Centre Universitaire AHMED ZABANA Relizane

Institut Des Sciences et Technologies

Département de Génie Civil

Semestre: 05

Matière: Résistance des matériaux 2

Crédits: 4 Coefficient: 2

Connaissances préalables recommandées:

RDM 1, science des matériaux, Mathématique.

LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (*RDM)* est une partie de la mécanique des solides. Elle s'intéresse à l'étude, de manière théorique, de la réponse mécanique des structures soumises à des sollicitations extérieures (traction, compression, cisaillement, flexion et torsion). Elle permet d'évaluer les efforts internes, les contraintes (normale et tangentielle) ainsi que les déplacements des structures. Cet ouvrage de *RDM* présente des méthodes de calcul, des formules pratiques illustrant des cas réels de dimensionnement des structures. Les nombreuses illustrations de l'ouvrage montrent en détail les éléments de base à prendre en compte lors du dimensionnement d'une structure quelconque en Génie Civil. Les méthodes analytiques les plus utilisées en calcul des systèmes isostatique et hyperstatique sont développées en détail.

Chapitre I : Flexion plane des poutres symétriques – rappel

- Rappel moment fléchissant – effort tranchant.
- Contraintes normales en flexion simple
- Contraintes tangentielles en flexion simple

Efforts tranchants

Les forces transversales Tz, et Ty sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y. Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la Fig. 1.

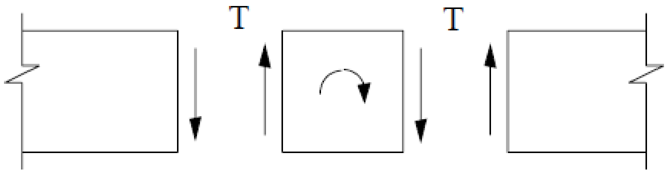


Fig 1

Moments Fléchissants

Les composantes My, et Mz du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement. La Fig. 2 indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

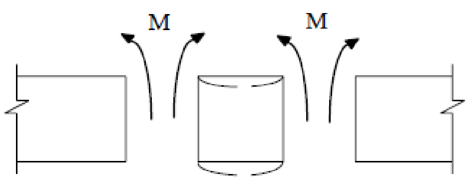


Fig 2

CONTRAINTES NORMALES EN FLEXION PLANE

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La Fig. 3 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit:

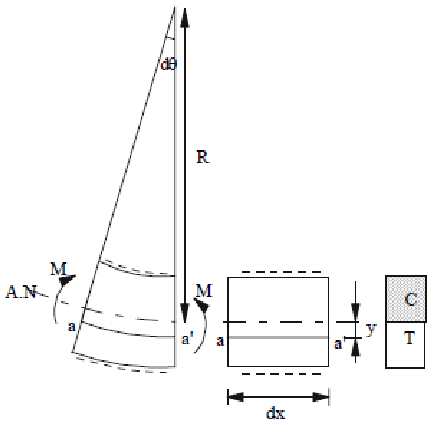


Fig 3

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx} \qquad \text{(I-1)}$$

Avec

$$dx = Rd\theta \qquad \text{(I-2)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R} \qquad \text{(I-3)}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad \text{(I-4)}$$

D'ou

$$\sigma = \frac{E}{R}y \qquad \text{(I-5)}$$

La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$\iint_s \sigma y ds = M \qquad \text{(I-6)}$$

En Introduisant la valeur de σ de l'équation (I-5) dans l'expression (I-6) on obtient :

$$M = \iint_s \frac{E}{R} y^2 ds \qquad \text{(I-7)}$$

$$M = \frac{E}{R}\iint_s y^2 ds \qquad (I\text{-}8)$$

$$M = \frac{EI_Z}{R} \qquad (I\text{-}9)$$

En introduisant l'équation (I-5) dans (I-9), la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur:

$$\sigma = \frac{My}{I_Z} \qquad (I\text{-}10)$$

CONTRAINTES TANGENTIELLES EN FLEXION

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire Fig.4 sont associées des contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales (réciprocité des contraintes tangentielles). L'existence de ces contraintes suivant les couches horizontales de la poutre peut être démontré par superposition de deux poutres de hauteur h simplement appuyées aux extrémités et soumises à une force concentrée à mi travée. On constate qu'il y a un glissement des fibres inférieures ce qui signifie qu'il y a des contraintes tangentielles horizontales empêchant ce glissement dans le cas d'une poutre équivalente de hauteur 2h.

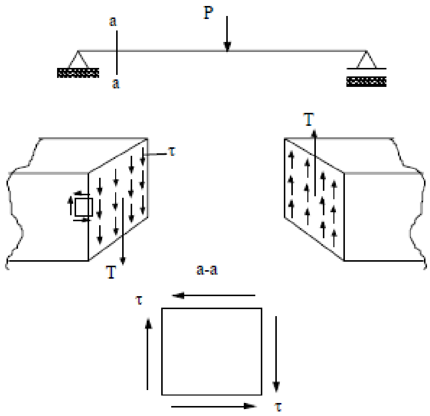


Fig 4

Considérons un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort tranchant constant T et un moment fléchissant variant de M à M+dM. (Fig. 5)

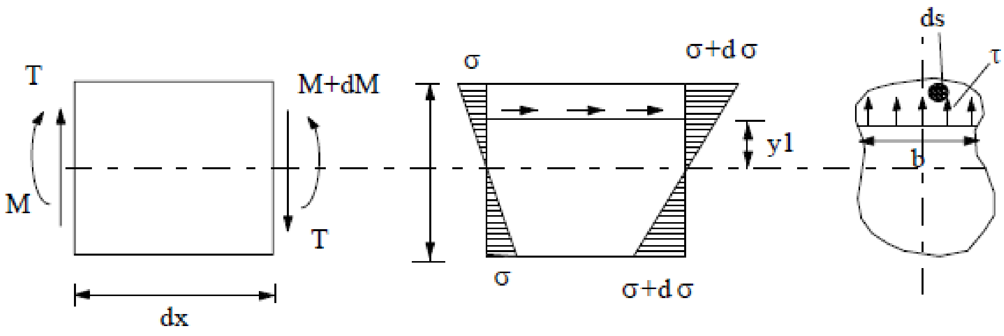


Fig 5

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx, σ+dσ à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ. Ecrivons l'équation d'équilibre:

$$\iint_{S1} \sigma ds - \iint_{S1} (\sigma + d\sigma) ds + \int \tau b dx = 0 \quad \text{(I-11)}$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section (bdx):

$$\tau b dx = \iint_{S1} d\sigma ds = \iint_{S1} \frac{dM}{I} y ds \quad \text{(I-12)}$$

$$= \frac{dM}{I} \iint_{S1} y ds \quad \text{(I-13)}$$

$$= \frac{dM}{I} S_1^* \quad \text{(I-14)}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{Ib} = \frac{TS_1^*}{Ib} \quad \text{(I-15)}$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par:

$$\tau = \frac{TS_z}{I_z b} \quad \text{(I-16)}$$

τ : Contrainte tangentielle.

b : Largeur de la section dans la couche considérée.

Iz : Moment d'inertie.

S*z : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

T : L'effort tranchant.

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonné y comme le rapport (S*z / b. τ) est nul aux points les plus éloignés du centre de gravité et passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de (S*z / b).

Chapitre II : Déplacement des poutres symétriques en flexion plane

- Déplacement des poutres de section constantes
- Méthode des paramètres initiaux
- Méthodes moments des aires
- Méthode de superposition

GENERALITES

Quand on charge une poutre, la ligne moyenne qui, initialement est droite, se déforme sous l'effet d'un moment fléchissant. L'allure de l'axe longitudinal de la poutre après flexion (déformé) est appelée ligne élastique. On s'intéresse au calcul des déformations élastiques à la flexion pour pratiquement deux raisons :

- Calcul à la rigidité : en plus du calcul à la résistance, on doit parfois vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise.

- Le calcul des déformations est essentiel pour l'analyse des systèmes hyperstatiques, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant:

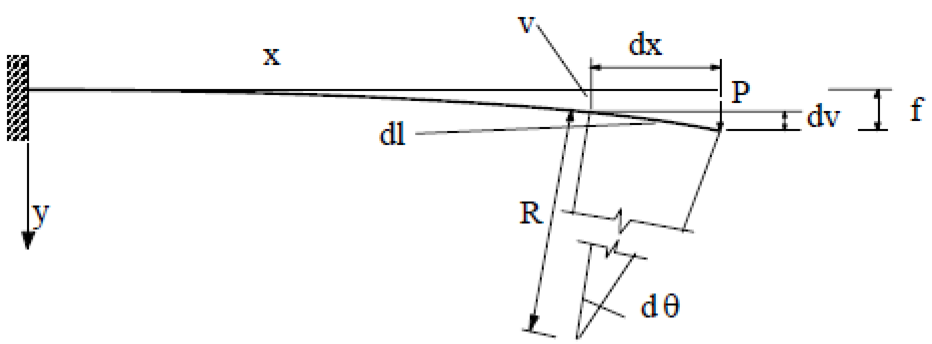


Fig 1

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z} \qquad \text{(II-1)}$$

L'arc GG' ayant pour longueur dl:

$$dl = Rd\theta \qquad \text{(II-2)}$$

Ou

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl} \qquad \text{(II-3)}$$

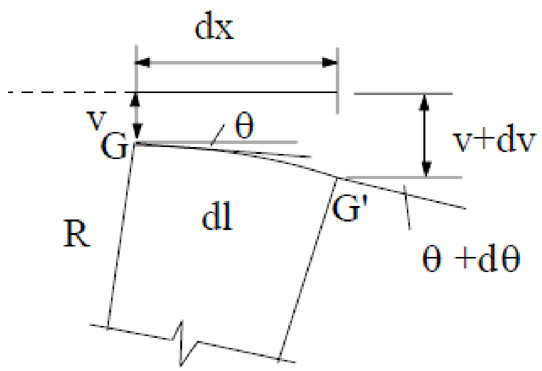


Fig 2

La tangente de la courbure v au point x est défini par

$$\frac{dv}{dx} = tg\theta \qquad \text{(II-4)}$$

Pour des angles de rotations très petits on assimile :

$$tg\theta = \theta \qquad \text{(II-5)}$$

Et

$$dl = dx \qquad \text{(II-6)}$$

En remplaçant (II-5) et (II-6) par leurs valeurs dans (II-3) et (II-4) on obtient :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \qquad \text{(II-7)}$$

Et

$$\theta = \frac{dv}{dx} \qquad \text{(II-8)}$$

En dérivant (II-8) par rapport à x :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{(II-9)}$$

Des équations (II-7) et (II-9), il en résulte :

$$\frac{1}{R}=\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{(II-10)}$$

L'équation (II-1) s'écrira donc:

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_z}{EI_z} \qquad \text{(II-11)}$$

C'est l'équation différentielle de la ligne élastique que l'on intègre dans chaque cas particulier afin de déterminer les flèches des poutres. Le signe dans l'équation (13-11) correspond à :

(1) x et v sont positifs vers la droite et vers le bas respectivement.

(2) l'angle θ est positif dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe x.

(3) M positif quand il tend les fibres inférieures.

(4) la courbure est positive si la courbe est concave vers le bas (M>0 et 1/R>0).

METHODES DES PARAMETRES INITIAUX (MacAulay)

La méthode des paramètres initiaux est basée sur le principe de la fonction discontinue pour la détermination d'une expression unique du moment fléchissant d'une poutre de plusieurs tronçons. L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes $C_1=\theta_0$ et $C_2=V_0$ qui s'avère être les paramètres initiaux. Ainsi si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de v(x) et θ(x) sont données par les équations :

$$EI\theta(x)=EI\theta_0+\sum M\frac{(x-a)}{1!}+\sum P\frac{(x-b)^2}{2!}+\sum q_c\frac{(x-c)^3}{3!}-\sum q_d\frac{(x-d)^3}{3!}+\sum q_c^{'}\frac{(x-c)^4}{4!}$$
$$-\sum q_d^{'}\frac{(x-d)^4}{4!}+\dots$$

$$EIv(x)=EIv_0+EI\theta_0\frac{x}{1!}+\sum\frac{M(x-a)^2}{2!}+\sum\frac{P(x-b)^3}{3!}+\sum\frac{q_c(x-c)^4}{4!}$$
$$-\sum\frac{q_d(x-d)^4}{4!}+\sum\frac{q_c'(x-c)^5}{5!}-\sum\frac{q_d'(x-d)^5}{5!}+\dots,$$

Où :

M : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement

a : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments M

p : les forces concentrées y compris les réactions

b : distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des forces P qc, qd : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

q'c, q'd : respectivement, les valeurs des dérivées de q aux points x= c et x =d

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :

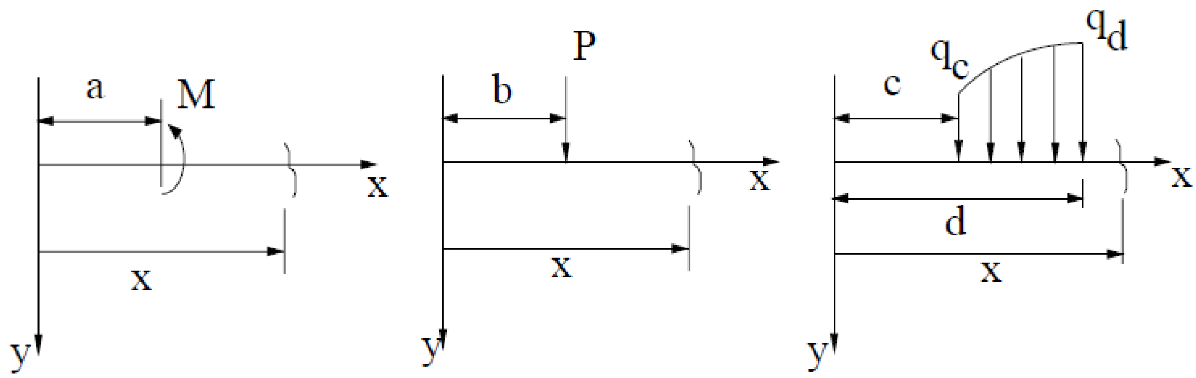


Fig 3

Les deux paramètres initiaux v_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions d'appui de la poutre.

SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

Les équations différentielles de la déformée sont des équations linéaires c'està-dire tous les termes de v, v' et v" sont du premier ordre. Les déformations dues à plusieurs cas de charges peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations sont données dans les aides mémoires de la RDM.

Méthodes moments des aires

Lorsqu'une structure est soumise à l'action de charges appliquées, chaque élément subit une déformation en raison de laquelle l'axe de la structure est dévié de sa position d'origine. Les déformations se produisent également en raison des variations de température et le manque d'ajustement des éléments.

Les déformations des structures sont importantes pour garantir que la structure conçue n'est pas excessivement flexible. Les grandes déformations des structures peuvent endommager ou fissurer les éléments non structurels. La déformation dans les poutres dépend des moments de flexion actifs et de sa rigidité en flexion. Le calcul des déformations dans les structures est également nécessaire.

La méthode moment des aires de est l'une des méthodes les plus efficaces pour obtenir le déplacement en flexion dans les poutres et les cadres. Dans ce procédé, la zone des diagrammes de moment de flexion est utilisée pour calculer la pente et / ou les déformations en des points particuliers le long de l'axe de la poutre ou du cadre. Deux théorèmes connus sous le nom de théorèmes des moments des aires sont utilisés pour le calcul de la déviation. Un théorème est utilisé pour calculer le changement de la pente entre deux points sur la courbe élastique. L'autre théorème est utilisé pour calculer la distance verticale (appelée déviation tangentielle) entre un point de la courbe élastique et une ligne tangente à la courbe élastique en un deuxième point.

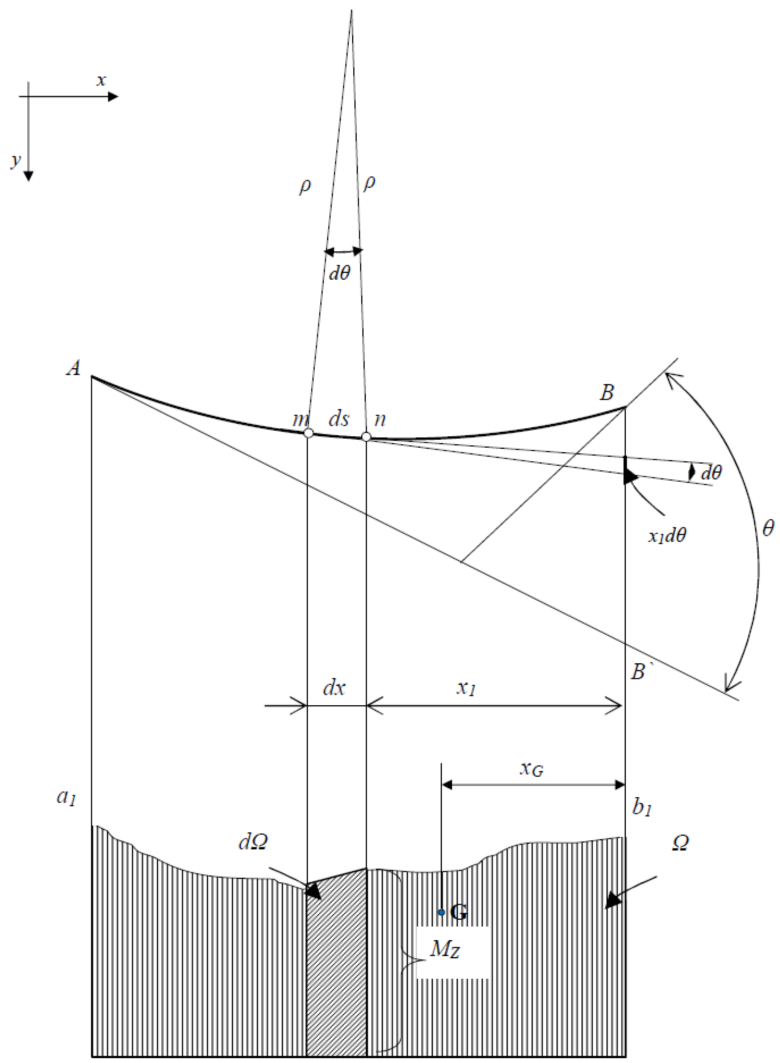


Fig 4

Dans ce paragraphe nous considérons une autre méthode de détermination des déplacements des poutres. Connue sous le nom de la méthode des moments des aires, elle utilise les propriétés du diagramme du moment de flexion. La méthode est adaptée lorsque la déflexion ou la rotation ne sont demandés que pour un point précis de la poutre car il est possible de trouver de tels quantités sans l'établissement de l'équation de la déformée. Cette méthode repose sur deux théorèmes principaux : *Le 1er théorème* sert à calculer l'angle de la rotation relative entre deux sections de la poutre. Ce théorème est appelé le premier théorème de la méthode des moments des aires. *Le 2ème théorème* sert à calculer la distance entre deux tangentes. Ce théorème est appelé le second théorème de la méthode des moments des aires.

Le premier théorème de la méthode des moments des aires :

Enoncé du théorème

L'angle entre les tangentes aux ponts A et B de la ligne élastique est égal à l'aire du diagramme du moment fléchissant comprise entre les ordonnées correspondantes divisée par la rigidité (EI_z) à la rigidité à la flexion de la poutre.

$$\theta = \int_A^B \frac{Mdx}{EI_z} = \frac{\Omega}{EI_z}$$

Ω : Aire de la portion du diagramme des moments fléchissant correspondant à la partie de la déformée considérée.

EI$_z$: Rigidité à la flexion de la poutre.

Démonstration : Soit AB un arc représentant une partie de la déformée et ***a1b1*** la partie correspondante du diagramme des moments fléchissant.(Figure 4) Considérons un élément ***ds*** de la partie de la déformée limité par deux sections très voisines ***m*** et ***n***. la relation de la courbure nous permet d'écrire :

$$d\theta = \frac{1}{\rho} ds = \frac{M_z}{EI_z} ds$$

Puisque sont considérées comme petites, on peut assimiler l'élément ***ds*** à la distance élémentaire ***dx,*** d'où :

$$d\theta = \frac{M_z}{EI_z} dx$$

L'interprétation graphique signifie que l'angle élémentaire ***dθ*** entre deux tangentes consécutives à la ligne élastique est égal au rapport de l'aire élémentaire ***dΩ***, qui est égale à

Mdx, à la rigidité ***EI*_Z**. D'où l'angle θ entre les deux tangentes respectivement en A et en B est obtenu par intégration :

$$\theta = \int_A^B \frac{M_Z}{EI_Z} dx$$

Le second théorème de la méthode des moments des aires :

Enoncé du théorème :

La distance entre le point B te la tangente en A est égale au moment de l'aire du diagramme des moments de flexion entre ***a1*** et ***b1*** , par rapport à la verticale passant par B, divisé par la rigidité par la rigidité à la flexion de la poutre ***EI*_Z** :

$$BB' = \delta = \int_A^B \frac{x_1 M_Z}{EI_Z} dx = \frac{x_G \Omega}{EI_Z}$$

x_G : étant la distance entre le centre de gravité de la surface Ω et la verticale passant par B. Démonstration : Calculons la distance ***BB'*** du point B à la tangente en A. Le déplacement élémentaire correspondant à l'élément ***mn*** compris entre deux tangentes consécutives est :

$$x_1 d\theta = x_1 d\Omega = x_1 \frac{M_Z}{EI_Z} dx$$

La distance ***BB*** est obtenue par intégration, d'où :

$$BB' = \delta = \int_A^B \frac{x_1 M_Z}{EI_Z} dx = \frac{x_G \Omega}{EI_Z}$$

L'interprétation géométrique de cette formule signifie que la distance ***BB'*** est égale au moment de l'aire de la surface **Ω** par rapport à la verticale passant par B divisée par la rigidité **EI_Z.**

Remarque :

Ces deux théorèmes nous permettent de calculer les valeurs absolues de **θ** et **δ**. Pour déterminer les signes de ces quantités, on utilise les règles suivantes : - la rotation **θ** est positive si elle s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre de la tangente en **A** à la tangente en B. - le déplacement δ est positif s'il s'effectue dans le sens des **y>0**.

Processus d'application de la méthode des moments des aires :

a) Calcul des réactions.

b) Tracé approximatif de la déformée en tenant compte des conditions aux appuis.

c) On trace le diagramme des moments fléchissant. Il commode dans certain cas de le tracer par partie. Pour les poutres à rigidité constante, on utilise directement ce diagramme. Pour les poutres à rigidité variable, on trace un deuxième diagramme :

$$\frac{M_z}{EI_z}$$

d) On choisit les points **A** et **B** convenables et on trace les tangentes en ces points à la déformée.

e) On calcule les quantités inconnues par l'un des théorèmes.

Chapitre III : Théorèmes généraux des systèmes élastiques (Applications)

- Energie de déformation élastique en traction
- Energie de déformation élastique en torsion
- Energie de déformation élastique en cisaillement
- Energie de déformation élastique en flexion
- Expression générale de l'énergie de déformation élastique
- Théorème de Castigliano
- Méthode de la force fictive généralisée

Soit un système de poutres en équilibre sollicité par des actions extérieures et tel que les liaisons soient parfaites.

Actions extérieures :

– forces de surface (ponctuelles ou réparties),

– forces à distance,

– forces de liaison (à priori inconnues).

On s'intéresse aux :

– efforts de liaison,

– déplacements,

– déformations,

– contraintes.

Et sous l'effet d'une force extérieure, les matériaux se déforment (Figure 5a), et deux régimes de déformation particuliers sont rencontrés. Lorsqu'après sollicitation le matériau revient dans son état initial (Figure 1b), le régime de déformation est élastique. En revanche, pour des sollicitations plus élevées, la déformation subsiste au moins partiellement après relachement de la force (Figure 1c), et on parle de déformation plastique.

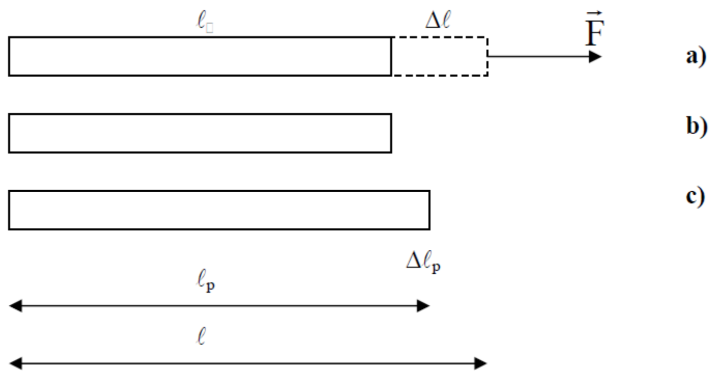


Fig 1 Application d'une force et déformation **(a)**, en déformation purement élastique **(b)** et avec une composante de déformation plastique **(c)**

THÉORÈME DE CASTIGLIANO

Le théorème de Castigliano établit une relation entre les déplacements et le potentiel interne. Pour l'établir, on part de l'égalité de Clapeyron et on calcule plus explicitement le travail des forces extérieures. La dérivée partielle du potentiel interne par rapport à une action quelconque est égale au déplacement du point d'application de cette action mesurée algébriquement sur la ligne d'action de celui-ci. Pour une force ponctuelle F_k, le déplacement $\mathbf{d}_k$ est ainsi :

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = \delta_k$$

Pour un moment ponctuel Mk , la rotation $\mathbf{v}k$ est ainsi :

$$\frac{\partial W}{\partial M_k} = \omega_k$$

En conséquence, si l'on souhaite calculer le déplacement $\boldsymbol{\delta}$ (ou rotation $\boldsymbol{\omega}$) d'une section $\boldsymbol{\Sigma}$ d'une poutre dans une direction donnée, on applique une force fictive F^* (ou moment fictif M^*) dans la section $\boldsymbol{\Sigma}$ suivant cette direction. On aura alors :

$$\delta = \left.\frac{\partial W}{\partial F^*}\right|_{F^*=0}$$

$$\omega = \left.\frac{\partial W}{\partial M^*}\right|_{M^*=0}$$

THÉORÈME DE MÉNABRÉA

Dans un système hyperstatique sur appui rigide, les réactions hyperstatiques dues aux liaisons surabondantes ne travaillent pas pendant la déformation du système. Les dérivées partielles du potentiel par rapport aux réactions hyperstatiques *Ri* sont donc nulles :

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0$$

Calcul des intégrales de Mohr par une méthode simplifiée (méthode de Verescheaguine)

Il s'agit d'une méthode simple lorsqu'un des diagrammes est linéaire (avec $E\,I$ constant), voir la figure 2.

On obtient alors :

$$\frac{1}{EI}\int_{x_1}^{x_2} M_i(x)M_j(x)dx = A \times B$$

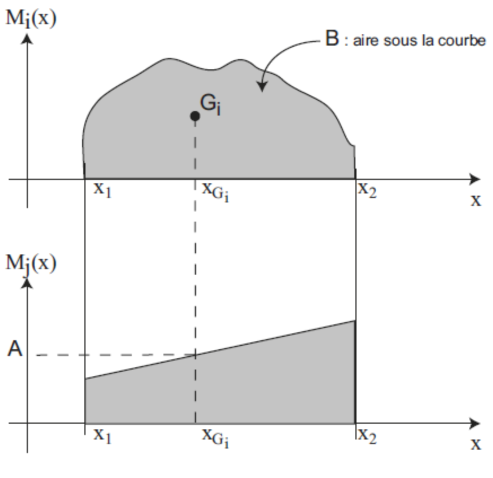
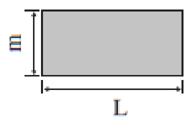
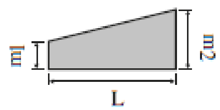
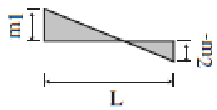
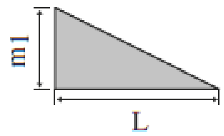
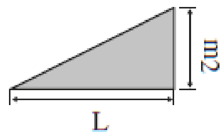
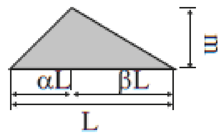
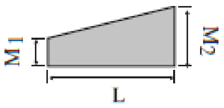
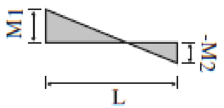
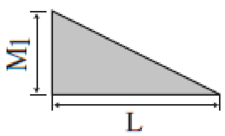
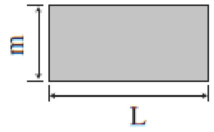
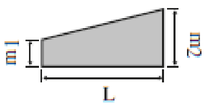
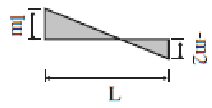
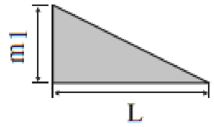
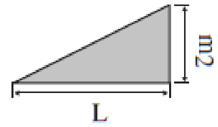
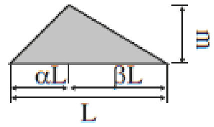
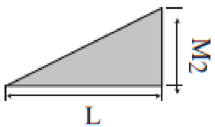
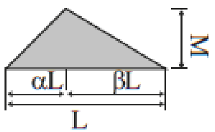
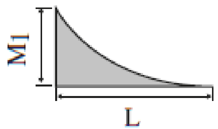
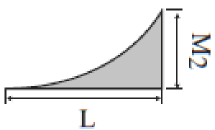


Fig 2

Avec A la valeur dans le diagramme $M_j\,(x)$ (linéaire) au niveau du centre de gravité x_{Gi} du diagramme $M_i\,(x)$ et B l'aire sous la courbe $M_i\,(x)$.

$\int M_i M_j dx$						
	$\frac{L}{2}m(M_1+M_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1+M_1m_2$ $+M_2m_1+2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1-M_1m_2$ $+M_2m_1-2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}m_1(2M_1+M_2)$	$\frac{L}{6}m_1(M_1+2M_2)$	$\frac{L}{6}m(M_1(1+\beta)$ $+M_2(1+\alpha))$
	$\frac{L}{2}m(M_1-M_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1+M_1m_2$ $-M_2m_1-2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}(2M_1m_1-M_1m_2$ $-M_2m_1+2M_2m_2)$	$\frac{L}{6}m_1(2M_1-M_2)$	$\frac{L}{6}m_1(M_1-2M_2)$	$\frac{L}{6}m(M_1(1+\beta)$ $-M_2(1+\alpha))$
	$\frac{L}{2}M_1m$	$\frac{L}{6}M_1(2m_1+m_2)$	$\frac{L}{6}M_1(2m_1-m_2)$	$\frac{L}{3}M_1m_1$	$\frac{L}{6}M_1m_2$	$\frac{L}{6}M_1m(1+\beta)$

$\int M_i M_j dx$						
	$\frac{L}{2}M_2 m$	$\frac{L}{6}M_2(m_1+2m_2)$	$\frac{L}{6}M_2(m_1-2m_2)$	$\frac{L}{6}M_2 m_1$	$\frac{L}{3}M_2 m_2$	$\frac{L}{6}M_2 m(1+\alpha)$
	$\frac{L}{2}Mm$	$\frac{L}{6}M(m_1(1+\beta)$ $+m_2(1+\alpha))$	$\frac{L}{6}M(m_1(1+\beta)$ $-m_2(1+\alpha))$	$\frac{L}{6}Mm_1(1+\beta)$	$\frac{L}{6}Mm_2(1+\alpha)$	$\frac{L}{12}Mm\frac{3-4\alpha^2}{\beta}$ pour $\alpha<\beta$
	$\frac{L}{3}M_1 m$	$\frac{L}{12}M_1(3m_1+m_2)$	$\frac{L}{12}M_1(3m_1-m_2)$	$\frac{L}{4}M_1 m_1$	$\frac{L}{12}M_1 m_2$	$\frac{L}{12}M_1 m(1+\beta+\beta^2)$
	$\frac{L}{3}M_2 m$	$\frac{L}{12}M_2(m_1+3m_2)$	$\frac{L}{12}M_2(m_1-3m_2)$	$\frac{L}{12}M_2 m_1$	$\frac{L}{4}M_2 m_2$	$\frac{L}{12}M_2 m(1+\alpha+\alpha^2)$

Chapitre IV : sollicitations composées

- Généralités
- Flexion déviée (généralités, contraintes, déformations)
- Flexion composée
- Flexion –torsion

INTRODUCTION

Pour simplifier l'étude des effets des sollicitations, nous avons jusqu'ici considéré les différentes sollicitations séparément. Dans le cas général une section peut être soumise à l'action des six composantes de l'effort internes à savoir (N, Tx, Ty, Mx, My, Mz) et qui ont été classées sous quatre catégories de sollicitation ou déformation simple: traction et compression (N), cisaillement (Tx , Ty) torsion Mx et flexion My, Mz. Dans la pratique courante, on rencontre rarement des cas où les sollicitations sont simples moins encore ou les six composantes des efforts internes apparaissent en même temps au niveau d'une section. On rencontre, cependant, différents types de leurs combinaisons. Sous les hypothèses de la résistance des matériaux ces combinaisons peuvent être analysées en utilisant le principe de superposition des efforts. Dans ce chapitre on étudiera la combinaison de deux flexions dite flexion déviée et la combinaison de la flexion déviée avec la traction ou la compression communément appelée flexion composée.

FLEXION DEVIEE

La flexion déviée est le résultat de l'action des forces extérieures agissant suivant un plan différent de ceux des axes principaux de la poutre. Par exemple une panne d'une toiture inclinée soumise à une charge verticale (Fig.1).

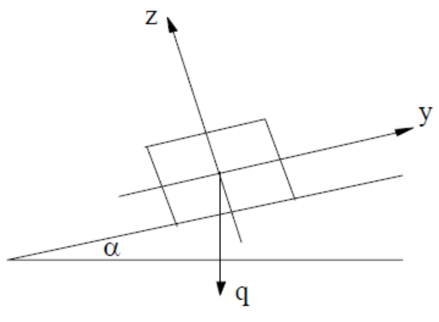


Fig 1

L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux.

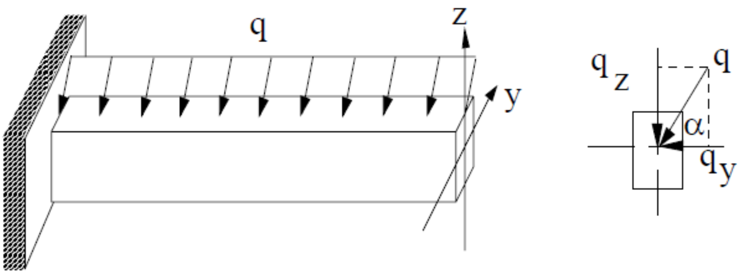


Fig 2

Pour une action simultanée de My et Mz, les contraintes en un point de coordonnées y et z se déterminent par la formule :

$$\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} y \tag{IV-1}$$

Ce résultat est établi directement en considérant que la flexion déviée comme la somme de deux flexions dirigées suivant les axes centraux d'inertie et en appliquant le principe de superposition.

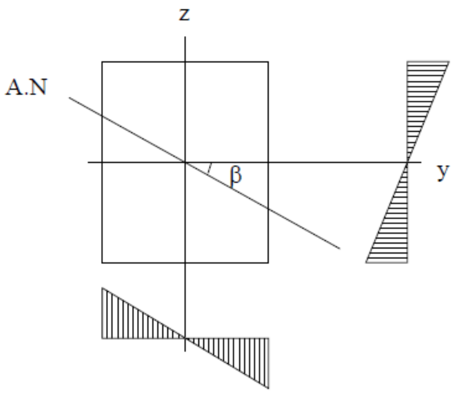


Fig 3

L'axe neutre, défini par σ = 0, a pour équation:

$$\frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} z \tag{IV-2}$$

En flexion déviée due à une charge inclinée de **α** par rapport à l'axe (oy) on a les relations :

$$\begin{aligned} M_y &= M\cos\alpha \\ M_z &= M\sin\alpha \end{aligned} \tag{IV-3}$$

Où M est le moment suivant un axe orienté de α par rapport à (y-y). La tangente de l'axe neutre s'écrit alors:

$$\mathrm{tg}\beta = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} = -\mathrm{ctg}\alpha \frac{I_z}{I_y} \tag{IV-4}$$

Et l'expression (IV-1) peut être mise sous la forme:

$$\sigma = M\left(\frac{Z\cos\alpha}{I_y} + \frac{Y\sin\alpha}{I_z}\right) \tag{IV-5}$$

Vérification à la résistance

Le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totale maximale. D'après la formule (10-1) les contraintes maximales se localisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Pour une section symétrique on a:

$$\sigma_{max} = \left| M_{max}\left(\frac{Y_{max}\sin\alpha}{I_Z} + \frac{Z_{max}\cos\alpha}{I_Y}\right)\right| \le [\sigma_+] \tag{IV-6}$$

$$\sigma_{min} = -\left| M_{max}\left(\frac{Y_{max}\sin\alpha}{I_z} + \frac{Z_{max}\cos\alpha}{I_y}\right)\right| \le [\sigma_-] \tag{IV-7}$$

FLEXION COMPOSEE

La flexion composée provient de l'action conjuguée d'une flexion due à un chargement latérale et d'un effort axial (traction ou compression) ou seulement de l'effet d'un effort normal excentré par rapport à l'axe moyen de l'élément.

Flexion composée avec traction ou compression

C'est le cas général d'une poutre soumise à des chargements transversaux et longitudinaux, ou en une section arbitraire, les efforts Mz, My, Tx, Ty ainsi que N sont présents. En utilisant le principe de superposition, on peut déterminer la contrainte normale globale en un point quelconque de la section normale par:

$$\sigma = \frac{N_x}{S} + \frac{M_Z}{I_Z}y + \frac{M_Y}{I_Y}z \tag{IV-8}$$

Traction ou compression excentrée

La flexion composée peut être aussi le résultat de l'action d'une force longitudinale excentrée par rapport à l'axe moyen de la poutre. On rencontre ce cas de chargement généralement dans les éléments courts sollicités par une force excentrée dont les coordonnées du point d'application sont yp, zp . Les efforts internes en une section quelconque sont:

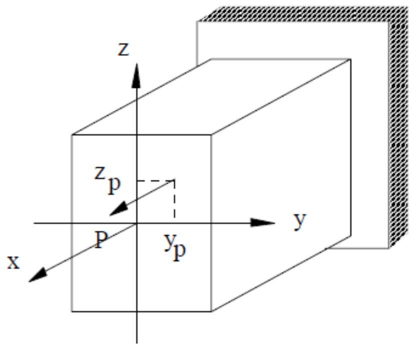


Fig 5

$$N = F,\ M_Z = F.y_P$$

Et (IV-9)

$$M_y = F.z_P$$

D'où les contraintes en un point dans la section :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} y \qquad \text{(IV-10)}$$

$$\sigma = \frac{F}{S}\left[1 + \frac{z_P S_Z}{I_Y} + \frac{y_P S_Y}{I_Z}\right] \qquad \text{(IV-11)}$$

On pose

$$i = \sqrt{\frac{I}{S}} \qquad \text{(IV-12)}$$

$$= \frac{F}{S}\left[1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y\right] \qquad \text{(IV-13)}$$

L'équation de l'axe neutre

$$\sigma = 0 \Rightarrow 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y = 0 \qquad \text{(IV-14)}$$

D'après l'équation de l'axe neutre, ce dernier coupe les axes (zz) et (yy) aux points :

$$y = 0 \quad , \quad z_{AN} = -\frac{i_y^2}{z_P} \tag{IV-15}$$

Et

$$z = 0 \quad , \quad y_{AN} = -\frac{i_z^2}{y_P} \tag{IV-16}$$

Donc l'axe neutre coupe les axes du quadrant opposé de celui du point d'application de la force.

Le noyau central

D'après l'équation de l'axe neutre l'étendu de la partie de la section comprimée ou tendue dépend de l'excentricité de la force. Il est donc d'un grand intérêt pratique d'éviter dans la section droite le développement des contraintes de traction dues à la force compressive excentrique pour assurer la résistance des barres en matériau fragile à la traction. On appelle noyau central de section la partie du plan de la section droite contenant le centre de gravité et limitée par un contour fermé, dans lequel la force appliquée provoque des contraintes de même signe en tous les points de la section droite. Le contour du noyau central de la section est déterminé par l'ensemble des positions des points d'application de la force excentrée qui fait passer l'axe par tous les points tangents à la section de telle manière qu'elle ne le coupe nulle part. Les coordonnées des points d'application de la force sont déterminées d'après les formules suivantes :

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} \quad , \quad z_P = -\frac{i_y^2}{z_{AN}} \tag{IV-17}$$

Ces formules traduisent la relation entre la position de l'axe neutre et le point d'application de la force.

Vérification à la résistance

Pour une section symétrique, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma = \frac{F}{S} \pm \frac{M_Z}{W_Z} \pm \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma] \tag{IV-18}$$

TORSION

GENERALITES

Si de tous les efforts internes seul le moment Mx est présent, il provoque une torsion. Ce type de sollicitation est très répandu dans les structures de mécanique et surtout au niveau des arbres traînés par les moteurs. L'analyse des éléments des structures de génie civil soumis à la torsion est moins fréquente car l'existence du moment de torsion entraîne que les forces extérieures doivent obligatoirement appartenir à un plan perpendiculaire à celui de l'élément, et cela n'est pris en compte que lors de l'analyse des structures en 3-dimensions, comme par exemple l'installation de tuyauterie d'un système de refroidissement d'une centrale nucléaire ou d'une base de pompage de pétrole (Fig. 9.1).

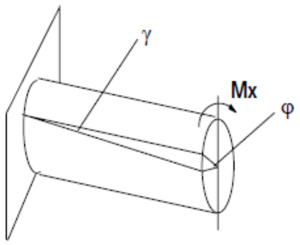


Fig 6

CONTRAINTES ET DEFORMATION

Lorsqu'on sollicite en torsion une poutre circulaire, on ne constate qu'une section quelconque tourne dans son plan d'un angle proportionnel à son abscisse. Si l'angle de rotation est petit, alors la longueur de la barre et le rayon de la section restent inchangés. De plus, une ligne longitudinale sur la surface de la barre a-b tourne d'un petit angle vers la position (ab'), On constate qu'un élément rectangulaire infinitésimal sur la surface de la barre de longueur dx se déforme en parallélogramme. L'angle de la déformation γ est appelé: distorsion exprimé par:

$$tg\gamma = \frac{bb'}{ab} \qquad \text{(IV-1)}$$

$$bb' = rd\varphi \quad \text{et} \quad ab = dx$$

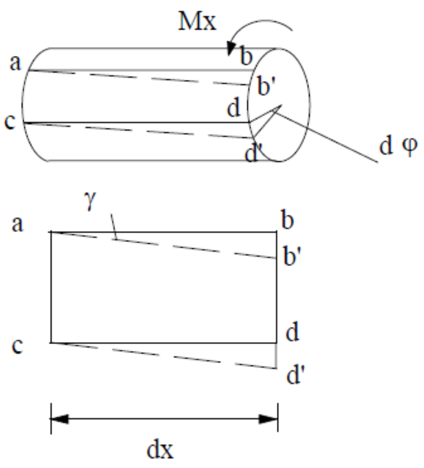


Fig 7

En tenant compte du fait que l'angle γ est petit on assimilera **tgγ** à γ et on obtient alors:

$$\gamma = r\frac{d\varphi}{dx} \tag{IV-2}$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ est la rotation relative analogue à

$\frac{\Delta L}{L}$ déformation relative longitudinale.

D'après la loi de Hooke au cisaillement:

$$\tau = G\,\gamma \tag{IV-3}$$

$$\Rightarrow \tau = Gr\frac{d\varphi}{dx} \tag{IV-4}$$

La relation entre le moment de torsion et l'angle ϕ peut être obtenue sachant que les contraintes tangentielles τ réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion Mx:

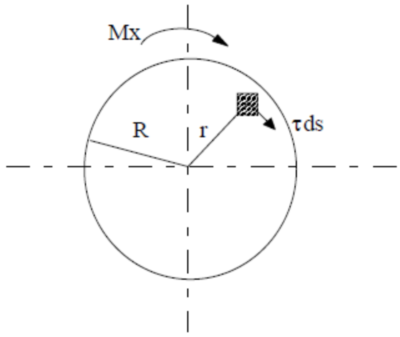


Fig 8

$$M_x = \int_s r\tau ds \qquad \text{(II-5)}$$

En substituant **τ** par son expression (II-4)

$$M_x = \int_s r^2 G \frac{d\varphi}{dx} ds \qquad \text{(II-6)}$$

Finalement, la relation entre le moment de torsion et l'angle

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} \int_s r^2 ds \qquad \text{(II-8)}$$

On reconnaît dans cette expression le moment quadratique polaire:

$$I_p = \int_s r^2 ds \qquad \text{(II-8)}$$

D'où l'expression de la déformation angulaire relative:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{GI_p} \qquad \text{(II-9)}$$

La quantité $\mathbf{GI_p}$ est la rigidité à la torsion.

En remplaçant $\frac{d\varphi}{dx}$ par sa valeur dans l'expression (II-4), on obtient:

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p} \qquad \text{(II-10)}$$

Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section. La contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures:

Pour $r = R \qquad \tau_{max} = \frac{M_x R}{I_p}$ (II-11)

La quantité $W_p = \frac{I_p}{R}$ est appelée module de torsion.

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être obtenu de l'expression (II-9):

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_x}{GI_p} dx \qquad \text{(II-12)}$$

Si la forme de la section et le moment sont constants alors:

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p}$$ (le glissement d'une extrémité par rapport à l'autre)

CALCUL DE RESISTANCE A LA TORSION

En plus de la condition de résistance, lors du calcul des barres à la torsion, on vérifie aussi la condition de rigidité. Les deux conditions s'écrivent donc:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_t} \leq [\tau]$$

$$\varphi_{max} = \frac{M_x L}{GI_t} \leq [\varphi]$$

On admet généralement **[ϕ] = 0.3 ° / 1** m de longueur

Chapitre V : **Résolution des systèmes hyperstatiques**

- Généralités (systèmes de barres, nœuds, articulations, cadres, portiques etc...)
- Méthode des paramètres initiaux
- Méthode de superposition des effets de forces
- Méthode des équations des 3 moments
- Méthode des forces

On appelle poutres hyperstatiques, les poutres dont les réactions aux appuis ne peuvent pas être déterminées par les seules équations de la statique. Le degré d'hyperstaticité de la poutre est égal au nombre d'inconnues surabondantes par rapport aux 3 équations d'équilibre de la statique. Les exemples de systèmes hyperstatiques sont nombreux: la majorité des structures portantes de génie civil sont hyperstatiques comme les portiques auto-stables, les poutres continues sur plusieurs appuis etc...(Fig. 1).

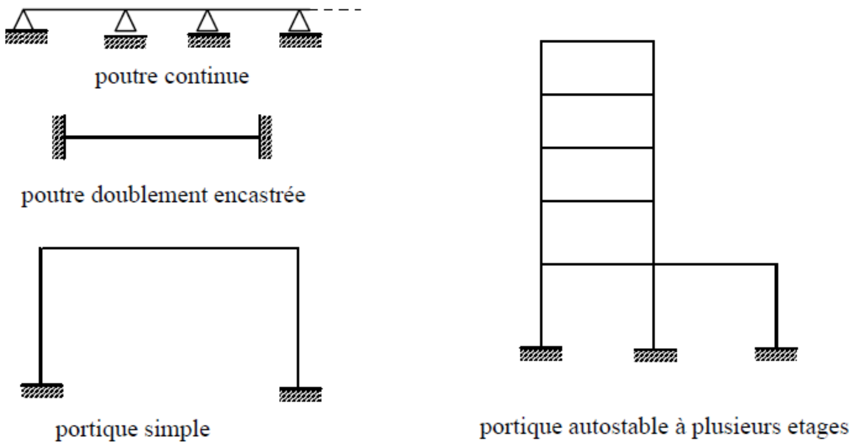


Fig 1

METHODES DE RESOLUTION

Pour déterminer les réactions des poutres hyperstatiques, on utilise des équations supplémentaires établies par l'équation différentielle de la déformée aux conditions d'appuis qui permettent non seulement de déterminer les constantes d'intégration mais aussi d'avoir pour chaque inconnue surabondante une équation supplémentaire. On obtient ainsi les équations nécessaires à la résolution du système. La procédure la plus simple consiste à supprimer les liaisons surabondantes pour rendre la poutre isostatique. On détermine ensuite les rotations et les déplacements aux niveaux des appuis sous l'effet des charges données et des inconnues hyperstatiques par l'une des méthodes usuelles telles que la méthode des paramètres initiaux ou de la poutre fictive.

Méthode des paramètres initiaux

Application :

Déterminer le moment maximal de la poutre hyperstatique ci-contre.

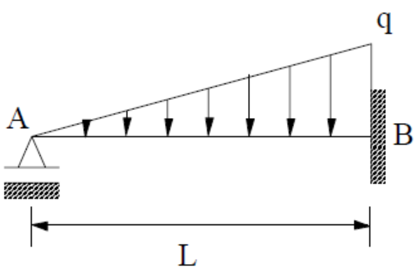


Fig 2

Solution:

On établit les équations de la déformée en fonction de la réaction R au point A.

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - R_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{L}\frac{x^4}{24}$$

$$EIv(x) = EIv_0 + EI\theta_0 x - R_A \frac{x^3}{6} - \frac{q}{L}\frac{x^3}{120}$$

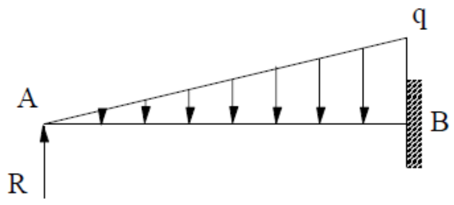


Fig 3

Les trois conditions aux limites nous permettent de déterminer en plus des paramètres initiaux, la réaction R:

$$v(L) = 0 \qquad \theta(L) = 0 \qquad v(0) = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow EIv(L) = 0 \Rightarrow EI\theta_0 L - R\frac{L^3}{6} + \frac{qL^4}{120} = 0$$

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow \qquad 0 = EI\theta_0 - R\frac{L^2}{2} + \frac{qL^3}{24}$$

D’où

$$R = \frac{qL}{10}$$

$$\theta_0 = \frac{qL^3}{120EI}$$

Les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant sont:

$$T = \frac{qL}{10} - \frac{q}{L}\frac{x^2}{2}$$

$$M_x = \frac{qL}{10}x - \frac{q}{L}\frac{x^3}{6}$$

$$T = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{5}} \rightarrow M_{max} = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}}$$

Méthode de la suppression des liaisons

La méthode consiste à supprimer des liaisons jusqu'à ce que la structure devienne isostatique indéformable (s'assurer qu'aucune barre ou partie du système ne constitue un mécanisme). Le nombre de liaisons supprimées représente le degré d'hyperstaticité (voir exemples figure 4.4).

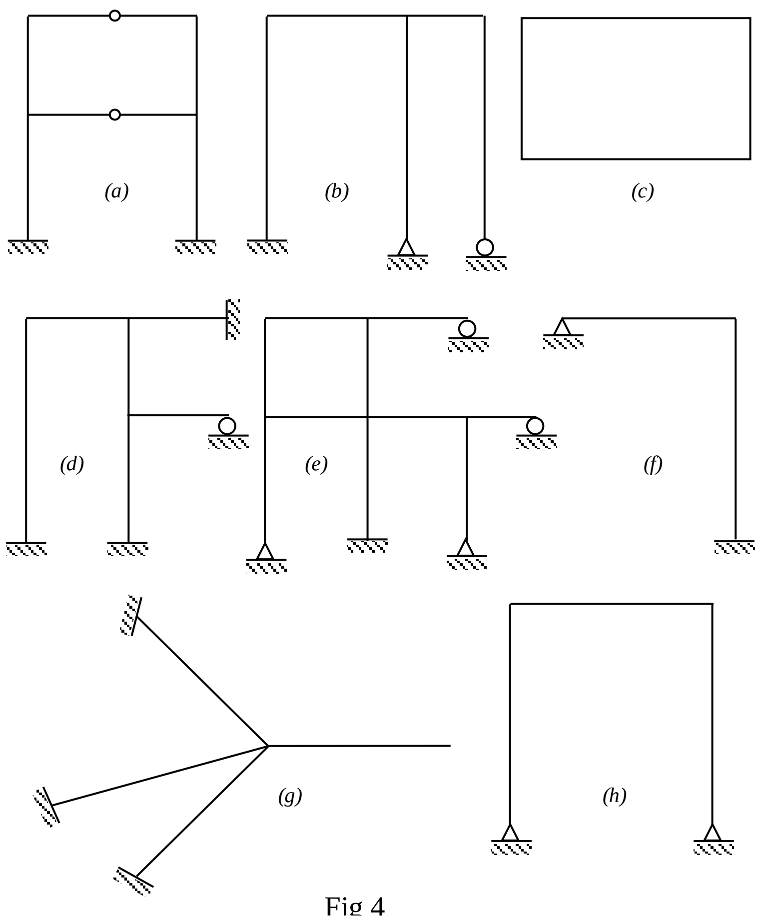


Fig 4

Méthode des contours fermés

Appelons :

- "*c*" le nombre de contours de la structure
- "*a*" le nombre d'articulations (y compris les appuis doubles)

- "*s*" le nombre d'appuis simples

Le degré d'hyperstaticité est donné par :

$H = 3c - a - 2s$

Cas des poutres en treillis chargées indirectement

H = b + l - 2n

- $b + l - 2n < 0 \Rightarrow$ système déformable
- $b + l - 2n = 0 \Rightarrow$ système isostatique
- $b + l - 2n > 0 \Rightarrow$ système hyperstatique

avec :

- "*b*" nombre de barres
- "*l*" nombre de liaisons dans les appuis (encastrement = 3 ; appui double = 2; appui simple = 1)
- "*n*" nombre de nœuds

Méthodes fondamentales de calcul des structures hyperstatiques

Nous avons vu précédemment que pour déterminer les réactions et les éléments de réduction des systèmes hyperstatiques, il fallait des équations supplémentaires, qui sont obtenues à partir des conditions de continuité de la déformée de la structure ou à partir des conditions d'équilibre statique de la structure déformée.

Dans le cadre de l'hypothèse des *petites déformations,* les efforts sont indépendants des déformations dans les structures isostatiques, alors que pour les systèmes hyperstatiques les efforts sont fonctions aussi bien des charges que des déformations de la structure (voir § 3.17, exemple de la poutre continue soumise au seul déplacement de l'un de ses appuis).

En raison de l'interdépendance entre les efforts et les déformations (donc les déplacements), il en résulte deux possibilités générales d'aborder le calcul des structures hyperstatiques, c'est-à-dire soit en s'intéressant aux efforts (dans les liaisons surabondantes) (méthode des forces), soit en s'intéressant aux déplacements (méthode des déplacements).

Méthode des forces

Elle est parfois appelée méthode des efforts ou méthode des sollicitations. Avec cette méthode, on prend comme inconnues les forces dans les liaisons surabondantes. Les liaisons surabondantes sont supprimées et remplacées par des forces inconnues qu'il faut chercher en premier lieu. La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ et aux forces introduites (les inconnues hyperstatiques).

Les équations supplémentaires qui permettent de déterminer les forces inconnues sont obtenues en exprimant la "continuité" de la structure déformée dans les liaisons supprimées (surabondantes).

Comme il y a plusieurs possibilités de rendre isostatique un système hyperstatique, il en résulte plusieurs façons de mettre le problème en équations. Pour la simplification des calculs, il y a intérêt à considérer les liaisons surabondantes qui rendent les équations générales de continuité aussi simples que possible.

Cette méthode est essentiellement caractérisée par la création de coupures qui libèrent chacune une liaison surabondante. Chaque liaison supprimée est ensuite remplacée par une force qui joue le même rôle qu'elle.

Formule des trois moments

Etablissement de la formule

Considérons une poutre continue sans encastrements à n travées (Figure 5). Son degré

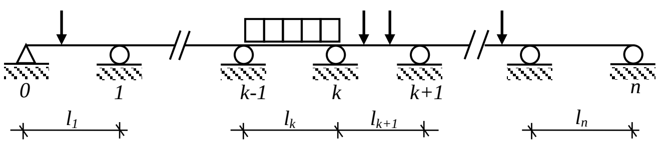


Fig 5

d'hyperstaticité est égal à n-1.

Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissant agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui. S’agissant d’inconnues hyperstatiques internes, chaque coupure libère deux inconnues (des moments) égales est opposées.

En pratique, cela revient à introduire une articulation au-dessus de chaque appui intermédiaire (Figure 6.5a). Pour remplacer les liaisons supprimées, on applique aux lèvres de chacune des

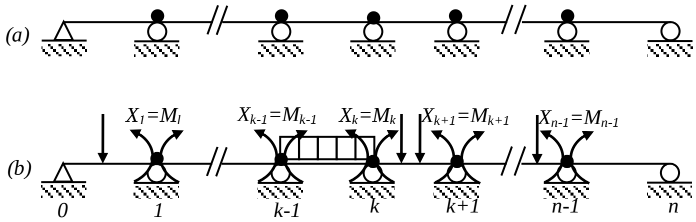


Fig 6 : Système statique de base

coupures deux couples égaux et opposés (M_1, M_2, …, M_{n-1}) (Figure 6).

Le système statique de base ainsi obtenu présente une propriété remarquable. En effet, on remarque que si on charge une travée, les autres ne subissent aucune influence. Ce résultat signifie que le système principal se comporte comme une succession de poutres simplement appuyées obtenues par séparation des n travées (Figure 6).

Pour calculer les moments inconnus aux appuis, on applique le théorème de Menabrea pour chacun d'eux :

$$\frac{\partial W}{\partial M_1} = c_1,\ \frac{\partial W}{\partial M_2} = c_2,\ \dots\ \frac{\partial W}{\partial M_k} = c_k,\ \dots\ \frac{\partial W}{\partial M_{n-1}} = c_{n-1}$$

où les c_i représentent les manques de concordance des appuis. Ils sont nuls dans le cas des systèmes concordants. Les équations du système ci-dessus peuvent se mettre sous la forme connue de Müller-Breslau. L'équation courante relative à l'inconnue M_k s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial M_k} = c_k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{ki}^u M_i + \delta_{kF} = c_k$$

En développant l'expression précédente, le système des "n-1" équations de continuité prend la forme :

$$\delta_{11}^u M_1 + \delta_{12}^u M_2 + \ldots + \delta_{1n-1}^u M_{n-1} + \delta_{1F} = c_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_{k1}^u M_1 + \delta_{k2}^u M_2 + \ldots + \delta_{kn-1}^u M_{n-1} + \delta_{kF} = c_k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_{n-11}^u M_1 + \delta_{n-12}^u M_2 + \ldots + \delta_{n-1n-1} M_{n-1} + \delta_{n-1F} = c_{n-1}$$

Chacune des équations exprime la condition de continuité de la poutre déformée au-dessus d'un appui. L'équation k par exemple, exprime que la rotation relative entre les lèvres de la coupure au-dessus de l'appui k est égale au manque de concordance correspondant. Dans le cas d'un système concordant cette rotation relative est nulle ; ou encore que la rotation à gauche (θ_k^g) est égale à la rotation à droite (θ_k^d) ; ce qui signifie aussi qu'en chaque point (appui par exemple) il n'y a qu'une tangente car la ligne élastique (la déformée) est continue (Figure 6a).

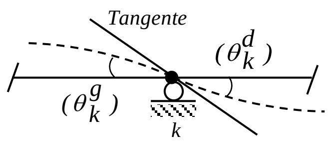


Figure 6a

Signification des coefficients δ_{ij}^u et δ_{iF}

Les coefficients δ_{ij}^u et δ_{iF} représentent les rotations relatives des lèvres de la section coupée i du système de base. Les premières sont des rotations par unité de couple.

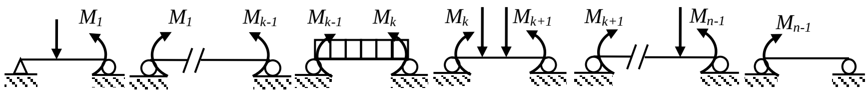


Fig 7

- δ_{ij}^u est la rotation relative des lèvres de la section i du système de base, sous l'effet d'un couple unitaire appliqué aux lèvres de la coupure j (les sections i et j se trouvant dans le cas présent au dessus des appuis intermédiaires i et j).

- δ_{iF} est la rotation relative des lèvres de la section i du système de base, sous l'effet des charges extérieures (notées F).

Considérons par exemple l'équation de continuité k (relative à la coupure k). Elle s'écrit :

$$\delta_{k1}^u M_1 + \delta_{k2}^u M_2 + ... + \delta_{kk-1}^u M_{k-1} + \delta_{kk}^u M_k + \delta_{kk+1}^u M_{k+1} + ... + \delta_{kn-1}^u M_{n-1} + \delta_{kF} = c_k \quad (1)$$

On voit apparaître dans l'équation les coefficients δ_{kj}^u avec j = 1, 2, … , n-1 et δ_{kF}. Si nous ne tenons compte que du moment fléchissant, qui est la sollicitation prépondérante, ces coefficients s'obtiennent par les intégrales suivantes :

$$\delta_{kj}^u = \int_0^L \frac{m_{sk} m_{sj}}{EI} dx \quad (a) \qquad \delta_{kF} = \int_0^L \frac{M_{sF} m_{sk}}{EI} dx \quad (b) \qquad (2)$$

$L = longueur\ totale = \sum_{i=1}^{n} l_i$

où m_{sk} (m_k) et m_{sj} (m_j) sont les moments fléchissants produits dans la section courante s du système fondamental par les couples unitaires M_k=1 et M_j=1 agissant en k et en j, respectivement (Figure 7). M_{SF} étant le moment fléchissant dans la section courante du système de base sous l'action des charges extérieures (F).

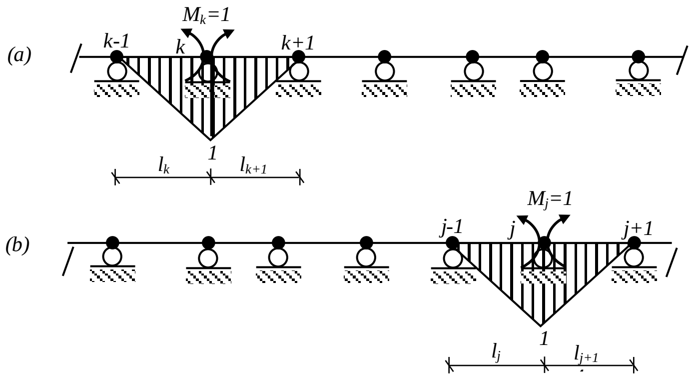


Figure 6.8 : Diagrammes *m_{sk}* et *m_{sj}*

On constate que chaque couple unitaire produit un moment fléchissant uniquement sur les deux travées situées de part et d'autre de l'appui où il est appliqué. Pour que les moments dans la section courante s produite par M_k=1 et M_j=1 soient simultanément différents de zéro, il faut que les indices k et j ne diffèrent pas de plus d'une unité. On en déduit que les coefficients δ^u_{kj} sont nuls dès que k diffère de j de plus d'une unité. Ainsi, dans l'équation (1) seuls les coefficients $\delta^u_{k-1\,k}$, δ^u_{kk} *et* $\delta^u_{k\,k+1}$ sont différents de zéro.

Compte tenu de ce résultat, l'équation générale de continuité (1) se simplifie et devient :

$$\delta^u_{k\,k\text{-}1} M_{k-1} + \delta^u_{k\,k} M_k + \delta^u_{kk+1} M_{k+1} + \delta_{kF} = c_k \tag{3}$$

ou encore :

$$\delta^u_{k\,k\text{-}1} M_{k-1} + \delta^u_{k\,k} M_k + \delta^u_{kk+1} M_{k+1} = c_k - \delta_{kF} \tag{4}$$

On remarque que trois moments fléchissants interviennent dans cette équation, d'où son nom de "formule des trois moments".

6.3.2 Calcul des coefficients de la formule des trois moments

Il reste à calculer les coefficients intervenant dans l'équation (4). Considérons une poutre continue sans encastrement comportant n travées. Les diagrammes unitaires permettant le calcul des coefficients δ^u_{kk-1}, δ^u_{kk} *et* δ^u_{kk+1} sont représentés à la figure 9.

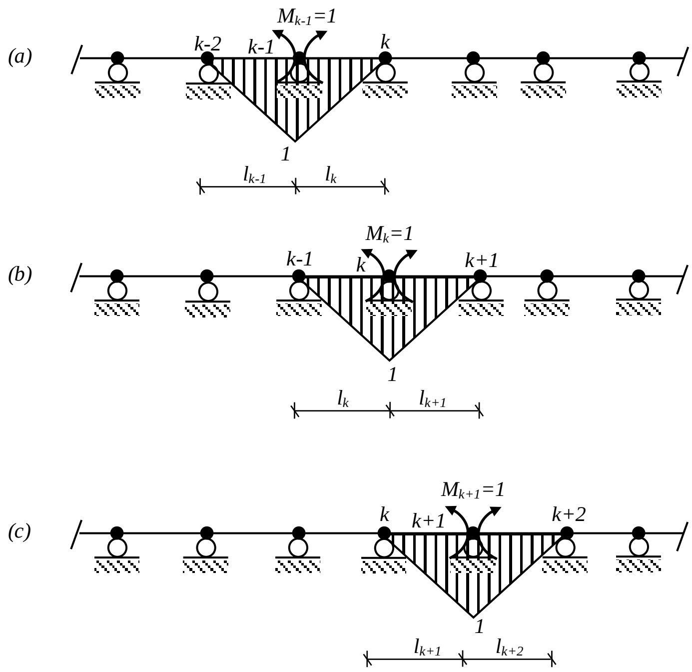


Fig 8: Diagrammes unitaires m_{sk-1}, m_{sk} et m_{sk+1}

• Calcul de δ^u_{kk-1} :

$$\delta^u_{kk-1} = \int_0^L \frac{m_{sk} m_{sk-1}}{EI} dx = \sum_{i=1}^{n} \int_o^{l_i} \frac{m_{sk} m_{sk-1}}{(EI)_i} dx = \int_0^{l_k} \frac{m_{sk} m_{sk-1}}{(EI)_k} \qquad (5)$$

avec :

$$m_{sk-1} = 1 - \frac{x}{l_k} \;\; et \; m_{sk} = \frac{x}{l_k}$$

d'où :

$$\delta^u_{kk-1} = \int_0^{l_k} \frac{x}{l_k}\left(1 - \frac{x}{l_k}\right) \frac{dx}{(EI)_k} = \frac{1}{l_k^2} \int_0^{l_k} \frac{x(l_k - x)}{(EI)_k} dx \qquad (5)'$$

Si $(EI)_k$ est constante sur l_k, on obtient :

$$\delta^u_{kk-1} = \frac{l_k}{6(EI)_k}$$

Ce dernier résultat - cas avec $(EI)_k$ constante sur la travée l_k - s'obtient plus rapidement avec la méthode graphique ; il vient :

$$\delta^u_{kk-1} = \frac{1}{(EI)_k}\left(\frac{1}{2}.1.l_k\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{l_k}{6(EI)_k}$$

Si la rigidité flexionnelle varie sur chaque travée, on calcule les coefficients analytiquement comme on l'a fait pour δ^u_{kk-1}.

Pour le reste des calculs nous supposons que EI est constante sur chaque travée.

• Calcul de δ^u_{kk} (méthode graphique)

$$\delta^u_{kk} = \frac{1}{(EI)_k}\left(\frac{1}{2}.1.l_k\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{(EI)_{k+1}}\left(\frac{1}{2}.1.l_{k+1}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{l_k}{3(EI)_k} + \frac{l_{k+1}}{3(EI)_{k+1}} \qquad (6)$$

• Calcul de δ^u_{kk+1} (méthode graphique)

$$\delta^u_{k\,k+1} = \frac{1}{(EI)_{k+1}}\left(\frac{1}{2}.1.l_{k+1}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{l_{k+1}}{6(EI)_{k+1}} \qquad (7)$$

• Calcul de δ_{kF}

Par définition, voir relation 2 (a) :

$$\delta_{kF} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{m_{sk}\,M_{sF}}{(EI)_i}dx = \int_0^{l_k}\frac{m_{sk}\,M_{sF}}{(EI)_k}dx + \int_0^{l_{k+1}}\frac{m_{sk}\,M_{sF}}{(EI)_{k+1}}dx \qquad (8)$$

Seules les deux intégrales sur l_k et l_{k+1} subsistent puisque m_{sk} est nul en dehors de ces travées. Soit :

$$\delta_{kF} = R^{g(F)}_k + R^{d(F)}_k \qquad (9)$$

- $R^{g(F)}_k$= rotation de la section k (au-dessus de l'appui k) du système statique de base sous l'effet des charges extérieures agissant sur la travée l_k.

- $R^{d(F)}_k$= rotation de la section k du système statique de base sous l'effet des charges appliquées sur la travée l_{k+1}.

• Calcul pratique de δ_{kF}

1ère méthode

Considérons les travées l_k et l_{k+1} (du système isostatique de base) adjacentes à l'appui considéré k. Les deux travées constituent deux poutres simplement appuyées comme on l'a vu.

Le diagramme des moments fléchissant de chaque poutre sous les charges extérieures peut être aisément obtenu. Selon la méthode de la poutre conjuguée, utilisée pour le calcul des déplacements des systèmes isostatiques, si on charge (fictivement) les poutres par leurs diagrammes des moments respectifs divisés par la rigidité flexionnelle ($q_f=M_{sF}/EI$), alors $R_k^{g(F)}$ et $R_k^{d(F)}$ constituent la réaction en k de la poutre de gauche et la réaction en k de la poutre de droite, respectivement (Figure 9).

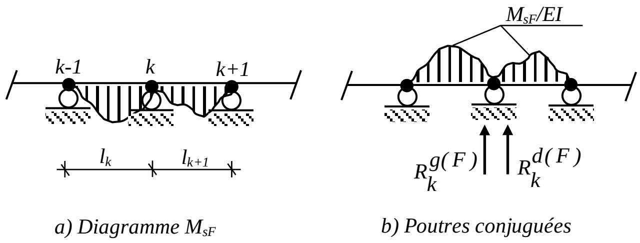


Fig 9

2ème méthode

Sachant que le moment m_{sk} vaut " x/l_k " sur la travée l_k et " $1-x/l_{k+1}$ " sur la travée l_{k+1}, l'équation (6.8) devient :

$$\delta_{kF} = \int_0^{l_k} \frac{M_{sF}\,x}{l_k (EI)_k} dx + \int_0^{l_{k+1}} \frac{M_{sF}}{(EI)_{k+1}} (1 - \frac{x}{l_{k+1}}) dx$$
$$= \frac{1}{l_k} \int_0^{l_k} \frac{xM_{sF}}{(EI)_k} dx + \frac{1}{l_{k+1}} \int_0^{l_{k+1}} \frac{(l_{k+1} - x) M_{sF}}{(EI)_{k+1}} dx$$

La première intégrale représente le moment statique du diagramme " $M_{sF}/(EI)_k$ " sur la travée l_k par rapport à l'appui " k-1 " alors que la deuxième donne le moment statique du diagramme " $M_{sF}/(EI)_{k+1}$ " sur la travée l_{k+1} par rapport à l'appui k+1. L'équation précédente peut s'écrire :

$$\delta_{kF} = \frac{S_k}{l_k} + \frac{\overline{S}_{k+1}}{l_{k+1}} \tag{10}$$

où S_k et $\overline{S}_{k+1}$ sont les moments statiques définis plus haut.

Dans le cas où la rigidité flexionnelle est constante sur chaque travée, l'expression précédente prend la forme :

$$\delta_{kF} = \frac{1}{l_k(EI)_k}\Omega_k z_k + \frac{1}{l_{k+1}(EI)_{k+1}}\Omega_{k+1}\bar{z}_{k+1} \tag{11}$$

- Ω_k est l’aire du diagramme M_{sF} sur la travée l_k.
- Ω_{k+1} est l’aire du diagramme M_{sF} sur la travée l_{k+1}.
- z_k distance de l’appui “ k-1 ” au centre de gravité de Ω_k.

- $\bar{z}_{k+1}$ distance de l’appui “ k+1 ” au centre de gravité de Ω_{k+1}.

• Calcul de c_k

Le manque de concordance d’un appui est représenté par le déplacement linéaire ou angulaire qu’il subit depuis sa position concordante jusqu’à sa position réelle. Dans le cas présent, les manques de concordance à introduire sont des déplacements angulaires et la position concordante correspond à la position horizontale.

Les manques de concordance proviennent des dénivellations Δ que peuvent subir les appuis (Figure 8). Comme nous travaillons dans le cadre des petits déplacements, les dénivellations sont suffisamment petites et de ce fait les angles de discontinuité (Figure 9) peuvent être confondus avec leurs tangentes.

Le manque de concordance est donné par :

$$\begin{aligned} c_k &= \alpha + \beta = tg\alpha + tg\beta = (\Delta_k - \Delta_{k-1})/l_k + (\Delta_k - \Delta_{k+1})/l_{k+1} \\ &= (\Delta_k - \Delta_{k-1})/l_k - (\Delta_{k+1} - \Delta_k)/l_{k+1} \end{aligned} \tag{12}$$

Les dénivellations sont comptées positivement vers le bas.

En introduisant dans l'équation des trois moments (4) les valeurs trouvées des différents coefficients on obtient :

$$\begin{aligned} &M_{k-1}\int_0^{l_k}\frac{m_{sk}m_{sk-1}}{(EI)_k}dx + M_k\left[\int_0^{l_k}\frac{m_{sk}^2}{(EI)_k}dx + \int_0^{l_{k+1}}\frac{m_{sk}^2}{(EI)_{k+1}}dx\right]+ \\ &\quad + M_{k+1}\int_0^{l_{k+1}}\frac{m_{sk}m_{sk+1}}{(EI)_{k+1}}dx = \\ &\quad = \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{l_k} - \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{l_{k+1}} - \int_0^{l_k}\frac{m_{sk}M_{sF}}{(EI)_k}dx - \int_0^{l_{k+1}}\frac{m_{sk}M_{sF}}{(EI)_{k+1}}dx \end{aligned} \tag{13}$$

ou encore :

$$\frac{M_{k-1}}{l_k^2}\int_0^{l_k}\frac{x(l_k-x)}{(EI)_k}dx+M_k\left[\frac{1}{l_k^2}\int_0^{l_k}\frac{x^2}{(EI)_k}dx+\frac{1}{l_{k+1}^2}\int_0^{l_{k+1}}\frac{(l_{k+1}-x)^2}{(EI)_{k+1}}dx\right]+$$
$$+\frac{M_{k+1}}{l_{k+1}^2}\int_0^{l_{k+1}}\frac{x(l_{k+1}-x)}{(EI)_{k+1}}dx=\frac{\Delta_k-\Delta_{k-1}}{l_k}-\frac{\Delta_{k+1}-\Delta_k}{l_{k+1}} \qquad (13)'$$
$$-\frac{1}{l_k}\int_0^{l_k}\frac{xM_{sF}}{(EI)_k}dx-\frac{1}{l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}\frac{(l_{k+1}-x)M_{sF}}{(EI)_{k+1}}dx$$

Ces expressions sont valables dans le cas général.

Cas particuliers

1) Chaque travée a sa rigidité flexionnelle constante.

$$M_{k-1}\frac{l_k}{(EI)_k}+2M_k\left[\frac{l_k}{(EI)_k}+\frac{l_{k+1}}{(EI)_{k+1}}\right]+M_{k+1}\frac{l_{k+1}}{(EI)_{k+1}}=$$
$$=6\left[\frac{\Delta_k-\Delta_{k-1}}{l_k}-\frac{\Delta_{k+1}-\Delta_k}{l_{k+1}}\right]-\frac{6}{l_k(EI)_k}\int_0^{l_k}M_{sF}\,xdx \qquad (14)$$
$$-\frac{6}{l_{k+1}(EI)_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}M_{sF}(l_{k+1}-x)dx$$

2) Rigidité flexionnelle constante sur toute la poutre.

$$M_{k-1}l_k+2M_k(l_k+l_{k+1})+M_{k+1}l_{k+1}=$$
$$=6EI\left[\frac{\Delta_k-\Delta_{k-1}}{l_k}-\frac{\Delta_{k+1}-\Delta_k}{l_{k+1}}\right]-\frac{6}{l_k}\int_0^{l_k}M_{sF}\,xdx \qquad (15)$$
$$-\frac{6}{l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}M_{sF}(l_{k+1}-x)dx$$

3) Le système est concordant et EI est constante sur toute la poutre.

$$M_{k-1}l_k+2M_k(l_k+l_{k+1})+M_{k+1}l_{k+1}=$$
$$=-\frac{6}{l_k}\int_0^{l_k}M_{sF}\,xdx-\frac{6}{l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}M_{sF}(l_{k+1}-x)dx \qquad (16)$$

On peut remplacer le second membre par la réaction fictive agissant en k : $R_k^F=R_k^{g(F)}+R_k^{d(F)}$.

Cette réaction est positive si elle est dirigée de bas en haut.

Références

- RESISTANCE DES MATERIAUX DE BASE ***Professeur Nouredine BOURAHLA*** *Université Sâad Dahleb de Blida.*
- *Cours ENTP.*
- RESISTANCE DES MATERIAUX II ***Docteur M. HADJ MILOUD*** *Université HASSIBA BENBOUALI CHLEF.*