Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

1- Définition : On appelle méthode directe de résolution de système linéaire une méthode qui donne exactement x, la solution de ce système après un nombre fini d'opérations élémentaires (+, −, ×, /).

2- La méthode de Gauss :

2.1- Introduction

La méthode consiste à transformer un système à matrice A pleine, en un autre système à matrice triangulaire supérieure U=M.A, de telle façon que les deux systèmes A.x = b et U.x =Y soient équivalent (Y=M.b) c. à. d. ont la même solution.

Il suffit donc d'appliquer à un système A.x = b la méthode de remontée. En fait, on ne calcule pas directement la matrice M, mais on décrit une succession d'opérations dites opérations élémentaires.

Donc après l'application de l'algorithme de gausse la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ se transforme en $U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}$ ainsi que le vecteur $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ se transforme en $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

L'algèbre linaire montre que certaines transformations apportées aux systèmes d'équations ne changent pas leurs solutions, dans notre cas les opérations qu'on peut appliquer sont les suivantes :

- Multiplication de l'équation E_i par une constante α non nulle, la nouvelle équation obtenue $E_{in} = \alpha . E_i$ remplacera l'ancienne E_i.
- Multiplication de l'équation E_j par α non nulle et son ajout à E_i, $E_{in} = E_i + \alpha . E_j$, l'équation obtenue E_{in} remplacera E_i.
- Permutation des équations E_i et E_j.

L'application d'une série de ces opérations transformera le système A.x = b en U.x =Y puis une substitution en arrière donnera la solution du système.

2.2- Description de la méthode de GAUSS

On va montrer comment appliquer les transformations au système A.x = b, pour cela le second membre b sera considéré comme la colonne (n+1) et sera aussi affecté par les opérations. On divise le travail en (n-1) étapes chacune d'elle annule les éléments au-dessous du pivot de la colonne (c.-à-d. tout a_{ij} pour $i > j$) . Au début chaque étape, on vérifie que le pivot est non nul. Pour l'étape i le pivot est a_{ii} .

Le système à l'état initial est donné par :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

- **Première étape :** On vérifie tout d'abord que le pivot de la première étape qui est $a_{11} \neq 0$.

  Pour annuler l'élément a_{21} de la deuxième ligne, on multiplie la première équation par a_{21} et on la divise par a_{11} puis on fait la différence de cette nouvelle équation avec la deuxième. L'équation obtenue remplacera la deuxième. $E_2 = E_2 - E_1 \times a_{21} / a_{11}$.

  Cette opération donne $a_{21} = 0$ et $a_{2j} = a_{2j} - a_{1j} \times a_{21} / a_{11}$ pour $j = 2, \dots, n+1$.

  On continue cette procédure avec les lignes *3*,*4*,…,*n*

  A la fin de la première étape, on obtient des éléments nuls au-dessous du pivot de la première étape. Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \vdots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

- **Deuxième étape :** On vérifie tout d'abord que le pivot $a_{22} \neq 0$

  De la même façon, on obtient pour le cas général $a_{ij} = a_{ij} - a_{2j} \times a_{i2} / a_{22}$ pour $i = 3, \dots, n \; et \; j = 3, \dots, n+1$.

  A la fin de la deuxième étape, on obtient des éléments nuls au-dessous du pivot de la deuxième étape. Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \vdots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

- **Etape *k* :** On vérifie tout d'abord que le pivot $a_{kk} \neq 0$

  Pour une étape k quelconque, on a : $a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} \times a_{ik} / a_{kk}$ pour $k = 1, \dots, n-1$, $i = k+1, \dots, n \; et \; j = k+1, \dots, n+1$.

  A la fin de la procédure, on obtient un système à matrice triangulaire supérieure qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \vdots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Exemple 01 :

Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Solution

On porte les composantes de A et b dans la matrice :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit le pivot 5, multiplions la 1er ligne par 2/5 et retranchons de la 1ere ligne et pour la 3eme ligne multiplier la 1er ligne par 3/5 puis calculer la différence, et on obtient la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9/5 & -17/5 & -7/5 \\ 0 & -4/5 & 7/5 & 7/5 \end{pmatrix}$$

Soit le nouveau pivot 9/5 multiplions la 1er par -4/9 et faisons la différence avec la 2eme ligne

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9/5 & -17/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & -1/9 & 7/9 \end{pmatrix}$$

Cela donne $x_3 = -7$; ${}^9/_5\, x_2 - {}^{17}/_5\, x_3 = {}^{-7}/_5$ d'où $x_2 = -14$; et enfin $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ donne $x_1 = -4$

Exemple 02 :

Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solution

On porte les composantes de A et b dans la matrice :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Soit le pivot 1 de la première position de la première ligne, La deuxième ligne a déjà un 0 dessous, donc on n'a rien besoin de faire. On veut ensuite annuler le premier coefficient de la troisième ligne. On retranche donc (-1) fois la première ligne à la troisième.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La deuxième ligne a un terme non nul en deuxième position, c'est un pivot. On va maintenant annuler le deuxième terme de la troisième ligne ; pour cela, on retranche 1/2 fois la ligne 2 à la ligne 3

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 1/2\ell_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

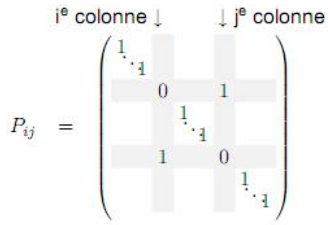
Cela donne $x_3 = 1$ puis $x_2 = 1$; et enfin $x_1 = 1$.

2.3- Utilisation de la pivotation

Dans l'élaboration de l'algorithme de GAUSS, on a supposé que le pivot ne soit pas nul, ce n'est pas le cas toujours. Parfois le pivot est très petit comparativement aux autres termes ou même nul, dans ce cas on peut utiliser la technique de la pivotation.

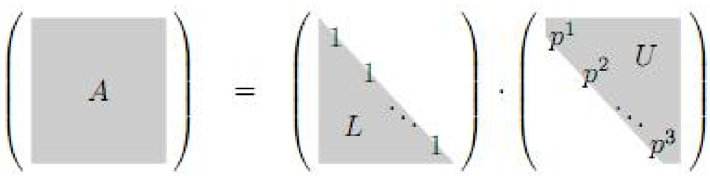
Dans la pivotation, on utilise la permutation des lignes ceci n'a aucun effet sur la solution du système. Permuter les lignes I et J de la matrice A, revient uniquement à changer l'ordre des équations.

Permuter deux lignes d'une matrice correspond la multiplier à gauche par une matrice de la forme :

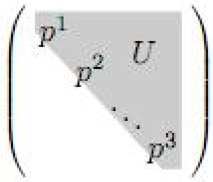


La factorisation LU

Pour préparer la matrice on souhaite à factoriser en deux matrices triangulaires :

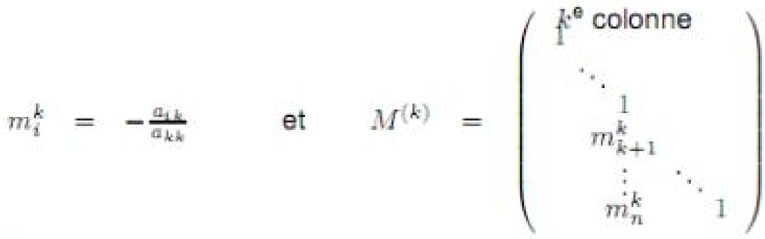


Pour construire L et U on utilise l'élimination de Gauss. On effet à la fin de la triangularisation, on obtient U :

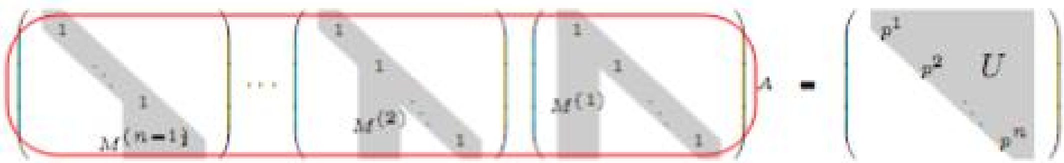


Une étape de l'élimination revient à multiplier A par une matrice $M^{(k)}$ quelle est la forme de cette matrice ?

Soient



Alors



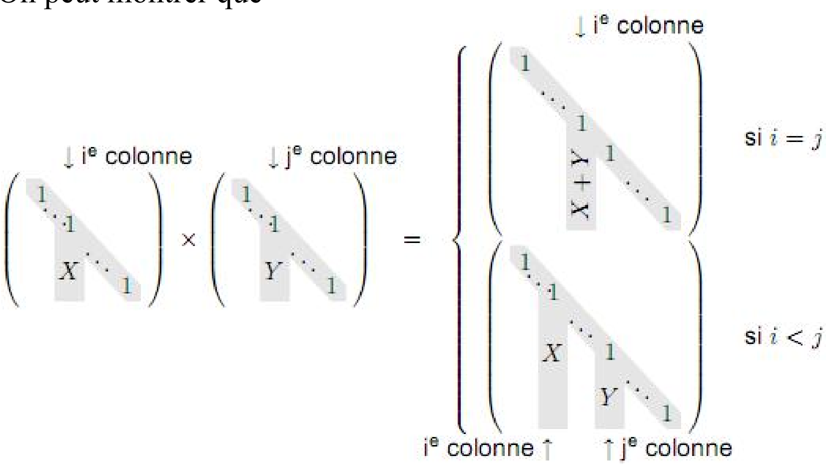
Nous avons donc

$$M \,.\, A = U$$

Pour calculer la matrice L il faut :

- Inverser les $M^{(k)}$
- Calculer le produit $L = M^{(1)^{-1}}.M^{(2)^{-1}}.M^{(3)^{-1}} \cdots M^{(n-1)^{-1}}$

On peut montrer que



Donc $M^{(k)}$ est inversible d'inverse $L^{(k)}$ avec :

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1}^k & & \\ & & & \ddots & \\ & & m_n^k & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1}^k & & \\ & & & \ddots & \\ & & -m_n^k & & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice L de la décomposition est :

$$\begin{aligned} L &= L^{(1)} \times L^{(2)} \cdots \times L^{(n-1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -m_2^1 & 1 & & & & \\ . & \ddots & 1 & & & \\ . & & -m_{k+1}^k & 1 & & \\ . & & \vdots & \ddots & 1 & \\ -m_n^1 & \dots & -m_n^k & \dots & -m_n^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$