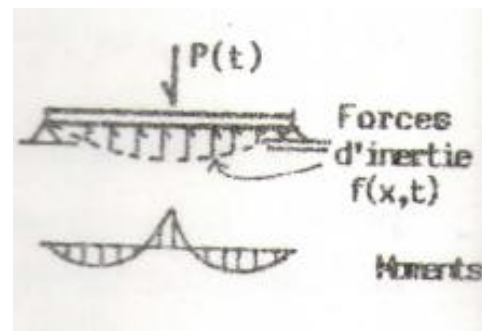


Figure 1-b : charge dynamique

#### 4- Méthodes de discrétisation :

Le calcul dynamique des structures nécessite une représentation adéquate des structures réelles par un modèle mathématique. La modélisation est une étape importante dans l'analyse dynamique parce qu'elle dépend de plusieurs paramètres souvent divergents. Choisir un modèle qui représente fidèlement la structure nécessite un grand nombre d'éléments finis. Ce moyen permet d'obtenir des résultats fiables mais il est très onéreux surtout pour les structures de moindre importance. Plusieurs méthodes de discrétisation pour la réduction du nombre de degré de liberté peuvent être utilisées dans la modélisation des structures, on peut citer : la méthode des masses concentrées, méthode des déplacements généralisés et la méthode des éléments finis.

#### 5- Modèles mathématiques :

Une fois le modèle analytique choisi, on pourra appliquer les lois physiques (lois de Newton, équation de Lagrange, équation de D'Alembert,...). Celles-ci permettent d'écrire les équations différentielles du mouvement qui décrivent, dans un langage mathématique, le modèle analytique. Le système d'équations différentielles ainsi dérivé est appelé modèle mathématique de la structure.

Une fois le modèle mathématique formulé, il s'agira de résoudre le système d'équations différentielles pour obtenir la réponse dynamique de la structure.

## Chapitre II

### Les systèmes à un seul degré de liberté (SSDDL)

#### 1- Modélisation d'une structure :

Les caractéristiques essentielles de toute structure élastique linéaire soumise à des charges dynamiques sont :

- sa masse :  $m$
- sa propriété élastique :  $K$
- son mécanisme de dissipation d'énergie :  $C$
- la source d'excitation :  $F(t)$

La figure 2 sert de modèle pour tous les systèmes à un degré de liberté.

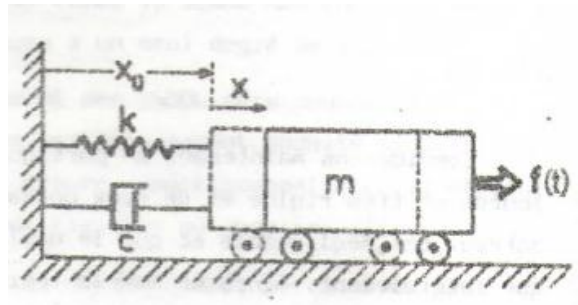


Figure 02 : Modèle analytique d'un SSDDL

#### 2- Formulation de l'équation de mouvement :

C'est la partie la plus importante de l'étude d'un système dynamique. L'objectif primordial de l'analyse est d'évaluer les déplacements en fonction du temps. Il devient alors possible de déterminer ensuite les déformations et les contraintes en tout point de la structure. On distingue essentiellement trois approches possibles pour la formulation des équations de mouvement d'un système vibratoire :

- Approche par équilibre direct (le principe de D'Alembert).
- Principe des travaux virtuels.
- Principe de Hamilton.

Dans le présent document, on va exposer uniquement le premier principe.

##### 2.1- Le principe de D'Alembert pour la formulation de l'équation de mouvement :

L'équation du mouvement des SSDDL peut être exprimée directement d'équilibre de toutes les forces agissant sur ces systèmes. Ces forces sont d'une part la force

d'excitation (charge appliquée)  $F(t)$  et d'autre part les trois forces engendrées et reliées respectivement au déplacement, à la vitesse et à l'accélération.

a) Il existe une relation entre la force et le déplacement. Cette relation est donnée par :

$$F_R = K.x \quad (1)$$

Où  $K$  est appelé constante de rigidité du ressort et  $x$  représente le déplacement.

b) tout comme le ressort conserve de l'énergie, les structures possèdent des moyens pour dissiper de l'énergie. Ces moyens sont appelés mécanisme d'amortissement. La force d'amortissement  $F_a$  est donnée par la relation :

$$F_a = C.\dot{x} \quad (2)$$

Où  $C$  représente la constance d'amortissement et son unité est le Newton par mètre par seconde (N.sec/m)

c) lorsque la masse  $m$  est écartée de sa position d'équilibre, elle est soumise à une force d'inertie (force D'alembert) donnée par :

$$F_I = m.\ddot{x} \quad (3)$$

En résumé, la masse est soumise à l'action des forces suivantes s'opposant à son mouvement :

- La force de rappel (de rigidité) du ressort  $-K.x$
- La force d'amortissement  $-C.\dot{x}$
- La force d'inertie  $-m.\ddot{x}$

D'où l'équation du mouvement :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + K x = F(t) \quad (4)$$

### 3- Vibrations libres des SSDDL :

Avant de commencer l'étude de la réponse d'un SSDDL excité par un chargement dynamique  $F(t)$ , il serait instructif de considérer le cas où l'excitation  $F(t)$  est nulle. Il en découle alors un comportement intrinsèque ou naturel du système appelé oscillation libre. Une masse déplacée puis soudainement relâchée représente un exemple d'oscillation libre. L'équation (4) devient alors :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + K x = 0 \quad (5)$$

### 3.1- Vibrations libres non amorties :

C'est le cas où  $C=0$ , l'équation (5) devient :

$$m \ddot{x} + Kx = 0 \quad (6)$$

Et admet comme solution générale :

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (7)$$

A et B des constantes que l'on détermine par les conditions initiales ( $x_0$  et  $\dot{x}_0$ ).

Le coefficient  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  .... (8) est appelé pulsation propre du système et se mesure en radian par seconde.

L'équation (7) peut être réécrite sous la forme :

$$x(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (9)$$

$\rho$  est appelée l'amplitude de la vibration libre et l'angle  $\theta$  le déphasage.

Le mouvement est sinusoïdal, de période T mesurée en secondes :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (10)$$

La fréquence f du mouvement, mesurée en Hertz, a pour valeur :

$$f = \frac{1}{T} \quad (11)$$

**Remarque :** Dans les relations précédentes on doit utiliser les unités du système international (masse en kilogramme, K en Newton par mètre).

L'allure de la réponse d'un système libre non amortie est présentée dans la figure 3

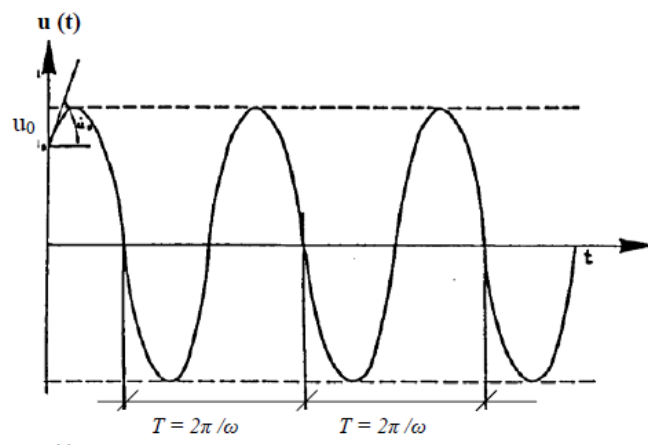


Figure 03 : Oscillations libres non amorties

### 3.2- Vibrations libres amorties :

L'équation du mouvement prend cette forme :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + Kx = 0 \quad (12)$$

Si on pose  $\xi = \frac{c}{2.m.\omega}$  (13) ( $\xi$  est appelé facteur d'amortissement)

$\xi$  est le rapport entre l'amortissement 'c' d'un système quelconque et l'amortissement critique. il provient d'un amortissement interne au matériau. on le choisit en fonction du matériau constitutif de la structure étudiée. le tableau suivant donne des valeurs indicatives du coefficient d'amortissement selon le matériau utilisé

| Type de construction                                         | Valeur de $\xi$ |
|--------------------------------------------------------------|-----------------|
| Construction avec ossature en béton armé                     | 0.02-0.14       |
| Construction avec ossature en maçonnerie                     | 0.06-0.18       |
| Construction type hall industrielle avec ossature métallique | 0.02-0.06       |
| Ponts en béton armé                                          | 0.03-0.16       |
| Ponts métalliques                                            | 0.02-0.08       |
| Ponts en bois                                                | 0.02-0.1        |
| Sols de fondation                                            | 0.06-0.40       |

La solution de l'équation (12) dépend de la valeur du facteur d'amortissement  $\xi$ . On doit distinguer les cas suivants :

#### 1- Amortissement critique ( $\xi = 1$ ): ( $C_{cr} = 2m\omega$ )

Dans ce cas, la solution de l'équation (12) est de la forme :

$$x(t) = (A + B.t) e^{-\omega t} \quad (14)$$

A et B des constantes déterminées d'après les conditions initiales.

Le mouvement est représenté dans la figure (4)



Figure 04 : Oscillation libre amortie (amortissement critique)

Un système à amortissement critique n'oscille pas autour de sa position d'équilibre mais il revient à sa position initiale.

Un amortissement critique ne présente pas un intérêt pratique pour l'ingénieur de structure. Néanmoins le coefficient d'amortissement critique est une mesure très utile pour les capacités d'amortissement d'une structure. On parlera alors d'une structure ayant 5% ou 10% d'amortissement critique c'est-à-dire  $C=0.05 C_{cr}$  ou  $C=0.10 C_{cr}$ .

## 2- Amortissement sur-critique ( $\xi > 1$ ):

Dans ce cas l'effet amortissement est relativement important et tout naturellement, le système est dit suramorti. La solution de l'équation (12) devient :

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cdot e^{\omega_D t} + B \cdot e^{-\omega_D t}) \quad (15)$$

$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$  (16) est la pulsation d'un système suramorti.

Le mouvement est représenté par le même type de figure que celui montré par la figure (04) qui montre que la masse tend à revenir à sa position d'équilibre graduellement, mais lentement par rapport au cas d'amortissement critique est cela à cause de la valeur importante du facteur d'amortissement.

Comme le cas précédent, les systèmes suramortis ne présentent pas d'intérêt pratique pour l'ingénieur civil. Les structures réelles ayant un amortissement beaucoup moins important que celui montré pour les systèmes suramortis.

## 3- Amortissement sous-critique ( $\xi < 1$ ):

Dans ce cas la solution est harmonique avec une amplitude exponentielle décroissante

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (17)$$

$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$  (18) est la pulsation d'un système amorti.

Ce mouvement est décrit par la figure (5). Cette dernière montre que la masse du système passe par des positions d'équilibre statique à des intervalles égaux à la demi-période.

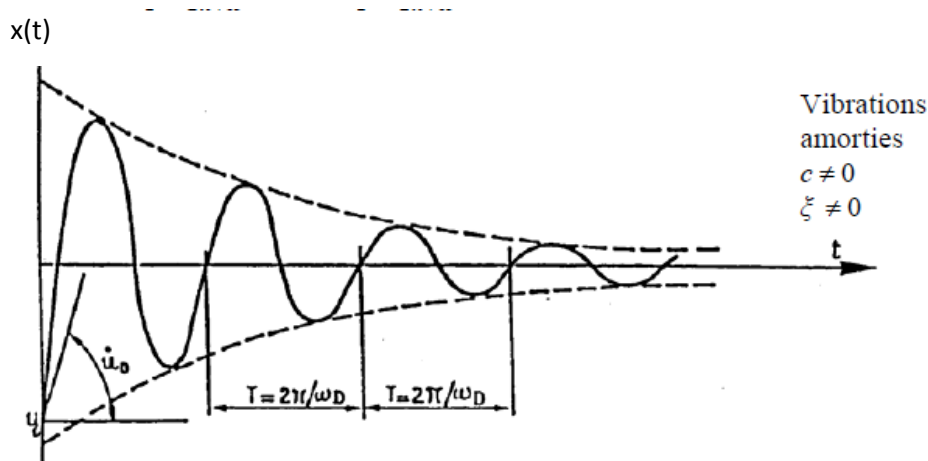


Figure 05 : Oscillation libre amortie (amortissement sur-critique)

#### 4- Vibrations forcées des SSDDL :

##### 4.1- Réponse des systèmes à une force harmonique :

Une excitation est harmonique si la force  $F(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps.

$$F(t) = F_0 \sin \alpha t \quad (20)$$

Une telle force est par exemple, engendrée par une machine tournante avec une vitesse angulaire  $\alpha$ .

##### 4.1.1- Systèmes non amortis :

L'équation de mouvement dans ce cas s'écrit comme suit :

$$m \ddot{x} + K x = F_0 \sin \alpha t \quad (21)$$

$F_0$  est l'amplitude de la charge d'excitation,  $\alpha$  : la pulsation d'excitation.

L'équation (21) est une équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre et sa solution comprend deux parties : une solution homogène  $x_h(t)$ , solution de l'équation  $m \ddot{x} + K x = 0$  (qui correspond à la réponse d'un système libre non amorti) et une solution particulière  $x_p(t)$ , qui dépend de la charge d'excitation solution de l'équation (21) dans sa totalité.

La solution générale de l'équation (21) est :  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  (22)

$$- \text{ Solution homogène : } x_h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (23)$$

$$- \text{ Solution particulière : } x_p(t) = C \sin \alpha t \quad (24)$$

Pour déterminer l'amplitude  $C$ , l'équation (24) est substituée dans l'équation (21) on aura :  $(-m C \alpha^2 + K C) \sin \alpha t = F_0 \sin \alpha t$ , par identification :  $F_0 = (K - m \alpha^2) C$

$$D'où : C = \frac{F_0}{K - m \alpha^2} = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{K} \alpha^2} = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}} = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2}$$

$$\text{Donc : } C = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1 - r^2} \quad (25)$$

avec  $r = \frac{\alpha}{\omega}$  (26)  $r$  est appelé le rapport des pulsations.

La solution particulière est donc :  $x_p(t) = \frac{F_0}{K} \cdot D \cdot \sin \alpha t$  (27)

$D = \frac{1}{1 - r^2}$  est le facteur d'amplification dynamique.

##### Remarque :

Si la pulsation d'excitation égale à la pulsation propre du système ( $\alpha = \omega$ ) ou ( $r=1$ ) l'amplitude de mouvement sera égale à l'infini, dans ce cas le système entre en résonance. En réalité, toute structure a une résistance limite. Elle ne pourra jamais atteindre une amplitude infinie, car la structure se fissure juste après le dépassement de son amplitude critique de résistance.

Pour éviter des problèmes de résonance, il faut que la période propre de l'oscillateur s'écarte au minimum d'environ 20 % de la période de la force d'excitation.

**4.1.2- Systèmes amortis :**

L'équation de mouvement dans ce cas s'écrit comme suit :

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F_0 \sin \alpha t \quad (28)$$

La solution générale de l'équation (28) est :  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  (29)

- Solution homogène :  $x_h(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$  (30)

- Solution particulière :  $x_p(t) = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t$  (31)

Détermination des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  :

$$\dot{x}_p(t) = C_1 \alpha \cos \alpha t - C_2 \alpha \sin \alpha t \text{ et } \ddot{x}_p(t) = -C_1 \alpha^2 \sin \alpha t - C_2 \alpha^2 \cos \alpha t$$

Substituant  $x_p$ ,  $\dot{x}_p(t)$  et  $\ddot{x}_p(t)$  dans l'équation de mouvement on aura :

$$(C_1 \omega^2 - 2C_2 \alpha \xi \omega - C_1 \alpha^2) \sin \alpha t + (C_2 \alpha^2 + 2C_1 \alpha \xi \omega - C_2 \alpha^2) \cos \alpha t = \frac{F_0}{m} \sin \alpha t$$

Par identification :

$$\begin{cases} C_1(\omega^2 - \alpha^2) - 2C_2 \alpha \xi \omega = \frac{F_0}{m} \\ C_2(\omega^2 - \alpha^2) + 2C_1 \alpha \xi \omega = 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système d'équation on aura :

$$\begin{cases} C_2 = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ C_1 = -\frac{F_0}{K} \cdot \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \end{cases}$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \cdot [(1-r^2) \sin \alpha t - 2\xi r \cos \alpha t] \quad (32)$$

On peut écrire  $x_p(t)$  sous une autre forme :

$$x_p(t) = \rho \sin(\alpha t - \varphi) \text{ avec } \rho = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\text{Et } \tan \varphi = \frac{C_2}{C_1} = \frac{-2\xi r}{1-r^2}$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\alpha t - \varphi) = \frac{F_0}{K} \cdot D \cdot \sin(\alpha t - \varphi) \quad (33)$$

Avec  $D_{\xi,r}$  : Facteur d'amplification dynamique.

Donc la réponse globale d'un système forcé amorti :

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{F_0}{K} D \sin(\alpha t - \varphi) \quad (34)$$

La réponse de ce système est composée de deux termes –deux phases) :

- Une phase transitoire ( $e^{-\xi\omega t} (A \cos\omega_D t + B \sin\omega_D t)$ ) : cette phase définit un mouvement d'un système libre amorti, sa disparition est très rapide après un certain nombre de cycles.
- Une phase permanente ( $\frac{F_0}{K} D \sin(\alpha t - \varphi)$ ) : dans cette phase le mouvement s'effectue avec la même pulsation  $\alpha$  de la force d'excitation.

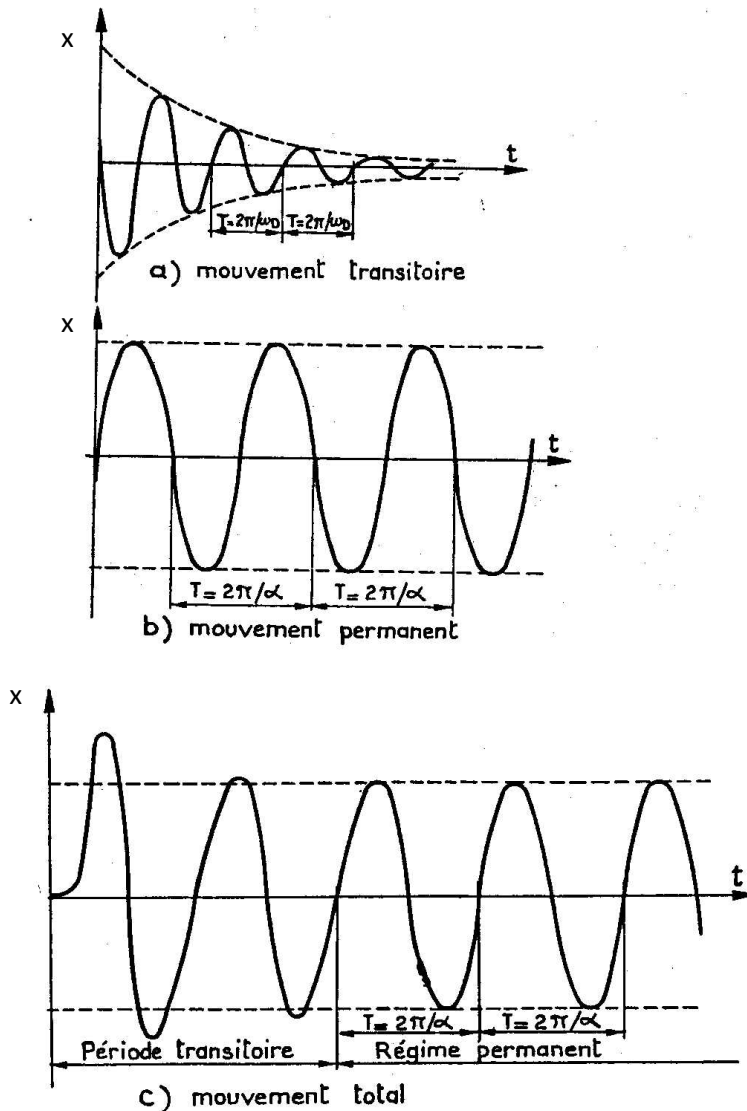


Figure 06 : oscillation forcée. Cas d'une force harmonique

La figure 06 montre qu'après une phase transitoire, le régime permanent s'établit défini par la relation  $x(t) = \frac{F_0}{K} D \sin(\alpha t - \varphi)$ . Contrairement au cas des oscillations libres qui s'effectuent avec une pseudo-période propre à l'oscillateur, la pulsation du mouvement permanent est celle de la force excitatrice. Le coefficient  $\frac{F_0}{K}$  représente le déplacement statique de la structure sous l'action de la force  $F_0$ .

Le coefficient  $D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$  est le facteur d'amplification dynamique qui dépend de l'amortissement  $\xi$  et du rapport des pulsations  $r$  (figure 07).

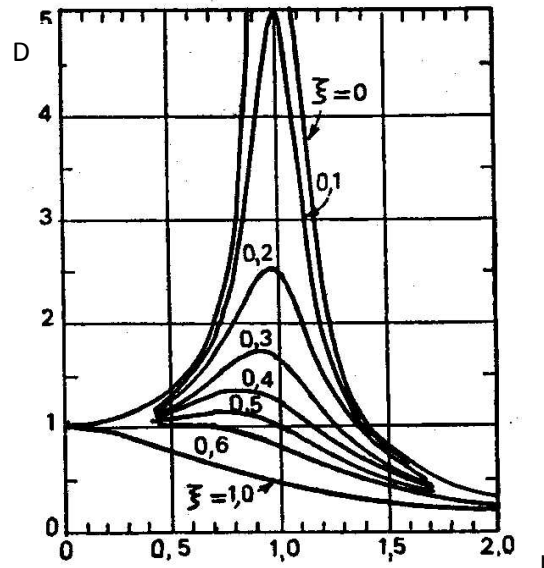


Figure 07 : facteur d'amplification dynamique

On voit donc que la réponse d'un oscillateur à une excitation donnée dépend essentiellement de sa pulsation propre :

- Pour un oscillateur très rigide ( $\alpha \ll \omega$ ,  $r \rightarrow 0$  et  $D \rightarrow 1$ ) il n'y a pas d'amplification dans la réponse du système, et sa déformée correspond au cas d'un système statique, le mouvement est sinusoïdale d'amplitude  $F_0/K$ .
- Pour un oscillateur très souple ( $\omega \ll \alpha$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $D \rightarrow 0$ ) cela signifie qu'une excitation d'extrême haute fréquence n'a pratiquement aucun effet de vibration sur un système de très faible fréquence.
- Si ( $\omega = \alpha$ ,  $r=1$ ) le mouvement dépend de la valeur de l'amortissement  $\xi$ . Pour des très petites valeurs de  $\xi$  le système entre en état de résonance.

#### 4.2- Réponse des systèmes sous charges de forme quelconque (cas général) :

Les structures sont généralement soumises à des excitations non harmoniques (de forme quelconque) comme le vent, le séisme, les explosions et les chocs (figure 08).

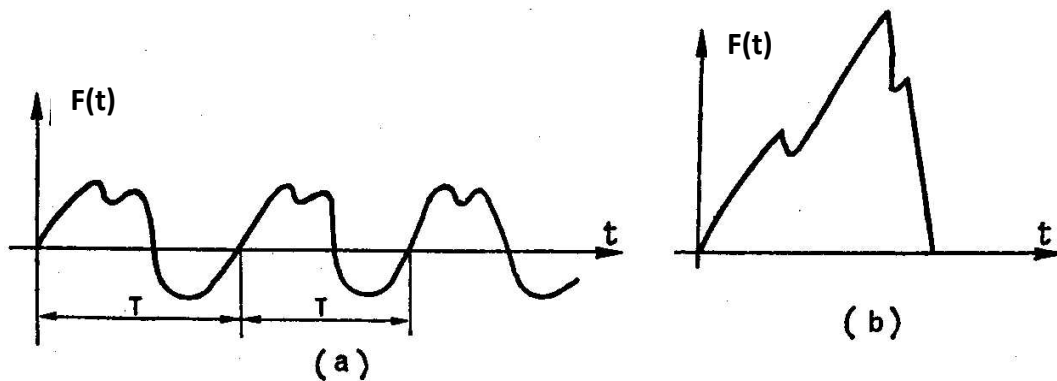


Figure 08 : Exemple de forces non harmoniques

a) Force périodique engendrée par une machine b) Impulsion due à un choc

Toute excitation dynamique arbitraire peut être vue comme la superposition d'une série d'impulsions de très courte durée  $d\tau$ . À l'instant  $\tau$  la masse est soumise à une impulsion  $F(\tau) d\tau$  (aire hachurée de la courbe de la figure 09).

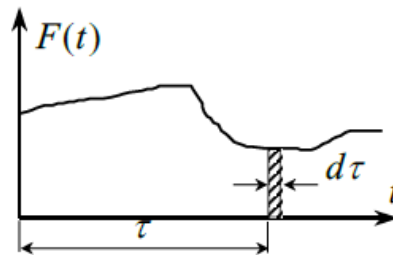


Figure 09 : Force arbitraire

La solution de l'équation de mouvement dans ce cas est fournie par l'intégral de Duhamel :

$$\text{Pour un système non amorti : } x(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m \cdot \omega} \cdot \sin \omega (t - \tau) d\tau \quad (35)$$

$$\text{Pour un système amorti : } x(t) = \int_0^t e^{-\xi \omega (t - \tau)} \frac{F(\tau)}{m \omega_D} \sin \omega_D (t - \tau) d\tau \quad (36)$$

#### 4.3- Réponse d'un système sous excitation d'appui (cas du séisme) :

Les efforts dynamiques dans une structure ne sont pas forcément les conséquences des charges appliquées directement sur les masses, mais peuvent être engendrés par un mouvement d'appui. Ce cas peut se présenter lors d'un séisme par exemple.

On considère une masse  $m$  liée à une console verticale encastrée dans le sol en un point A (figure 10), ce qui constitue l'équivalent d'un oscillateur simple. Pour tenir compte du mouvement du sol en cas de séisme, on impose au point A un déplacement horizontal  $x_s(t)$  variable dans le temps ( $x_s(t)$  est le déplacement du sol).

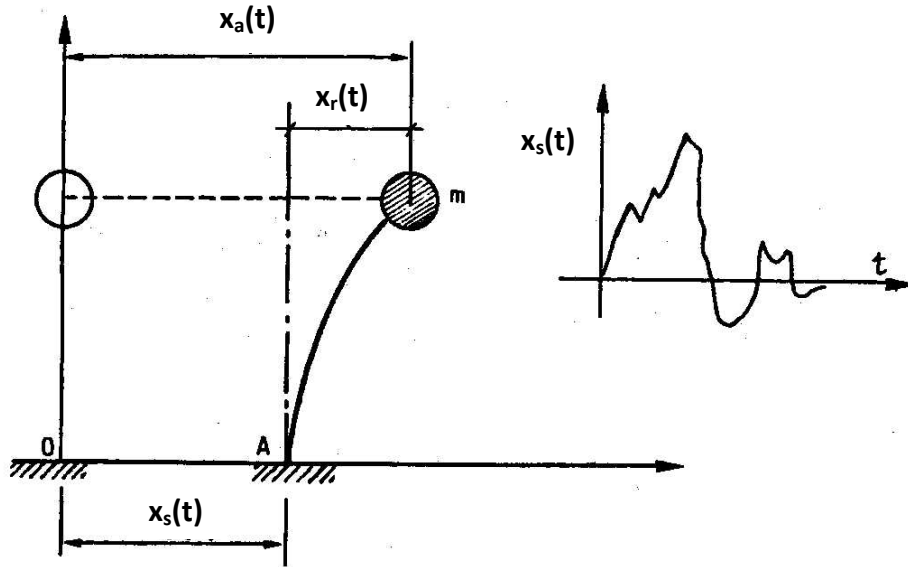


Figure 10 : excitation par déplacement d'appui

Les déplacements de la masse  $m$  sont mesurés, soit dans un repère relatif lié au point A (déplacement  $x_r(t)$ ) soit dans un repère absolu (déplacement  $x_a(t)$ ).

Ces déplacements sont liés par la relation

$$x_a(t) = x_r(t) + x_s(t) \quad (37)$$

On en déduit par dérivation la relation entre les accélérations :

$$\ddot{x}_a(t) = \ddot{x}_r(t) + \ddot{x}_s(t) \quad (38)$$

La masse est soumise aux forces horizontales suivantes :

- une force de rappel proportionnelle au déplacement relatif  $F_r = -K \cdot x_r$
- une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse relative :  $F_c = -C \cdot \dot{x}_r$
- une force d'inertie proportionnelle à l'accélération absolue :  $F_I = -m \cdot \ddot{x}_a$

On en déduit l'équation du mouvement :  $m (\ddot{x}_s + \ddot{x}_r) + c \dot{x}_r + k x_r = 0 \quad (39)$

$$m \ddot{x}_r + c \dot{x}_r + k x_r = -m \ddot{x}_s = F_{eff} \quad (40)$$

Cette équation différentielle montre clairement qu'un système soumis à un mouvement d'appuis est équivalent au même système soumis à une charge effective égale à  $(-m \ddot{x}_s)$  appliquée sur sa masse et dans le sens opposé au mouvement (indiqué par le signe moins (-)). La réponse d'un tel système dépend de la nature de la charge effective (harmonique, périodique de forme quelconque ou impulsive).

#### 4.4- Transmissibilité et isolation vibratoire :

Dans les parties précédentes, nous avons admis que la force dynamique était appliquée à la masse et nous avons considéré la réponse comme un déplacement du point d'application de la force.

La transmissibilité représente la fraction de la force appliquée qui est transmise au support à travers le système.

Si on considère le système représenté dans la figure 11 et qui sera soumis à un mouvement d'appui  $x_s$ .

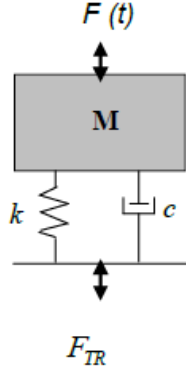


Figure 11 : Transmissibilité des charges

Si on considère le mouvement du sol harmonique :

$$x_s(t) = X_s \sin \alpha t \Rightarrow \ddot{x}_s(t) = -\alpha^2 X_s \sin \alpha t \quad (41)$$

L'équation différentielle qui régit le mouvement du système :

$$m \ddot{x}_r(t) + C \dot{x}_r(t) + K x_r(t) = -m \ddot{x}_s(t) = m \alpha^2 X_s \sin \alpha t = F_0 \sin \alpha t \quad (42)$$

La réponse du système :  $x_r(t) = \frac{F_0}{k} D \sin(\alpha t - \varphi) = \frac{m \alpha^2}{K} X_s D \sin(\alpha t - \varphi) \quad (43)$

$$x_r(t) = X_s r^2 D \sin(\alpha t - \varphi) = X_s r^2 \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\alpha t - \varphi) \quad (44)$$

$$x_{r_{max}} = X_s r^2 \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \Rightarrow T_R = \frac{x_{r_{max}}}{X_s} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (45)$$

$T_R$ : Coefficient de transmissibilité. Par définition la transmissibilité est le rapport d'amplitude de mouvement de la masse sur l'amplitude de mouvement de la base. ce rapport est très important pour l'analyse des structures et surtout pour l'isolation vibratoire du support en vue de protéger certaines constructions ou équipements fragiles des efforts de mouvement dues aux excitations d'appuis.

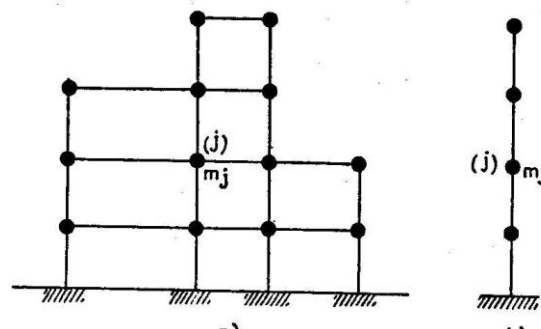
### Chapitre III

#### Les systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDDL)

##### 1- Définition :

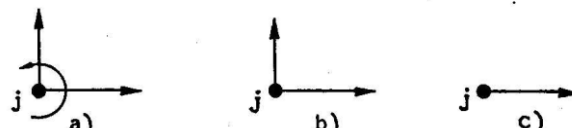
Dans le chapitre précédent, nous avons vu que si la structure analysée pouvait prendre une configuration spatiale unique durant le mouvement vibratoire, le comportement dynamique pourrait être assimilé à celui d'un système à un degré de liberté. La structure, dans ce cas, peut être modélisée par un oscillateur simple avec une masse unique, un amortisseur et un ressort. Les structures réelles ont toutefois plusieurs degrés de libertés, elles sont modélisées par des oscillateurs multiples comportant plusieurs masses reliées entre elles par des éléments de type ressort et amortisseur.

On peut ranger dans cette catégorie toute structure à comportement élastique linéaire, modélisée à l'aide de barres ou d'éléments finis et comportant une masse associée à chacun des nœuds (figure 12). Les masses réparties sur les barres sont dans ce cas supposées concentrées sur les nœuds les plus voisins.



**Figure 12 : Oscillateurs multiples**  
a) Portique plan b) Console verticale

Chaque nœud possède au maximum six degrés de liberté, c'est-à-dire six mouvements possibles : trois translations et trois rotations, mais en pratique, on pourra souvent n'en considérer qu'un nombre réduit. Dans le cas d'une structure plane, chaque nœud possède deux degrés de liberté (deux translations et une rotation) mais on peut toutefois considérer un modèle simplifié à deux degrés de liberté par nœud (les deux translations), ou même un seul (une des deux translations) (figure 13).



**Figure 13 : Degrés de liberté possibles pour un modèle plan**  
a) 3 degrés de liberté b) 02 degrés de liberté c) 01 degré de liberté

Les propriétés de l'oscillateur sont définies par un certain nombre de coefficients que l'on met sous forme de matrice.

## 2- Développement des matrices K, F, C et M :

### 2.1- Matrice de rigidité :

On considère une structure à p nœuds comportant au total n degrés de liberté numérotés de 1 à n. dans le cas général, il existe six degrés de liberté par nœuds ; le nombre n a donc pour valeur :  $n = 6 \times p$

On appelle :

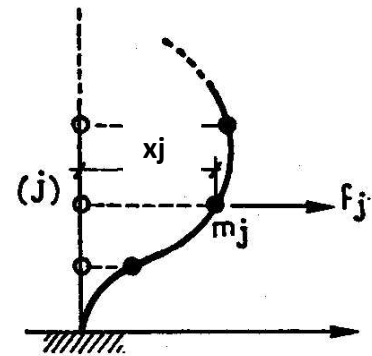
-  $f_j$  la force extérieure, ou le moment, appliquée à la structure dans le sens du degré de liberté j,

-  $x_j$  le déplacement (translation ou rotation) selon le degré de liberté j.

L'ensemble des forces extérieures constitue le vecteur

force F à n composantes :

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (46)$$



On considère de même le vecteur des déplacements :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (47)$$

La structure est supposée élastique : il existe donc des relations linéaires entre les forces extérieures et les déplacements :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + \dots + k_{1j} x_j + \dots + k_{1n} x_n \\ f_2 &= k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + \dots + k_{2j} x_j + \dots + k_{2n} x_n \\ &\vdots \\ f_i &= k_{i1} x_1 + k_{i2} x_2 + \dots + k_{ij} x_j + \dots + k_{in} x_n \\ &\vdots \\ f_n &= k_{n1} x_1 + k_{n2} x_2 + \dots + k_{nj} x_j + \dots + k_{nn} x_n \end{aligned} \quad (48)$$

Les expressions (48) peuvent se mettre sous forme matricielle :  $F = K \cdot X$  (49)

Où K représente la matrice de rigidité de dimension :  $n \times n$  :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Les forces de rappel développées en chaque point de la structure dépendent de tous les déplacements développés dans tous les autres points.

$K_{ij}$  : élément d'influence de rigidité, c'est une force de rappel en i due à un déplacement unitaire en j.

Dans les cas simples, on pourra calculer les coefficients  $K_{ij}$  en évaluant les forces qu'il faut appliquer aux nœuds de la structure pour que tous les déplacements sauf en soit nuls.

## 2.2- Matrice de masse:

On suppose que toute la masse de la structure est concentrée aux nœuds. à chaque nœuds, on associe donc, en général, trois masses et trois moments d'inertie massique correspondant aux six degrés de liberté.

On note :

- $m_j$  : la masse relative au degré de liberté  $j$ .
- $\ddot{x}_j$  : l'accélération dans la direction du degré de liberté  $j$ .

Les masses étant concentrées, l'accélération d'une seule d'entre elles n'impose de forces d'inertie qu'à elle-même, ce qui ne serait pas le cas s'il existait des masses réparties entre deux nœuds. lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inertie ont pour valeur :

$$\begin{aligned} f_1 &= m_1 \cdot \ddot{x}_1 \\ f_2 &= m_2 \cdot \ddot{x}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_i &= m_i \cdot \ddot{x}_i \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= m_n \cdot \ddot{x}_n \end{aligned} \quad (51)$$

les relations s'écrivent :  $F = M \cdot \ddot{x}$  (52)

le vecteur  $\ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_j \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix}$  représente le vecteur des accélérations.

$M$  : est la matrice des masses, diagonale et de dimension  $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (53)$$

## 2.3- Matrice d'amortissement:

Pour un oscillateur simple, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse relative  $\dot{x}$  :

$$f = -C \cdot \dot{x} \quad (54)$$

Pour les oscillateurs multiples, cette relation est généralisée sous la forme :

$$F = -C \cdot \dot{x} \quad (55)$$

Où  $F$  est le vecteur force,  $C$  est la matrice d'amortissement et  $\dot{x}$  et la vectrice vitesse.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Le coefficient  $C_{ij}$  a pour valeur celle de la force développée dans la direction du degré de liberté  $i$  lorsque la vitesse  $\dot{x}_j$  est unitaire, toutes les autres vitesses étant nulles.

### 3- Formulation de l'équation de mouvement:

On considère un oscillateur multiple pouvant se déformer par rapport à sa base qui reste fixe, et caractérisé par des matrices  $K$ ,  $M$  et  $C$  de rigidité, de masse et d'amortissement.

On applique aux nœuds des forces  $F_j(t)$  variables dans le temps et regroupées sous

forme d'un vecteur

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_j(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{pmatrix} \quad (57)$$

Pour une déformation relative  $x$  donnée, les masses sont soumises aux forces suivantes :

- les forces élastiques de rappel :  $F_{\text{appel}} = K \cdot X$
- les forces d'amortissement :  $F_{\text{amortissement}} = -C \cdot \dot{X}$
- les forces extérieures  $F(t)$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F(t) \quad (58)$$

### 4- Fréquences et modes propres de vibration:

Avant d'analyser l'effet du chargement dynamique sur la structure, il est nécessaire d'étudier son mouvement libre.

L'étude des oscillations libres non amorties de l'oscillateur multiple, donne une bonne approximation du mouvement réel et fournit tous les éléments nécessaires pour le calcul des oscillations forcées.

On cherche le mouvement de chacune des masses en l'absence de forces extérieures  $F(t)$  ; ce mouvement se produit, par exemple, quand on relâche une masse de l'oscillateur après l'avoir écarté de sa position d'équilibre.

En vibration libre non amortie, l'équation de mouvement d'un système à  $n$  degrés de liberté donné par l'équation (58) s'écrit :

$$[M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} = \{0\} \quad (59)$$

La réponse pour chaque degré de liberté est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Pour le degré de liberté 1 : } x_1(t) &= \phi_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ \text{Pour le degré de liberté 2 : } x_2(t) &= \phi_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ &\dots\dots\dots \\ \text{Pour le degré de liberté } n : x_n(t) &= \phi_n \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (60)$$

Soit d'une manière générale :

$$\{x(t)\} = \{\emptyset\} \sin(\omega t + \varphi) \quad (61)$$

L'accélération sera donnée par :

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\{\emptyset\} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (62)$$

Substituant le vecteur déplacement  $\{x(t)\}$  et le vecteur accélération  $\{\ddot{x}(t)\}$  dans l'équation de mouvement, on aura :

$$([K] - \omega^2[M])\{\emptyset\} = \{0\} \quad (63)$$

L'équation (63) représente un système à n équations linéaires avec n déplacements inconnus et n pulsations inconnues. En mathématique, ce problème est connu sous le nom de problème aux valeurs propres.

#### 4.1- Détermination des valeurs propres (fréquences propres) :

Une solution de l'équation (63) n'est possible que si le déterminant de la matrice  $([K] - \omega^2[M])$  est nul.

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (64)$$

si on développe ce déterminant, on obtient une équation de degré n en  $\omega^2$ . La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$  relatives aux n modes de vibration possibles.

la plus petite valeur de  $\omega$  soit  $\omega_1$  est la pulsation fondamentale. une pulsation d'ordre  $i > 1$  est appelée pulsation d'ordre i.

#### 4.2- Détermination des vecteurs propres :

Pour chaque pulsation  $\omega_j$  on peut déterminer un vecteur de déformations  $\{\emptyset\}_j$  par la résolution de l'équation suivante :  $([K] - \omega_j^2[M])\{\emptyset\}_j = \{0\}$  (65)

Les vecteurs  $\{\emptyset\}_j$  représente une configuration de la déformée de la structure où tous les points atteignent leurs amplitudes maximales pour une pulsation correspondante. à chaque valeur propre (pulsation propre) correspond une forme d'oscillation (vecteur propre) qui caractérise une déformée de la structure. L'ensemble des valeurs propres et des formes propres est appelé ‘‘mode propre ou normal de vibration’’.