

Chapitre 1 : Optimisation linéaire

Introduction

1- Formulation d'un programme linéaire (PL)

1. Introduction

L'importance de l'optimisation et la nécessité d'un outil simple pour modéliser des problèmes de décision que soit militaire, économique ou autre sont fait de la programmation linéaire un des champs de recherche les plus actifs au milieu du siècle précédent. Les premiers travaux (1947) sont celle de George B. Dantzig et ses associés du département des forces de l'air des Etats Unis d'Amérique.

Les problèmes de programmation linéaire sont généralement liés à des problèmes d'allocations de ressources limitées avec pour but de maximiser un profit ou de minimiser un coût.

2. Conditions de formulation d'un PL

Les conditions de formulation d'un programme linéaire sont :

1. Les variables de décision du problème sont positives.
2. Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique).
3. Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple : limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
4. Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude.

3. Etapes de formulation d'un PL

Il y a trois étapes à suivre pour construire le modèle d'un programme linéaire :

1. Identification des variables du problème à valeur non connues (dites variables de décision ou principales) et leurs représentations sous forme symbolique (par exemple x_1 , y_1).

2. Identification des restrictions (les contraintes) du problème et leurs formulations par un système d'équations linéaires.

3. Identification de l'objectif ou du critère de sélection et sa représentation sous forme linéaire en fonction des variables de décision. On spécifiera ensuite si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

4. Présentation Théorique

Un programme linéaire consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inéquations dites contraintes. La description mathématique d'un programme linéaire est la suivante:

Soient n variables de décision $x_1, x_2, \dots, x_n$, l'hypothèse que les variables de décision sont positives implique que :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_i x_i + \dots + c_n x_n$$

Où les coefficients $c_1, \dots, c_n$ doivent avoir une valeur bien déterminée et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Par exemple le coefficient c_i peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien x_i , ainsi la valeur de Z sera le profit total lié à la production des différents biens en quantités égales à x_1, x_2, x_n .

Supposons que ces variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par m équations ou inégalités.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \quad (\leq, =, \geq) b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \quad (\leq, =, \geq) b_2$$

⋮

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \quad (\leq, =, \geq) b_m$$

Où les coefficients $a_{1m}, \dots, a_{mn}$ et $b_1, \dots, b_m$ doivent avoir une valeur bien déterminée et peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Le paramètre b_j représente par exemple la quantité de matière première disponible dont le bien x_i utilise une quantité égale à $a_{ij} x_i$.

En suivant les étapes de formulation décrites précédemment, on peut représenter le PL comme suite :

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
 \text{S. C:} \quad &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
 &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
 &\vdots \\
 &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\
 \text{c.n.n:} \quad &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

Ce modèle peut se formuler

$$\begin{aligned}
 \text{F.O :} \quad &Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 \text{S. C :} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 \text{c.n.n :} \quad &x_j \geq 0
 \end{aligned}$$

5. Exemples de formulations

Limité au départ aux problèmes militaires et industriels, de nos jours plusieurs problèmes de divers domaines sont représentés par des modèles de PL. L'utilisation de ces techniques de modélisation s'est renforcée encore après avoir construit des algorithmes et des logiciels capables de résoudre des problèmes avec autant de variables de décision que de contraintes.

La tâche de formulation demande une certaine expertise et connaissance du problème pour pouvoir identifier les différentes composantes du problème et ainsi trouver un modèle mathématique décrivant au mieux la situation réelle. Dans ce qui suit, on présentera quelques exemples de formulation en programme linéaire liés à différents problèmes de décision :

Exemple 1 : problème de production

Pour fabriquer deux produits P_1 et P_2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M_1 , M_2 et M_3 , successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	Machine 1	Machine 2	Machine 3
Produit 1	11 mn	7 mn	6mn
Produit 2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.

La disponibilité pour chaque machine est :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M_1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M_2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M_3 .

Le produit P_1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P_2 un profit unitaire de 1000 dinars.

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P_1 et P_2 pour avoir un profit total maximum ?

Formulation du problème en un PL :

Etape 1 : Identification des variables de décision.

x_1 : le nombre d'unités du produit P_1 à fabriquer

x_2 : le nombre d'unités du produit P_2 à fabriquer

On vérifie que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives.

Contraintes de non-négativité : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Etape 2 : Identification des contraintes.

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité de chaque machine :

$$11 x_1 + 9 x_2 \leq 9900 \quad \text{pour la machine } M_1$$

$$7 x_1 + 12 x_2 \leq 8400 \quad \text{pour la machine } M_2$$

$$6 x_1 + 16 x_2 \leq 9600 \quad \text{pour la machine } M_3$$

Etape 3 : Identification de la fonction objectif.

La fonction objectif consiste à maximiser le temps global d'exploitation des machines

$$Z = 24 x_1 + 37 x_2$$

Exemple 2 : problème de transport

Une entreprise d'appareils électroménagers dispose de 03 usines localisées dans différentes villes qui alimentent 04 points de vente. La production annuelle de

chaque usine, la demande annuelle de chaque point de vente et les coûts unitaires de transport sont donnés dans le tableau suivant :

Points de ventes					
Usines	V1	V2	V3	V4	Production annuelle
U1	5	6	6	8	15 000
U2	11	9	4	7	12 000
U3	12	7	8	5	23 000
Demande annuelle	10 000	5 000	20 000	15 000	

Ecrire le programme linéaire qui permettrait d'obtenir un plan de transport à un coût global minimal.

Programme linéaire:

La formulation du problème posé peut être facilitée à l'aide du tableau des variables ci-dessous. Les variables x_{ij} représentent le nombre d'unités d'appareils à livrer de l'usine i ($i = 1,2,3$) au point de vente j ($j = 1,2,3,4$). On a 12 variables de décision.

Points de ventes					
Usines	V1	V2	V3	V4	Production annuelle
U1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	15 000
U2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	12 000
U3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	23 000
Demande annuelle	10 000	5 000	20 000	15 000	

Le système de contraintes s'écrit comme suit :

S.C :

$$\left. \begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 15\,000 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 12\,000 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 23\,000
 \end{aligned} \right\} \text{Capacité de production}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 10\,000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 5\,000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 20\,000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 15\,000 \end{aligned} \right\} \text{ Production annuelle}$$

c.n.n : $x_{ij} \geq 0$

La fonction objectif qui permet de minimiser le coût global de transport s'exprime comme suit :

F.O : $\text{Min } Z = 5x_{11} + 6x_{12} + 6x_{13} + 8x_{14} + 11x_{21} + 9x_{22} + 4x_{23} + 7x_{24} + 12x_{31} + 7x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}$

6- Méthode de résolution par énumération des solutions de base

Cette méthode comprend les étapes suivantes :

1. Recherche de toutes les solutions de base du programme linéaire.
2. Sélection des solutions de base admissibles.
3. Calcul de la valeur de la fonction objectif pour chaque solution de base admissible et déduction de la (ou des) solution (s) optimale (s).

Cette méthode est simple, mais elle n'est pas pratique, car le nombre de solutions de base à explorer est élevé. Par exemple un programme linéaire à 10 variables et 5 contraintes, le nombre de solutions possibles est égal au nombre de combinaisons = 10.

Cette méthode de résolution permet d'obtenir les solutions de base admissibles, mais pas nécessairement la solution optimale.

À l'aide de l'exemple ci-après, on expliquera la méthode de résolution par énumération des solutions de base.

Soit un programme linéaire sous la forme normale :

$$\text{F.O : } \max Z = 3x_1 + 4x_2;$$

$$\text{S.C : } \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 80, \\ x_2 + x_4 & = & 30, \end{array} \quad (6)$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 100,$$

$$\text{C.N.N : } x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

1ere étape : Recherche des solutions de base du programme linéaire.

La matrice des coefficients A s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(5,3)} = [a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}]$$

A partir des 5 vecteurs colonnes $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ et $a^{(5)}$, on peut former les combinaisons suivantes :

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$, | 6. $a^{(1)}, a^{(4)}, a^{(5)}$ |
| 2. $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(4)}$, | 7. $a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$ |
| 3. $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(5)}$, | 8. $a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(5)}$ |
| 4. $a^{(1)}, a^{(3)}, a^{(4)}$ | 9. $a^{(2)}, a^{(4)}, a^{(5)}$ |
| 5. $a^{(1)}, a^{(3)}, a^{(5)}$ | 10. $a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}$ |

$$\text{On a } \binom{5}{3} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ combinaisons.}$$

On vérifie s'il existe parmi les 10 combinaisons celles qui ne forment pas de base. Pour cela on calcule le déterminant de chaque combinaison. On remarque que la 5ème combinaison ne forme pas de base, car les colonnes $a^{(1)}$, $a^{(3)}$, $a^{(5)}$ ne sont pas linéairement indépendants (le déterminant est nul) ; on a

$$[a^{(1)}, a^{(3)}, a^{(5)}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Les 9 combinaisons restantes forment 9 bases différentes, qui seront désignées par le numéro de la combinaison. B_5 n'appartient pas aux bases.

La représentation de base et la solution de base ou la solution de base admissible de chaque base ont la forme suivante :

$$B_1 [a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}] :$$

RB₁:

$$-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + x_1 = 35,$$

$$x_4 + x_2 = 30,$$

$$-\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + x_3 = -15$$

.....

$$-\frac{5}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + Z = 225$$

SB₁:

$$x_{B1} = [35, 30, -15, 0, 0]$$

$$Z(x_{B1}) = 225$$

La représentation de base de la base B₁ [a⁽¹⁾, a⁽²⁾, a⁽³⁾] a est établie comme suit :

Le système d'équations initial (6) sera résolu en calculant les variables de base x₁, x₂ et x₃ en fonction des variables hors-base x₄ et x₅. Du système d'équations (6), on a :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 80,$$

$$x_2 = 30 - x_4,$$

$$2x_1 + x_2 = 100 - x_5$$

En appliquant la règle de Cramer, on a :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 80 & 2 & 1 \\ 30 - x_4 & 1 & 0 \\ 100 - x_5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{30 - x_4 - 100 + x_5}{-2}$$

$$x_1 = 35 + \frac{x_4}{2} - \frac{x_5}{2}$$

D'une manière similaire on obtient les autres variables:

$$x_2 = 30 - x_4$$

$$x_3 = -15 + \frac{3}{2} x_4 + \frac{1}{2} x_5$$

Les variables x_1 , x_2 et x_3 seront éliminées de la fonction objectif en remplaçant ces variables par les membres de droites qui contiennent les variables x_4 et x_5 :

$$Z = 3 x_1 + 4 x_2 = 120 - 4 x_4 + 105 + 3/2 x_4 - 3/2 x_5$$

$$Z = 225 - 5/2 x_4 - 3/2 x_5$$

il en résulte :

$$x_1 = 35 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} x_5,$$

$$x_2 = 30 - x_4,$$

$$x_3 = -15 + \frac{3}{2} x_4 + \frac{1}{2} x_5,$$

$$Z = 225 - \frac{5}{2} x_4 - \frac{3}{2} x_5.$$

En appliquant la même démarche pour les autres combinaisons, on obtient les représentations de bases suivantes :

2- $B_2 [a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(4)}]$

RB_2 :

$$-\frac{1}{3} x_3 + \frac{2}{3} x_5 + x_1 = 40,$$

$$\frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_5 + x_2 = 20,$$

$$-\frac{3}{2} x_3 + \frac{1}{3} x_5 + x_4 = 10,$$

$$-\frac{5}{3} x_3 + \frac{3}{2} x_5 + Z = 200.$$

SB_2 :

$$X_{B2} = [40, 20, 0, 10, 0] ;$$

$$Z(X_{B2}) = 200.$$

3. $B_3 [a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(5)}]:$

$RB_3:$

$$\begin{aligned} x_3 - 2x_4 + x_1 &= 20, \\ + x_4 + &+ x_2 &= 30, \\ - 2x_3 + 3x_4 &+ x_5 &= 30, \end{aligned}$$

$$3x_3 - 2x_5 + Z = 180.$$

$SB_{B_3}:$

$$X_{B_3} = [20, 30, 0, 0, 30];$$

$$Z(X_{B_3}) = 180.$$

4. $B_4 [a^{(1)}, a^{(3)}, a^{(4)}]:$

$RB_4:$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 + x_1 &= 35, \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 + x_3 &= 30, \\ x_2 + &+ x_4 &= 30, \end{aligned}$$

$$-\frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_5 + Z = 150$$

$SB_4:$

$$X_{B_4} = [50, 0, 30, 30, 0]$$

$$Z(X_{B_4}) = 150$$

6. $B_6 [a^{(1)}, a^{(4)}, a^{(5)}]:$

$RB_6:$

$$\begin{aligned} x_3 - 2x_2 + x_1 &= 80, \\ + x_2 + &+ x_4 &= 30, \\ - 2x_3 - 3x_2 &+ x_5 &= -60, \end{aligned}$$

$$3x_3 - 2x_2 + Z = 240$$

$SB_6:$

$$X_{B_6} = [80, 0, 0, 30, -60];$$

$$Z(X_{B_6}) = 240.$$

7. $B_7 [a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}]:$

$RB_7:$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x + x_2 &= 100, \\ -3x_1 - 2x_5 + x_3 &= -120, \\ - 2x_3 - x_5 &+ x_4 &= -70, \end{aligned}$$

$$5x_1 + 4x_5 + Z = 400$$

$SB_7:$

$$X_{B_7} = [0, 100, -120, -70, 0];$$

$$Z(X_{B_7}) = 400.$$

$$8. B_8 [a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(5)}]:$$

RB₈:

$$\begin{aligned} x_4 + x_2 &= 30, \\ x_1 - 2x_4 + x_3 &= -120, \\ 2x_1 - x_4 + x_5 &= -70, \end{aligned}$$

SB₈:

$$\begin{aligned} X_{B8} &= [0, 30, -20, 0, 70]; \\ Z(X_{B8}) &= 120. \end{aligned}$$

$$-3x_1 + 4x_4 + Z = 120$$

$$9. B_9 [a^{(2)}, a^{(4)}, a^{(5)}]:$$

RB₉:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_2 &= 40, \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 &= -10, \\ -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + x_5 &= 60, \end{aligned}$$

SB₉:

$$\begin{aligned} X_{B9} &= [0, 40, 0, -10, 60]; \\ Z(X_{B9}) &= 160. \end{aligned}$$

$$-x_1 + 2x_3 + Z = 160$$

$$10. B_{10} [a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}]:$$

RB₁₀:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 80, \\ x_2 + x_4 &= 30, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 100, \end{aligned}$$

SB₁₀:

$$X_{B10} = [0, 80, 30, 100]$$

$$-3x_1 - 4x_2 + Z = 0.$$

$$Z(X_{B9}) = 0.$$

SB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	35	30	-15	0	0
2	40	20	0	10	0
3	20	30	0	0	30
4	50	0	30	30	0
6	0	100	0	30	-60
7	0	30	-120	-70	0
8	0	40	20	0	70
9	0	0	0	-10	60
10	0	0	80	30	100

2^{ème} Etape : Sélection des solutions de base admissibles.

Parmi les 9 solutions de base, on n'a que 5 solutions de base admissibles.

SBA	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	40	20	0	10	0
3	20	30	0	0	30
4	50	0	30	30	0
8	0	40	20	0	70
10	0	0	80	30	100

3^{ème} Etape : Calcul de Z pour les 5 solutions de base admissibles.

SBA	2	3	4	8	10
Z	200	180	150	120	0

Puisque on a une maximisation de Z, la solution optimale est la solution de base admissible N°2.

$X_{B2} = [40, 20, 0, 10, 0]$ et $Z(X_{B2}) = 200$.

7- Résolution du problème par la méthode Simplexe

7.1. Théorème : Critère du simplexe

Une solution admissible x du PL (5) est un sommet si et seulement si x est une SBA.

Si $X_B = [x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0, \dots, x_{n+1}=k_1, \dots, x_{n+m}=k_m]$ est une *SBA* (tous les $K_i \geq 0$, $i=1, \dots, m$) du *PL*.

et la fonction objectif a dans la *RB* correspondant la forme

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n + Z = c,$$

Avec $g_j \geq 0$ pour $j = 1, \dots, n$, alors X_B est une solution maximale.

7.2. Méthode des tableaux du simplexe :

Pour la construction d'un tableau du simplexe, on doit établir le PL sous sa forme normale.

$$\begin{aligned}
 F.O.: & \max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + c_{n+1} x_{n+1} + \dots + c_{n+m} x_{n+m} \\
 S.C.: & \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
 & \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\
 C.N.N.: & \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, n+m, \quad b_i \geq 0, i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

A partir du PL (4.1), on construit le tableau du simplexe de départ1présenté comme suit :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ \text{VHB} \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_1 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n \quad b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{VB} \\
 x_{n+1} \\
 x_{n+2} \\
 \vdots \\
 x_{n+m} \\
 G
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 -1 & c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 & Q \\
 \hline
 c_{n+1} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} & b_1 & q_1 \\
 c_{n+2} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{2n} & b_2 & q_2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_{n+m} & a_{1m} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m & q_m \\
 \hline
 G & g_1 & g_2 & \dots & g_n & c & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.2)$$

Le tableau du simplexe (1) est construit comme suit :

- La 1^{ère} ligne contient les variables hors-base (VHB) $x_1, \dots, x_n$.
- La 1^{ère} colonne contient les variables de base (VB) $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$
- La 2^{ème} ligne et la 2^{ème} colonne contiennent les coefficients de la fonction objective associée aux VB et VHB.
- Pour des raisons de commodité, la valeur du 1^{er} coefficient dans la 2^{ème} ligne est égale à (-1) et celle du dernier coefficient est égale à zéro.
- Le milieu du tableau (c.à.d. de la 3^{ème} jusqu'à la $(m+2)$ ième ligne et de la 3^{ème} jusqu'à la $(n+2)$ ième colonne) contient les valeurs des coefficients des variables des contraintes.
- L'avant dernière colonne contient les valeurs des membres du côté droit des contraintes.

1^{ère} Etape:

On commence par calculer les coefficients de forme g_k et le nombre de base c à l'aide des relations suivantes et on les porte dans la ligne G du tableau du simplexe :

La ligne G du tableau est destinée aux coefficients de forme g_j et au nombre de base c .

- La colonne Q du tableau est destinée aux quotients q_i .
- Chaque itération du simplexe peut être effectuée en établissant un autre tableau du simplexe et comprend les opérations ci-dessous.
- Avant d'entamer ces opérations, on doit porter les valeurs des coefficients a_{ij} , b_i , et c_j dans le 1^{er} tableau simplexe.

On commence par calculer les coefficients de forme g_k et le nombre de base c à l'aide des relations suivantes et on les porte dans la ligne G du tableau du simplexe :

$$g_K = \sum_{i=1}^m c_{n+i} a_{ik} - c_k, \quad (k=1, \dots, n) \quad (4.3)$$

$$c = \sum_{i=1}^m c_{n+i} b_i$$

On calcule les sommes des produits de la 2^{ème} colonne avec les autres colonnes et les résultats seront portés dans la ligne G. Ce calcul justifie l'écriture des chiffres -1 et 0 dans la 2^{ème} ligne du tableau (4.2).

On doit ensuite vérifier, si tous les coefficients de forme sont non négatifs :

$$\min_{1 \leq i \leq m} \{g_k\} = g_i \geq 0 \quad ? \quad (4.4)$$

Si $g_i \geq 0$, alors la solution correspondant au tableau simplexe est optimale. Elle est lue directement du tableau en posant toutes les VHB égales à zéro ($x_1=x_2=\dots=x_n=0$). Les valeurs des VB sont égales à celles correspondantes dans la colonne b ($x_{n+1}=b_1, x_{n+2}=b_2, \dots, x_{n+m}=b_m$).

Si $g_i < 0$, la colonne de g_i sera désignée comme colonne d'entrée. (Les éléments de cette colonne seront par exemple soulignés et la colonne sera indiquée par une flèche entrante). Cette colonne représente la colonne d'entrée, car la VHB x_i deviendra dans le tableau du simplexe suivant une VB :

2^{ème} Etape :

Après avoir trouvé la colonne d'entrée, on calcule les quotients q_i par la division des éléments de la colonne b par les éléments de la colonne d'entrée et on détermine le quotient minimal.

$$q_i = \frac{b_i}{a_{ie}} \quad \text{pour} \quad a_{ie} > 0 \quad (4.5)$$

Ces quotients ne doivent être calculés que pour des éléments positifs. Ils sont ensuite portés dans la colonne Q. Les cases de la colonne Q où il n'existe pas de quotient, doivent rester vides.

Dans le cas où toutes les valeurs de la colonne d'entrée sont non positives, on arrête le processus d'itération, car $g_i < 0$ et $a_{ie} \leq 0$. Il n'existe pas de quotient q_i ($i = 1, \dots, m$). Le PL n'a pas de solution optimale.

La ligne ayant le plus petit q_i sera désignée comme ligne de sortie qui sera par exemple soulignée ou indiquée par une flèche sortante.

$$\min_{1 \leq i \leq m} \{q_i\} = q_k \geq 0 \quad a_{ie} > 0$$

(Critère de sortie d'une variable de la base)

La variable de base associée à cette ligne apparaîtra dans le prochain tableau du simplexe comme VHB.

Pour passer à l'étape suivante, on construit un nouveau tableau du simplexe pour entamer le processus d'itération. On calculera les nouvelles valeurs des coefficients du nouveau tableau du simplexe. Les nouveaux coefficients seront désignées par : a_{ij} , b_i , c_j , g_j .

3^{ème} Etape :

Les variables à échanger et les coefficients correspondants de la fonction objectif seront échangés.

$$\begin{aligned} \text{VB} : x_k &\longleftrightarrow \text{VHB} : x_l, \\ c_k &\longleftrightarrow c_l. \end{aligned}$$

4^{ème} Etape :

Si a_{kl} est l'élément, qui se trouve à l'intersection de la colonne d'entrée et de la ligne de sortie (**élément pivot**), alors $(1/a_{kl})$ est l'élément correspondant dans le nouveau tableau.

Élément pivot (ou pivot): $\bar{a}_{kl} = \frac{1}{a_{kl}}$ nouvel élément = $1/\text{Pivot}$ (4.6)

Les éléments correspondants à la ligne de sortie seront calculés d'après les formules suivantes :

Ligne du pivot : $\bar{a}_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}, \quad \bar{b}_k = \frac{b_k}{a_{kl}} \quad j=1, \dots, n, \quad j \neq k; \quad (4.7)$

Nouvel élément = $\frac{\text{ancien élément}}{\text{pivot}}$

Les éléments correspondants à la colonne d'entrée se calculent comme suit :

Colonne du pivot : $\bar{a}_{il} = -\frac{a_{il}}{a_{kl}}, \quad \bar{g}_l = -\frac{g_l}{a_{kl}} \quad i=1, \dots, m, \quad i \neq k$

Nouvel élément := $-\frac{\text{ancien élément}}{\text{pivot}}$ (4.8)

5^{ème} Etape :

Tous les autres éléments se calculent comme suit :

$\bar{a}_{kj} = a_{ij} - \frac{a_{kl} \cdot a_{kj}}{a_{kl}}, \quad i \neq k, \quad j \neq l;$

$\bar{b}_i = b_i - \frac{a_{il} \cdot b_k}{a_{kl}}, \quad i \neq k;$

$\bar{g}_j = g_j - \frac{g_l \cdot a_{kj}}{a_{kl}}, \quad j \neq l$

$\bar{c} = c - \frac{a_{l\ell} \cdot b_k}{a_{kl}} \cdot \left(\begin{array}{c} \text{élément correspondant} \\ \text{de la colonne d'entrée} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{élément correspondant} \\ \text{de la ligne de sortie} \end{array} \right)$

Nouvel élément := ancien élément - $\frac{\text{élément correspondant de la colonne d'entrée} \cdot \text{élément correspondant de la ligne de sortie}}{\text{pivot}}$

Après cette 5^{ème} étape, on remplit le nouveau tableau, du quel on peut déterminer la RBA avec la SBA.

Il faut vérifier si les coefficients g_k sont non-négatifs

Exemple :

Soit un programme linéaire sous la forme normale :

$$\text{F.O : } \max Z = 3x_1 + 4x_2;$$

$$\text{S.C : } \quad \quad \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \quad \quad = 80,$$

$$\quad \quad \quad x_2 + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_4 \quad \quad \quad = 30,$$

$$\quad \quad \quad 2x_1 + x_2 \quad \quad \quad + x_5 = 100,$$

$$\text{C.N.N : } \quad \quad \quad x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

En appliquant la méthode des tableaux du simplexe, on obtient les résultats suivants :

Tableau de départ 1 :

1	VHB	x_1	x_2	b	
VB	-1	3	4	0	Q
x_3	0	1	2	80	40
x_4	0	0	1	30	30
x_5	0	2	1	100	100
G	-3		-4	0	

Tableau N° 2 :

2	VHB	x_1	x_4	b	
VB	-1	3	0	0	Q
x_3	0	1	-2	20	20
x_2	4	0	1	30	%
x_5	0	2	-1	70	35
G		-3	4	120	

Tableau N° 3 :

3	VHB	x_3	x_4	b	
VB	-1	0	0	0	Q
x_1	3	1	-2	20	%
x_2	4	0	1	30	30
x_5	0	2	3	30	10
G		3	-2	180	