

## 1. Définitions

Soit  $F$  une fonction complexe définie dans un ouvert  $\Omega$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ . Etant donné un point  $a \in \Omega$ , pour tout  $z$  assez voisin de  $a$  on peut considérer l'expression :

$$\frac{F(z) - F(a)}{z - a} \tag{1}$$

**Définition 1.1.** — On dit que  $F$  est *dérivable* au point  $a$  si l'expression (1) a une limite finie quand  $z$  tend vers  $a$ . Cette limite s'appelle le *nombre dérivé* de  $F$  en  $a$ .

**Définition 1.2.** — On dit que  $F$  est *holomorphe* dans  $\Omega$  si elle est dérivable en tout point de  $\Omega$ . On peut alors définir sur  $\Omega$  une nouvelle fonction, appelée *dérivée* de  $F$ , et notée  $F'$  ou  $\frac{dF}{dz}$ .  $F'$  est la fonction qui à tout point  $z \in \Omega$  associe le nombre dérivé de  $F$  en ce point.

**Définition 1.3.** — On dit que  $F$  est *holomorphe en*  $a$  si elle est holomorphe dans un voisinage ouvert de  $a$ .

## 2. Premiers exemples

**Exemple 2.1.** — La fonction  $z \rightarrow z^2$  est définie partout. Etant donné un point  $a$ , on a pour tout nombre complexe non nul  $u$  :

$$\frac{(a + u)^2 - a^2}{u} = 2a + u$$

donc  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(a+u)^2 - a^2}{u} = 2a$ . La fonction donnée est donc holomorphe dans  $\mathbb{C}$  et a pour dérivée la fonction  $z \rightarrow 2z$  (ce qui est plutôt rassurant).

N.B. — Une fonction holomorphe dans  $\mathbb{C}$  est dite *entière*.

**Exemple 2.2.** — La fonction  $z \rightarrow \bar{z}$  est définie partout. On a pour  $u \neq 0$  :

$$\frac{\overline{a+u} - \bar{a}}{u} = \frac{\bar{u}}{u}$$

Posant  $u = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  il vient :

$$\frac{\bar{u}}{u} = \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha$$

Si on fait tendre  $r$  vers zéro à  $\alpha$  constant, on obtient pour limite  $\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha$ . Cette valeur dépend de  $\alpha$ . Par exemple, elle vaut 1 pour  $\alpha = 0$  et  $-1$  pour  $\alpha = \pi/2$ . Il n'existe donc pas de limite de  $\bar{u}/u$  quand  $u$  tend vers zéro. La fonction  $z \rightarrow \bar{z}$  n'est dérivable en aucun point.

**Exemple 2.3.** — Soit la fonction  $z \rightarrow |z|^2$ . Etant donné  $a$ , on a pour tout  $u$

$$|a + u|^2 - |a|^2 = (a + u)(\bar{a} + \bar{u}) - a\bar{a} = a\bar{u} + \bar{a}u + u\bar{u}$$

D'où, pour  $u \neq 0$  :

$$\frac{|a + u|^2 - |a|^2}{u} = a\frac{\bar{u}}{u} + (\bar{a} + \bar{u})$$

Si  $a = 0$ , ceci se réduit à  $\bar{u}$ , qui tend vers zéro avec  $u$ . Mais si  $a \neq 0$ , on voit comme dans l'exemple 2 que la limite n'existe pas. Ainsi la fonction est dérivable en un seul point ( $z = 0$ ). Notons qu'elle n'est pas holomorphe en 0, bien que dérivable.

### 3.1. Dérivabilité et continuité.

**Fait 1.** — Toute fonction complexe d'une variable complexe qui est dérivable en un point  $a$  est continue en  $a$ .

En particulier, toute fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega$  est continue dans  $\Omega$ . Les exemples 2 et 3 montrent que l'inverse n'est pas vrai. Mais personne ne se serait attendu à ce qu'il le soit !

### 3.2. Dérivabilité et opérations.

**Fait 2.** — Les formules familières qui relient la dérivation aux opérations algébriques restent valables. Les formules ci-dessous peuvent être regardées comme ponctuelles ou globales, et doivent se comprendre ainsi : si le membre de droite existe, alors le membre de gauche existe et a la valeur indiquée par la formule.

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

$\lambda$  : constante complexe

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u/v)' = (vu' - uv')/v^2$$

---

### 3.3. Exemples de fonctions holomorphes.

Notons déjà que :

- Toute fonction *constante* est holomorphe (dérivée : 0).
- La fonction *identique*  $z \rightarrow z$  est holomorphe (dérivée : 1).

A partir de ces fonctions initiales, on obtient par additions et multiplications toutes les fonctions  $F$  qui se mettent sous la forme suivante :

$$F(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \quad (1)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des nombres complexes. Ce sont les *fonctions polynômes*. Ainsi toute fonction polynôme est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  (c'est-à-dire entière). De plus, les formules de dérivation appliquées à l'expression (1) donnent :

$$F'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1} \quad (2)$$

Ainsi la dérivée d'une fonction polynôme est encore une fonction polynôme.

Si, dans l'expression (1) les coefficients  $a_i$  sont tous nuls,  $F$  est la fonction nulle. Sinon, quitte à négliger des termes nuls,  $F$  se met sous la forme :

$$F(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_pz^p \quad \text{avec } a_p \neq 0 \quad (3)$$

Soit  $k$  un entier relatif. Un calcul simple montre que :

$$\text{si } k < p \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|F(z)|}{|z|^k} = +\infty$$

$$\text{si } k > p \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|F(z)|}{|z|^k} = 0$$

On en tire deux choses :

- D'une part que le naturel  $p$  qui intervient dans l'expression (3) ne dépend que de  $F$ . On l'appelle le *degré* de  $F$ .
- D'autre part que toute représentation de la fonction nulle sous la forme (1) a tous ses coefficients nuls. Il en résulte que deux écritures sous la forme (3) d'une même fonction polynôme non nulle sont identiques.

Ainsi, on peut identifier les fonctions polynômes avec les polynômes formels qui les représentent. L'identification porte sur toutes les notions pertinentes : degré, coefficients, addition, multiplication, valeurs, zéros ... Elle joue dans deux sens :



Désormais nous dirons souvent “polynôme” sans autre précision. Rappelons qu’on appelle *zéro* d’une fonction  $F$  tout nombre  $a$  tel que  $F(a) = 0$ . Supposons en particulier que  $F$  soit un polynôme non nul. Alors l’ensemble des zéros de  $F$  est fini, de cardinal inférieur ou égal au degré. Si  $a$  est un zéro de  $F$ ,  $z - a$  est un facteur de  $F$ . Le plus grand entier  $k$  tel que  $(z - a)^k$  divise  $F$  s’appelle *l’ordre* du zéro  $a$ .

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction  $F$  de la forme  $A/B$ , où  $A$  est un polynôme et  $B$  un polynôme non nul.  $F$  est alors définie et holomorphe dans le complémentaire de l’ensemble des zéros de  $B$ . La dérivée est donnée par la formule :

$$F' = \frac{BA' - AB'}{B^2}$$

Ainsi la dérivée d’une fonction rationnelle est rationnelle.

Si  $a$  est un zéro d’ordre  $k$  de  $B$ , deux choses peuvent arriver :

- ou bien  $(z - a)^k$  divise  $A$ , et  $F$  se prolonge par continuité en  $a$
- ou bien  $a$  n’est pas un zéro de  $A$ , ou est un zéro d’ordre inférieur à  $k$ . Alors  $\lim_{z \rightarrow a} |F(z)| = +\infty$ , et on dit que  $a$  est un *pôle* de  $F$ .



Nous avons rappelé ces propriétés élémentaires des zéros et des pôles parce que nous les retrouverons dans le cadre général des fonctions holomorphes. On ne peut pas s'évader du monde des fonctions rationnelles par des combinaisons algébriques. Au chapitre suivant, nous verrons comment l'analyse permet d'inventer des fonctions nouvelles.

## 4. Dérivée et différentielle

### 4.1. Sur une ambiguïté.

Il existe sur  $\mathbb{C}$  deux structures naturelles d'espace vectoriel : d'une part, en tant que corps,  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même. D'autre part, en tant qu'extension de  $\mathbb{R}$ , c'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , avec une base canonique formée des nombres 1 et  $i$ , donc de dimension 2.

Soit  $\varphi$  une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . Dire que  $\varphi$  est linéaire n'a pas de sens précis si on ne dit pas à quelle structure vectorielle on rapporte cette propriété. On dira donc que  $\varphi$  est  *$\mathbb{R}$ -linéaire* (resp.  *$\mathbb{C}$ -linéaire*) si elle est linéaire au sens de la structure vectorielle réelle (resp. complexe).

Posons  $\varphi(1) = a$  et  $\varphi(i) = b$ . Si  $\varphi$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire, on a pour tout  $z = x + iy$  :

$$\varphi(z) = ax + by$$

C'est la forme générale des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Si  $\varphi$  est de plus  $\mathbb{C}$ -linéaire on a en particulier :

$$\varphi(i) = \varphi(i.1) = i\varphi(1) = ia$$

Donc :

$$b = ai$$

Inversement, sous la condition précédente, on a pour  $z = x + iy$  :

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= ax + by \\ &= ax + iay \\ &= a(x + iy)\end{aligned}$$

Autrement dit  $\varphi(z) = az$ , et  $\varphi$  est  $\mathbf{C}$ -linéaire.

**Exemple 4.1.** — Les projections canoniques sont des applications  $\mathbf{R}$ -linéaires. Selon l'usage du calcul différentiel, on les note  $dx$  et  $dy$ . Ainsi, pour un nombre complexe  $w = u + iv$  on a :

$$\begin{aligned}dx(w) &= u = \operatorname{Re}(w) \\ dy(w) &= v = \operatorname{Im}(w)\end{aligned}$$

$dx$  et  $dy$  ne sont autres que des notations alternatives pour  $\operatorname{Re}$  et  $\operatorname{Im}$ . Avec ces notations, la forme générale des applications  $\mathbf{R}$ -linéaires est donc :

$$adx + bdy \quad (\text{avec } a, b \in \mathbf{C})$$

**Exemple 4.2.** — Dans la foulée, notons  $dz$  l'application identique de  $\mathbb{C}$ , qui est aussi l'unique projection dans sa base canonique  $\{1\}$  pour la structure vectorielle complexe. On a avec les notations précédentes :

$$dz = dx + i dy$$

$a = 1$  et  $b = i$ , ce qui est normal puisque l'application est  $\mathbb{C}$ -linéaire.

**Exemple 4.3.** — La conjugaison :

$$z \rightarrow \bar{z}$$

est  $\mathbf{R}$ -linéaire. Elle s'écrit dans les notations précédentes :

$$dx - i dy$$

Il est donc naturel de la noter  $\overline{dz}$ . Ici  $a = 1$  et  $b = -i$  : elle n'est donc pas  $\mathbf{C}$ -linéaire.

**Exemple 4.4.** — Soit  $F$  une fonction complexe définie au voisinage d'un point  $a$ . On peut la regarder comme une application d'une partie de  $\mathbf{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ . Ainsi, cela a un sens de dire que  $F$  est *différentiable* en  $a$ . S'il en est ainsi, sa différentielle en  $a$  est une application  $\mathbf{R}$ -linéaire qui s'exprime par la formule usuelle :

$$dF(a) = \frac{\partial F}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(a)dy$$

## 4.2. Conditions nécessaires de dérivabilité.

Soit  $F$  une fonction complexe définie dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Le résultat suivant renforce considérablement le fait 1 (§ 3.1).

**Proposition 1.** — *Si  $F$  est dérivable en un point  $a \in \Omega$ , alors  $F$  est différentiable en  $a$  et sa différentielle est  $\mathbb{C}$ -linéaire.*

*Preuve.* — Notons  $d$  le nombre dérivé de  $F$  en  $a$ . On a donc :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[ \frac{F(a+u) - F(a)}{u} - d \right] = 0$$

On peut l'écrire :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{|F(a+u) - F(a) - d.u|}{|u|} = 0$$

Ce qui montre que  $F$  est différentiable en  $a$ , et que la différentielle est l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire :

$$z \rightarrow d.z$$

**Remarque.** — De cette démonstration, on tire l'expression suivante de la différentielle pour une fonction dérivable :

$$dF(a) = F'(a)dz$$

Ceci justifie *a posteriori* la notation  $\frac{dF}{dz}$  pour la dérivée.

**Exemple 4.5.** —  $z \rightarrow \bar{z}$  étant  $\mathbf{R}$ -linéaire est identique à sa différentielle en tout point. Celle-ci n'est pas  $\mathbf{C}$ -linéaire (exemple 4.3). On retrouve donc le fait que la conjugaison n'est dérivable en aucun point (exemple 2.2).



### 4.3. Conditions suffisantes.

Les conditions nécessaires mises en évidence au § 4.2 sont aussi suffisantes. De manière précise :

**Proposition 2.** — *Soit  $F$  une fonction complexe définie au voisinage d'un point  $a$ . On suppose  $F$  différentiable en  $a$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $F$  est dérivable en  $a$ ;
- (ii)  $\frac{\partial F}{\partial y}(a) = i \frac{\partial F}{\partial x}(a)$ ;
- (iii)  $dF(a)$  est  $\mathbf{C}$ -linéaire.

**Exemple 4.6.** — Soit  $F$  la fonction définie pour  $z = x + iy$  par :

$$F(z) = x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy + 4$$

On a successivement :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = 2x + 2iy - 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = 2ix - 2y - 3i = i(2x + 2iy - 3)$$

$F$  étant clairement différentiable est holomorphe. Pour  $y = 0$  on a :

$$F(x) = x^2 - 3x + 4$$

Nous verrons plus tard que ceci impose pour tout  $z$  l'égalité :

$$F(z) = z^2 - 3z + 4$$

ce qu'on peut vérifier ici par le calcul.

### 3. Fonctions analytiques

Soit  $F$  une fonction complexe définie dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ .

**Définition 3.1.** — Soit  $a$  un point de  $\Omega$ . On dit que  $F$  est *analytique en  $a$*  s'il existe :

- un nombre  $r > 0$  tel que  $D(a, r[ \subset \Omega$
- une série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R \geq r$

tels qu'on ait pour tout  $z \in D(a, r[ :$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

**Définition 3.2.** — On dit que  $F$  est *analytique* si elle est analytique en tout point de son ouvert de définition.

La proposition 2 a pour conséquence immédiate :

**Proposition 3.** — *Toute fonction analytique en un point  $a$  est holomorphe en  $a$ . En particulier toute fonction analytique est holomorphe.*

**Exemple 3.1.** — Un polynôme  $P(z)$  de degré  $n$  vérifie l'identité de Taylor :

$$P(z) = P(a) + \frac{(z-a)}{1!}P'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!}P^{(n)}(a)$$

Ceci montre que  $P$  est analytique en tout point  $a$ .

Notons qu'une fonction  $F$  analytique en  $a$  vérifie localement une identité qui généralise la précédente. Partant de l'égalité :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

on trouve par dérivations successives :

$$F^{(n)}(a) = n! a_n$$

D'où l'écriture en "série de Taylor" :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

où l'on adopte la convention usuelle  $F^{(0)} = F$ .

## 1. Etude au voisinage d'un zéro

### 1.1. Factorisation.

Soit  $F$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ . On rappelle qu'un zéro de  $F$  est un élément  $z_0$  de  $\Omega$  tel que  $F(z_0) = 0$ .

**Lemme 1.** — *Soit  $z_0$  un zéro d'une fonction holomorphe  $F$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $F(z) = 0$  pour tous les points d'un voisinage de  $z_0$ .
- (ii)  $\forall k \geq 0, F^{(k)}(z) = 0$ .

*Preuve.* — (i)  $\Rightarrow$  (ii) est évident. Supposons (ii). Soit  $r > 0$  tel que  $F$  existe dans le disque ouvert  $D(z_0, r[$ . On a dans ce disque (chapitre 4, proposition 4) :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Donc  $F(z) = 0$  pour tout  $z \in D(z_0, r[$ .



**Définition 1.1.** — On appelle *zéro isolé* d'une fonction holomorphe  $F$  tout zéro  $z_0$  de  $F$  qui ne vérifie pas les conditions équivalentes du lemme 1.

Au voisinage d'un zéro isolé,  $F$  se met sous une forme remarquable :

**Proposition 1.** — Soit  $F$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ . Si  $z_0$  est un zéro isolé de  $F$ , il existe un unique entier positif  $p$  tel que  $F$  se mette sous la forme suivante :

$$F(z) = (z - z_0)^p F_1(z)$$

où  $F_1$  est holomorphe dans  $\Omega$  et vérifie  $F_1(z_0) \neq 0$ .

*Preuve.* — Puisque la condition (ii) du lemme 1 n'est pas remplie, il existe un entier  $k$  tel que  $F^{(k)}(z_0) \neq 0$ . Soit  $p$  le plus petit entier qui ait cette propriété. Puisque  $F(z_0) = 0$ ,  $p > 0$ . Soit  $r$  un réel positif tel que  $D(z_0, r[ \subset \Omega$ . On a pour  $z \in D(z_0, r[$  :

$$F(z) = (z - z_0)^p \sum_{k=p}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-p}$$

Posons pour  $z \in D(z_0, r[$  :

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-p}$$

et pour  $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$  :

$$g(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^p}$$

$f$  et  $g$  sont holomorphes dans leurs ouverts de définition, et sur la partie commune de ceux-ci, définie par :

$$0 < |z - z_0| < r$$

$f$  et  $g$  coïncident. Donc  $f$  et  $g$  définissent par recollement une fonction  $F_1$  holomorphe dans  $\Omega$  et qui vérifie bien :

$$F(z) = (z - z_0)^p F_1(z)$$

De plus,  $F_1(z_0) = \frac{F^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$ .

Enfin, pour toute écriture de  $F$  sous la forme :

$$F(z) = (z - z_0)^m G(z)$$

où  $G$  est holomorphe dans  $\Omega$  et  $G(z_0) \neq 0$ , on a pour tout entier  $k$  :

$$\text{— si } k < m : \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z)}{(z - z_0)^k} = 0$$

$$\text{— si } k > m : \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{F(z)}{(z - z_0)^k} \right| = +\infty$$

Donc il existe au plus un entier qui convient à une telle décomposition. □



## 1.2. Ordre de multiplicité.

L'entier  $p$  introduit dans la proposition 1 est appelé l'*ordre de multiplicité* du zéro  $z_0$ , ou simplement *ordre*.

D'après la preuve précédente, il est caractérisé par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} F^{(k)}(z_0) &= 0 && \text{pour tout } k < p \\ F^{(p)}(z_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Ce sont ces conditions qui servent le plus souvent pour la détermination pratique de  $p$ . Si  $p = 1$ , le zéro est dit *simple*; si  $p = 2$  (resp. 3), il est dit *double* (resp. *triple*).

**Convention.** — Si  $F(z_0) \neq 0$ , on dit quelquefois que  $z_0$  est un “zéro d'ordre 0” de  $F$  (attention : ce n'est pas un zéro !) Ceci permet d'unifier certains énoncés. Par exemple :

**Lemme 2.** — Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes en  $z_0$ . Si  $z_0$  est un zéro d'ordre  $k$  pour  $f$  et un zéro d'ordre  $l$  pour  $g$ , c'est un zéro d'ordre  $k + l$  pour  $fg$ .

Ceci résulte immédiatement de la proposition 1 complétée par la convention précédente.

**Exemple 1.1.** — On a vu que la fonction sinus admet pour zéros les nombres réels de la forme  $k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ). On a :

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

Donc ce sont tous des zéros simples.

**Exemple 1.2.** — Soit  $F$  définie dans  $\mathbf{C}$  par :

$$F(z) = 1 + \cos z$$

Les zéros de  $F$  sont les nombres :

$$\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

On a d'autre part :

$$F'(z) = -\sin z$$

$$F''(z) = -\cos z$$

Donc si  $z$  est un zéro de  $F$ ,  $F'(z) = 0$  et  $F''(z) = 1$ . Ce sont des zéros doubles. On peut aussi le déduire du lemme 2 en remarquant que :

$$1 + \cos z = 2 \cos^2 \frac{z}{2}$$

## 2. Distribution des zéros d'une fonction holomorphe

### 2.1. Principe des zéros isolés.

La proposition 1 a pour corollaire l'énoncé suivant, connu sous le nom de "principe des zéros isolés" :

**Lemme 3.** — *Si  $z_0$  est un zéro isolé d'une fonction holomorphe  $F$ , il existe un voisinage de  $z_0$  dans lequel  $F$  n'a pas d'autre zéro que ce point.*

*Preuve.* — On part de la décomposition de  $F$  donnée par la proposition 1 :

$$F(z) = (z - z_0)^p F_1(z)$$

$F_1$  étant continue et non nulle en  $z_0$ , il existe  $r > 0$  tel que  $|z - z_0| < r$  implique  $F_1(z) \neq 0$ .  $z_0$  est alors le seul zéro de  $F$  dans le disque  $D(z_0, r)$ . □

Cette propriété justifie *a posteriori* la terminologie “zéro isolé” : c’est un point isolé de l’ensemble des zéros de  $F$ .

## **2.2. Principe du prolongement analytique (forme faible).**

**Lemme 4.** — Soit  $F$  une fonction holomorphe dans un domaine  $\Delta$ . Si  $F$  est nulle en tout point d’un disque ouvert inclus dans  $\Delta$ ,  $F$  est nulle sur  $\Delta$ .

**Théorème.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $Z$  une partie dénombrable localement finie de  $\Omega$ . A tout  $z \in Z$  on associe un entier positif  $m(z)$ . Il existe une fonction holomorphe  $F$  définie dans  $\Omega$  et possédant les propriétés suivantes :

1.  $Z$  est l'ensemble des zéros de  $F$ .
2. Pour tout  $z \in Z$ ,  $z$  est un zéro d'ordre  $m(z)$ .

Nous démontrerons plus tard une version simplifiée de ce théorème.

**Exemple 2.3.** —  $\sin(1/z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}^*$ . Ses zéros sont les nombres de la forme  $\frac{1}{k\pi}$  ( $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ ). C'est un ensemble localement fini dans  $\mathbb{C}^*$ , mais non dans  $\mathbb{C}$ .

## 1. Points singuliers isolés

### 1.1. Définitions.

Soit  $F$  une fonction holomorphe en tout point d'un certain ouvert  $\Omega$ , sauf peut-être en un point  $a_0 \in \Omega$ . Distinguons les circonstances suivantes :

- (a)  $F$  est bornée dans un voisinage strict de  $a_0$  : on dit — et nous verrons pourquoi — que  $F$  présente en  $a_0$  une *fausse singularité*.
- (b)  $F$  n'est pas bornée au voisinage de  $a_0$  : on dit que  $a_0$  est un *point singulier isolé* de  $F$ .

Ce cas se divise lui-même en deux sous-cas :

(b1)  $\lim_{z \rightarrow a_0} |F(z)| = +\infty$  : on dit que  $a_0$  est un *pôle*.

(b2) sinon : on dit que  $a_0$  est un point singulier essentiel

## 1.2. Exemples.

**Exemple 1.1.** — La fonction  $\frac{\sin z}{z}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}^*$ . De plus :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = [\cos z]_{z=0} = 1$$

Donc zéro est une fausse singularité.

**Exemple 1.2.** — La fonction  $\frac{1}{1+z^2}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ . On a :

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{|1+z^2|} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{|1+z^2|} = +\infty$$

Donc  $i$  et  $-i$  sont des pôles.

**Exemple 1.3.** — La fonction  $\sin(1/z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}^*$ . On a pour  $z = iy$  où  $y \in \mathbb{R}^*$  :

$$\sin \frac{1}{iy} = -\sin \frac{i}{y} = -i \operatorname{sh} \frac{1}{y}$$

Donc :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \sin \frac{1}{iy} \right| = +\infty$$

Ceci suffit pour dire que zéro est un point singulier isolé. D'autre part pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

Donc zéro n'est pas un pôle : c'est un point singulier essentiel.

**Exemple 1.4.** — La fonction  $\frac{1}{\sin(1/z)}$  est holomorphe pour  $z \neq 0$  et  $z \neq (1/k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}^*$ ). Il y a un pôle en tout point de la forme  $(1/k\pi)$ . Ainsi zéro est un point d'accumulation de points singuliers isolés : ce n'est ni un point d'holomorphie, ni un point singulier isolé. Nous n'envisagerons pas ce cas ici.



### 3.2. Notion générale de point singulier.

Soit  $F$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ , et soit  $a_0$  un point de la frontière de  $\Omega$ . Deux cas peuvent se présenter :

*1<sup>er</sup> cas* : il existe un disque ouvert  $D$ , de centre  $a_0$ , et une fonction  $F_1$  holomorphe dans  $D$  tels que  $F$  et  $F_1$  coïncident sur  $D \cap \Omega$ . On dit alors que  $a_0$  est *régulier*.

*2<sup>e</sup> cas* : sinon, on dit que  $a_0$  est *singulier*.

Cela étant, un point singulier isolé n'est autre qu'un point isolé de l'ensemble des points singuliers de  $F$ .

**Exemple 3.3.** — Pour la détermination principale du logarithme, tous les points de la coupure  $\mathbb{R}^-$  sont singuliers et non isolés. Zéro est singulier pour toute détermination (ou branche) du logarithme : on l'appelle un *point de branchement*.