Construction d'une topologie à partir des axiomes des voisinages. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On note $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x . Les familles

[†]On revient sur ces deux exemples au chapitre 2.

1.1. Espaces topologiques

5

$\mathcal{V}(x)$ de parties de X , $x \in X$, vérifient les propriétés suivantes, appelées **axiomes des voisinages**.

- (V1) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$.
- (V2) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.
- (V3) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est élément de $\mathcal{V}(x)$.
- (V4) Pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, on ait $V \in \mathcal{V}(y)$.

Réciproquement, soit X un ensemble quelconque et supposons donnée pour tout $x \in X$, une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de X vérifiant les propriétés (V1), (V2), (V3) et (V4), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ soit la famille des voisinages de x . En effet, il suffit de prendre :

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X ; U \in \mathcal{V}(x) \text{ pour tout } x \in U\}.$$

Définition 1.1.5. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle **système fondamental de voisinages de x** ou **base de voisinages de x** , toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x , il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.

Notez que si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x , alors on a :

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X ; \text{il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des parties de X contenant un élément de $\mathcal{B}(x)$. Ainsi, on obtient $\mathcal{V}(x)$ à partir de $\mathcal{B}(x)$.

Comme pour les bases d'ouverts de X , le rôle des systèmes fondamentaux de voisinages est de simplifier les démonstrations.

- Exemple 1.1.5.** 1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Alors $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x . L'ensemble des ouverts de X contenant x est une base de voisinages de x . Autrement dit, tout point d'un espace topologique admet une base de voisinages formée d'ensembles ouverts. Notons aussi que si $\mathcal{B}(x)$ et $\mathcal{B}'(x)$ sont des parties de $\mathcal{V}(x)$ telles que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}'(x)$ et si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x , alors $\mathcal{B}'(x)$ est également une base de voisinages de x .
2. Dans un espace discret, l'ensemble $\{x\}$ constitue à lui seul un système fondamental de voisinages de x .
3. Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles de la forme $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base de voisinages du point x formée d'ensembles ouverts. également, l'ensemble des intervalles de la forme $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base de voisinages du point x formée d'ensembles fermés.
4. Si $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle, l'ensemble des demi-droites de la forme $[-\infty, -n[$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une base de voisinages du point $-\infty$ formée d'ensembles ouverts. De même, l'ensemble des demi-droites de la forme $]n, +\infty]$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une base de voisinages du point $+\infty$ formée d'ensembles ouverts.

Proposition 1.1.3. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X .

(ii) Pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in \mathcal{B} ; x \in U\}$ est une base de voisinages de x .

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii). Soient $x \in X$ et V un voisinage de x dans X , alors il existe un ouvert W de X tel que $x \in W \subset V$. Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X , alors il existe une famille $(U_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $W = \bigcup_{j \in J} U_j$.

Par conséquent, il existe $U_j \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U_j \subset V$, donc la famille $\{U \in \mathcal{B} ; x \in U\}$ est une base de voisinages de x .

Preuve de (ii) $\implies$ (i). Soit U un ouvert non vide de X . Puisque U est voisinage de chacun de ses points, alors pour tout $x \in U$, il existe $U_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U_x \subset U$. Par conséquent, on a $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X . ■

Construction d'une topologie à partir des systèmes fondamentaux de voisinages ouverts. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et pour tout $x \in X$, soit $\mathcal{B}(x)$ une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts. Les familles $\mathcal{B}(x)$ de parties de X , $x \in X$, vérifient les propriétés suivantes, appelées **axiomes de Hausdorff**.

(H1) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$, on a $x \in U$.

(H2) Pour tout $x \in X$ et pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$, il existe $U_3 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(H3) Pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$ et pour tout $y \in U$, il existe $W \in \mathcal{B}(y)$ tel que $W \subset U$.

Réciproquement, soit X un ensemble quelconque et supposons donnée pour tout $x \in X$, une famille $\mathcal{B}(x)$ de parties de X vérifiant les propriétés **(H1)**, **(H2)** et **(H3)**, alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ soit une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts. En effet, soit $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$, alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés **(B1)** et **(B2)**. Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. En appliquant la proposition précédente et l'axiome **(H3)**, on en déduit que pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts.

1.2 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

Définition 1.2.1. Soient X un espace topologique, $x \in X$ et $A \subset X$.

1. On dit que x est intérieur à A lorsque A est un voisinage de x . L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$.
2. On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A . L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$.

1.2. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

7

3. On dit que x est un point frontière de A , s'il est à la fois adhérent à A et à $X \setminus A$. L'ensemble des points frontières de A s'appelle la frontière de A et se note $\text{Fr}(A)$. Autrement dit, on a $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

4. On dit que x est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage de x dans X contient un point de A distinct de x lui-même (x n'est pas forcément dans A). L'ensemble des points d'accumulation de A s'appelle **ensemble dérivée** de A et se note A' .
5. On dit qu'un point $a \in A$ est un **point isolé** dans A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $V \cap A = \{a\}$.

Remarque 1.2.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$ et $A \subset X$. Alors on a :

1. $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $A \subset \overline{A}$.
2. $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$.
3. $x \in \overline{A} \iff$ pour tout voisinage V de x dans X , on a $V \cap A \neq \emptyset$.
4. $x \in \text{Fr}(A) \iff$ pour tout voisinage V de x dans X , on a $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
5. $x \in A' \iff$ pour tout voisinage V de x dans X , on a $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Donc on a $\overline{A} \setminus A \subset A' \subset \overline{A}$ et $\overline{A} = A \cup A'$. Notons aussi que comme on a $V \cap (A \setminus \{x\}) = (V \setminus \{x\}) \cap A$, alors $x \in A' \iff x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
6. Un point x de X est un point isolé dans X si et seulement si le singleton $\{x\}$ est un ouvert de X .
7. Si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors $A' = \emptyset$. Donc en général $A \not\subset A'$.

Remarque 1.2.2. Soient X un espace topologique, $A \subset X$, $x \in X$ et $\mathcal{B}_x$ une base de voisinages de x . Alors on a :

1. $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{B}_x$ tel que $V \subset A$.
2. $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{B}_x$, on a $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 1.2.1. Soient A et B des sous-ensembles d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

1. Si $A \subset B$, alors on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et si U est un ouvert de X tel que $U \subset A$, alors on a $U \subset \overset{\circ}{A}$.
Donc, l'intérieur de A est le plus grand ouvert de X contenu dans A . Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est la réunion des ouverts de X contenus dans A .
3. $\overline{A}$ est un fermé de X et si F est un fermé de X tel que $A \subset F$, alors on a $\overline{A} \subset F$.
Donc, l'adhérence de A est le plus petit fermé de X contenant A . Autrement dit, $\overline{A}$ est l'intersection des fermés de X contenant A .
4. A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

5. A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$, d'où on a $x \in U \subset B$, et par conséquent $x \in \overset{\circ}{B}$, donc on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Soit $x \in \overline{A}$, alors pour tout voisinage V de x dans X , on a $V \cap A \neq \emptyset$. Or on a $V \cap A \subset V \cap B$, donc $V \cap B \neq \emptyset$, et par conséquent $x \in \overline{B}$, d'où $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Pour montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X , il suffit de montrer que $\overset{\circ}{A}$ est réunion d'une famille d'ouverts de X . Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert U_x de X tel que $x \in U_x \subset A$. Pour tout $y \in U_x$, U_x est un voisinage de y dans X et on a $y \in U_x \subset A$, donc $y \in \overset{\circ}{A}$, et par conséquent $U_x \subset \overset{\circ}{A}$. Ainsi, $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de chacun de ses points. On déduit de la proposition 1.1.2 que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X . Soit U un ouvert de X tel que $U \subset A$. Soit $x \in U$, alors on a $x \in U \subset A$ et U est un ouvert de X , donc $x \in \overset{\circ}{A}$ et par conséquent $U \subset \overset{\circ}{A}$.

3. Pour montrer que $\overline{A}$ est un fermé de X , on montre que $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X . Soit $x \in X \setminus \overline{A}$, alors il existe un ouvert V_x de X tel que $x \in V_x$ et $V_x \cap A = \emptyset$. Pour tout $y \in V_x$, V_x est un voisinage de y dans X et on a $V_x \cap A = \emptyset$, d'où $y \notin \overline{A}$. Donc on a $V_x \cap \overline{A} = \emptyset$ et par conséquent $V_x \subset X \setminus \overline{A}$. Ainsi, $X \setminus \overline{A}$ est voisinage de chacun de ses points, donc $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X . Par conséquent $\overline{A}$ est un fermé de X . Soit F un fermé de X tel que $A \subset F$. Pour montrer que $\overline{A} \subset F$, il suffit de montrer que l'on a $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$. Soit $x \in X \setminus F$. Puisque $X \setminus F$ est un ouvert de X , alors $X \setminus F$ est un voisinage de x dans X . Or on a $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$, d'où $x \notin \overline{A}$. Donc on a $x \in X \setminus \overline{A}$. Par conséquent, on a $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$.

4. Si $A = \overset{\circ}{A}$, alors d'après 2, A est un ouvert de X . Réciproquement, on suppose que A est un ouvert de X . Alors il résulte du 2 que l'on a $A \subset \overset{\circ}{A}$. Or on a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc on a $A = \overset{\circ}{A}$.

5. Si $A = \overline{A}$, alors d'après 3, A est un fermé de X . Réciproquement, on suppose que A est un fermé de X , alors d'après 3, on a $\overline{A} \subset A$. Or on a toujours $A \subset \overline{A}$, donc on a $A = \overline{A}$. ■

Proposition 1.2.2. *Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Alors on a :*

$$\overbrace{X \setminus A}^{\circ} = X \setminus \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Démonstration. On a $A \subset \overline{A}$, d'où $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$. Comme $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X ,

d'après la proposition précédente, on a $X \setminus \overline{A} \subset \overbrace{X \setminus A}^{\circ}$. Réciproquement, soit $x \in \overbrace{X \setminus A}^{\circ}$, alors il existe un ouvert V de X tel que $x \in V$ et $V \subset X \setminus A$, d'où $V \cap A = \emptyset$. Donc

$x \notin \overline{A}$. Autrement dit, on a $x \in X \setminus \overline{A}$. Donc on a $\overbrace{X \setminus A}^{\circ} \subset X \setminus \overline{A}$. Par conséquent,

on a $X \setminus \overline{A} = \overbrace{X \setminus A}^{\circ}$. D'après ce qui précède, on a $X \setminus \overline{X \setminus A} = \overbrace{X \setminus (X \setminus A)}^{\circ} = \overset{\circ}{A}$, d'où $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$. ■

Définition 1.2.2. Soit X un espace topologique. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X

1.2. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

9

est dite **localement finie** si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans X tel que $A_i \cap V = \emptyset$ pour tout $i \in I$, sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i \in I$.

Proposition 1.2.3. Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de parties de X .

1. La famille $(\overline{A_i})_{i \in I}$ est aussi localement finie.
2. On a $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. Par conséquent, la réunion d'une famille localement finie de parties fermées de X est fermée dans X .

Démonstration. 1. Soit $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x dans X et un sous-ensemble fini J de I tel que $V \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i \in I \setminus J$. Comme V est un ouvert, on en déduit que pour tout $i \in I \setminus J$, on a $V \cap \overline{A_i} = \emptyset$. Donc la famille $(\overline{A_i})_{i \in I}$ est localement finie.

2. Pour tout $j \in I$, on a $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$, d'où $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Inversement, soit $x \in X$ tel que $x \notin \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. Soient V un voisinage de x dans X et J un sous-ensemble fini de I tel que $V \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i \in I \setminus J$. Pour tout $j \in J$, il existe un voisinage V_j de x dans X tel que $V_j \cap A_j = \emptyset$. Soit $W = \bigcap_{j \in J} V \cap V_j$, alors W est un voisinage de x dans X et on a $W \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$, donc $x \notin \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Par conséquent, on a $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$, d'où $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. ■

Définition 1.2.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.

1. On dit que A est **dense** dans X ou **partout dense** si $\overline{A} = X$.
2. On dit que X est **séparable** s'il existe une partie au plus dénombrable A de X dense dans X .

Exemple 1.2.1. L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparable. En effet, les sous-ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, voir Appendice C. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathbb{R}$ est séparable.

Remarque 1.2.3. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On déduit de la proposition 1.2.2 que l'on a :

$$1. A \text{ est dense dans } X \iff \overset{\circ}{X \setminus A} = \emptyset.$$

$$2. \overset{\circ}{A} = \emptyset \iff X \setminus A \text{ est dense dans } X.$$

Proposition 1.2.4. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) A est dense dans X .

(ii) Pour tout ouvert non vide U de X , on a $A \cap U \neq \emptyset$.

(iii) Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii). Supposons A dense dans X , i.e. $\overline{A} = X$. Alors pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X , on a $A \cap V \neq \emptyset$. Soit U un ouvert non vide de X . Comme U est voisinage de chacun de ses points, on en déduit que $A \cap U \neq \emptyset$.

L'implication (ii) $\implies$ (iii) est triviale.

Preuve de (iii) $\implies$ (i). Supposons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$. Si $\overline{A} \neq X$, alors $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert non vide de X et on a $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$. Donc il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, $B \subset X \setminus \overline{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse, donc on a $\overline{A} = X$. ■

Proposition 1.2.5. *Soit X un espace topologique séparable. Alors toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soient $D = \{x_n ; n \geq 0\}$ une partie au plus dénombrable et dense dans X et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X . D'après la proposition précédente, pour tout $i \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U_i$. Soit $n_i = \inf \{n \in \mathbb{N} ; x_n \in U_i\}$, alors $i \mapsto n_i$ est une application injective de I dans $\mathbb{N}$, donc I est au plus dénombrable. ■

1.3 Applications continues

Définition 1.3.1. Soient X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est **continue en x_0** si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- (i) Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y , $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans X .
- (ii) Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que $f(V) \subset W$.

On peut énoncer cette définition sous la forme plus imagée suivante : dire que f est continue en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi voisin qu'on veut de $f(x_0)$ dès que x est assez voisin de x_0 .

Essayons de traduire la définition de la continuité d'une application en un point dans le cas où $X = Y = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est continue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Définition 1.3.2. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **continue** ou **continue sur X** si elle est continue en tout point de X .
2. On dit que f est un **homéomorphisme de X sur Y** si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.
3. On dit que les espaces topologiques X et Y sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de X sur Y .

Les propriétés d'un espace topologique qui se conservent par homéomorphisme sont appelées **propriétés topologiques**.

Exemple 1.3.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, on a :

1. L'application identique suivante est continue.

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_X : & (X, \mathcal{T}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

2. Toute application constante de $(X, \mathcal{T})$ dans $(Y, \mathcal{T}')$ est continue.

Exemple 1.3.2. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . On note par χ_A ou $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice ou fonction caractéristique de A . Autrement dit, $\mathbf{1}_A$ est une fonction de X dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Pour tout sous-ensemble U de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{1}_A^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \{0, 1\} \cap U = \emptyset, \\ A & \text{si } 1 \in U \text{ et } 0 \notin U, \\ X \setminus A & \text{si } 0 \in U \text{ et } 1 \notin U, \\ X & \text{si } \{0, 1\} \subset U. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $\mathbf{1}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé dans X .

Remarque 1.3.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, on a :

1. Si Y est muni de la topologie grossière, alors toute application de X dans Y est continue.
2. Si X est muni de la topologie discrète, alors toute application de X dans Y est continue.
3. Si X est muni de la topologie grossière, alors pour qu'une application f de X dans Y soit continue il faut et il suffit que f soit constante.

Remarque 1.3.2. Une application continue bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme.

Premier exemple. Si $X = Y = \mathbb{R}$ et si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la topologie discrète de $\mathbb{R}$ et si $\mathcal{T}_2$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, alors l'application identique $\text{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ est continue bijective, mais n'est pas un homéomorphisme.

Deuxième exemple. Si X est un ensemble contenant au moins deux points, $\mathcal{T}_d$ la topologie discrète sur X et $\mathcal{T}_g$ la topologie grossière sur X . Alors l'application identique $\text{id} : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_g)$ est bijective continue, mais elle n'est pas un homéomorphisme.

Proposition 1.3.1. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications.*

- 1. Si f est continue en un point $x \in X$ et si g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x .*
- 2. Si f et g sont continues, leur composée $g \circ f$ est continue.*

Démonstration. 1. Soit W un voisinage de $g \circ f(x) = g(f(x))$ dans Z , on a $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$. Puisque g est continue en $f(x)$, alors $g^{-1}(W)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y et par conséquent $f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de x dans X car f est continue en x . Donc $(g \circ f)^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans X , d'où la continuité de $g \circ f$ en x .

2. Ceci résulte de 1. ■

Proposition 1.3.2. *Soient f et g deux applications continues d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$, alors on a :*

1. *L'application $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*
2. *L'application $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*
3. *Si g ne s'annule pas, l'application $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 1 du supplément.

Théorème 1.3.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) *f est continue.*
- (ii) *Pour tout ouvert U de Y , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .*
- (iii) *Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de Y , alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .*

Théorème 1.3.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) *f est continue.*
- (ii) *Pour tout ouvert U de Y , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .*
- (iii) *Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de Y , alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .*
- (iv) *Pour toute partie B de Y , on a $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$.*
- (v) *Pour tout fermé F de Y , $f^{-1}(F)$ est un fermé de X .*
- (vi) *Pour toute partie A de X , on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
- (vii) *Pour toute partie B de Y , on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii). Soit U un ouvert de Y . Pour tout $x \in f^{-1}(U)$, U est un voisinage de $f(x)$ dans Y , donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x dans X car f est continue en x . Par conséquent, $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points. Il résulte de la proposition 1.1.2 que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

Preuve de (ii) $\implies$ (i). Soient $x \in X$ et W un voisinage de $f(x)$ dans Y . Alors il existe un ouvert U de Y tel que $f(x) \in U \subset W$, d'où on a $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$ et $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X , donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans X . Donc f est continue en x . Par conséquent, f est continue.

L'équivalence (ii) $\iff$ (iii) résulte du fait que pour toute famille $(U_j)_{j \in J}$ de parties de Y , on a $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$.

Preuve de (ii) $\implies$ (iv). Soit B une partie de Y . Comme $\overset{\circ}{B}$ est un ouvert de Y , alors $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ est un ouvert de X et on a $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)$, d'où $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$, voir proposition 1.2.1.

Preuve de (iv) $\implies$ (ii). Soit U un ouvert de Y . Alors on a $U = \overset{\circ}{U}$, d'où

$f^{-1}(U) = f^{-1}(\overset{\circ}{U}) \subset \overbrace{f^{-1}(U)}^{\circ}$. Donc on a $f^{-1}(U) = \overbrace{f^{-1}(U)}^{\circ}$. Il résulte de la proposition 1.2.1 que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

L'équivalence (ii) $\iff$ (v) résulte du fait que pour toute partie U de Y , on a $f^{-1}(X \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$.

Preuve de (v) $\implies$ (vi). Soit A une partie de X , alors $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est un fermé de X contenant A , d'où on a $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Par conséquent, on a $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}$.

Preuve de (vi) $\implies$ (vii). Soit B une partie de Y . On pose $A = f^{-1}(B)$, alors on a $f(\overline{f^{-1}(B)}) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$, d'où $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Preuve de (vii) $\implies$ (v). Soit F un fermé de Y , alors on a $F = \overline{F}$, d'où $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$. Par conséquent, on a $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(F)$ est un fermé de X . ■

Remarque 1.3.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. L'image $f(V)$ d'un ouvert (*resp.* d'un fermé) de X n'est pas nécessairement ouverte (*resp.* fermée) dans Y , même lorsque f est continue. En effet, si $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et si $f(x) = x^2$, alors f est continue et $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **ouverte** si l'image par f de tout ouvert de X est ouverte dans Y .
2. On dit que f est **fermée** si l'image par f de tout fermé de X est fermée dans Y .

Proposition 1.3.3. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est une application ouverte.*

(ii) *Pour toute partie A de X , on a $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$.*

(iii) *Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X , alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f(U)$ est un ouvert de Y .*

(iv) *Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X , $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y .*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii). Soit A une partie de X , alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et donc $f(\overset{\circ}{A})$ est un ouvert de Y contenu dans $f(A)$, d'où $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$, voir proposition 1.2.1.

Preuve de (ii) $\implies$ (i). Soit U un ouvert de X , on a $U = \overset{\circ}{U}$, d'où $f(U) = f(\overset{\circ}{U}) \subset \overset{\circ}{f(U)}$.

Donc on a $f(U) = \overset{\circ}{f(U)}$. Par conséquent, $f(U)$ est un ouvert de Y .

Donc on a $f(U) = \overset{\circ}{f(U)}$. Par conséquent, $f(U)$ est un ouvert de Y .

L'équivalence (i) $\iff$ (iii) résulte du fait que pour toute famille $(U_j)_{j \in J}$ de parties de X , on a $f\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} f(U_j)$.

Preuve de (i) $\implies$ (iv). Soient $x \in X$ et V un voisinage de x dans X , alors il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$, d'où $f(U)$ est un ouvert de Y et on a $f(x) \in f(U) \subset f(V)$. Donc $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y .

Preuve de (iv) $\implies$ (i). Soit U un ouvert de X . Alors pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x dans X , donc $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y . Par conséquent, $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points. Il résulte de la proposition 1.1.2 que $f(U)$ est un ouvert de Y . ■

Proposition 1.3.4. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est une application ouverte.*

(ii) *Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout fermé F dans X tel que $f^{-1}(B) \subset F$, il existe un fermé D dans Y tel que $B \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset F$.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii). Soient B un sous-ensemble de Y et F un fermé de X tel que $f^{-1}(B) \subset F$. Comme f est une application ouverte, alors $f(X \setminus F)$ est un ouvert de Y et on a $B \cap f(X \setminus F) = \emptyset$. Soit $D = Y \setminus f(X \setminus F)$, alors D est un fermé de Y tel que $B \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset F$.

Preuve de (ii) $\implies$ (i). Soient U un ouvert de X et $A = f(U)$. Alors $X \setminus U$ est un fermé de X et on a $f^{-1}(Y \setminus A) \subset X \setminus U$. Donc il existe un fermé D de Y tel que $Y \setminus A \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset X \setminus U$. On en déduit que l'on a $D = Y \setminus A$, donc A est un ouvert de Y . Par conséquent, f est une application ouverte. ■

Proposition 1.3.5. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est fermée.*

(ii) *Pour toute partie A de X , on a $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii). Soit A une partie de X , alors $f(\overline{A})$ est un fermé de Y et on a $f(A) \subset f(\overline{A})$, d'où $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Preuve de (ii) $\implies$ (i). Soit F un fermé de X , alors on a $\overline{F} = F$, d'où $\overline{f(F)} \subset f(\overline{F}) = f(F)$. Donc on a $f(F) = \overline{f(F)}$. Par conséquent, $f(F)$ est un fermé de Y , voir proposition 1.2.1. ■

Corollaire 1.3.1. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et fermée. Alors pour toute partie A de X , on a $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.*

Démonstration. Ceci résulte de la proposition précédente et du théorème 1.3.1. ■

Proposition 1.3.6. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) f est une application fermée.*
- (ii) Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}(B) \subset U$, il existe un ouvert V dans Y tel que $B \subset V$ et $f^{-1}(V) \subset U$.*
- (iii) Pour tout point $y \in Y$ et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 1 du supplément.

Remarque 1.3.4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. Alors on a :

1. f est ouverte si et seulement si f est fermée.

2. f est continue si et seulement si f^{-1} est ouverte si et seulement si f^{-1} est fermée.

On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) f est un homéomorphisme.
- (ii) f est continue et ouverte.
- (iii) f est continue et fermée.
- (iv) f et f^{-1} sont ouvertes.
- (v) f et f^{-1} sont fermées.
- (vi) Pour toute partie A de X , on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.