1.2 Généralités

1.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

1.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, et soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie comme suit

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1) *On appelle série numérique de terme général u_n le couple des suites $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$.*

2) *La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite des sommes partielles de rang n de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Notation 1.1. *La série numérique est notée par $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$ ou $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

1.2 Définition

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas la limite $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est appelée somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
On écrit

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 1.1.
Étudier la nature d'une série revient à déterminer sa nature si elle converge ou diverge ensuite calculer sa somme en cas de convergence.

Exemple 1.1.
Étudions la convergence de la série géométrique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$, avec $a \in \mathbb{R}$.

La suite des sommes partielles associée à cette série géométrique est donnée par

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-a^n}{1-a}, & a \neq 1, \\ n+1 & a = 1. \end{cases}$$

1) *Si* $a = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ *donc la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ *diverge.*

2) *Si* $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-a^n}{1-a} = +\infty$ *alors la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ *diverge.*

3) *Si* $a \leqslant -1$, *la limite de* S_n *n'existe pas et donc la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ *diverge.*

4) *Si* $-1 < a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-a^n}{1-a} = \dfrac{1}{1-a}$ *et donc* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ *converge et* $S = \dfrac{1}{1-a}$.

Exemple 1.2.

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. *Posons* $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ *pour tout* $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers 1. Par conséquent la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *est convergente, et sa somme* $S = 1$.

Exemple 1.3.
Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$. *Posons* $u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln \frac{k+2}{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\ln k+2 - \ln k+1) \\
&= (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \\
&= \ln(n+2),
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \ln(n+2) = +\infty,$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente, d'où la divergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+1}$.

Remarque 1.2.

Si $u_n = a_{n+1} - a_n$ *on trouve que* $S_n = a_{n+1} - a_0$, *alors la série de terme général* u_n *converger si et seulement si la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Exercice 1.1.

Déterminer la nature des séries suivantes en calculons leurs sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

On vient de voir qu'une fois la suite des sommes partielles associée est explicitée alors on peut déduire la nature de la série qui est de même que la suite des sommes partielles, mais trouver l'expression analytique exacte de celle-ci, n'est pas toujours facile, par exemple la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Pour remédier à ce problème, il a fallu concevoir d'autres critères qui nous permettent de déterminer la nature d'une série numérique sans trouver l'expression analytique de la suite des sommes partielles qui lui est associée.

1.2.2 Condition nécessaire de convergence

1.1 Proposition

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.

Démonstration.

Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite des sommes partielles associée est convergente. De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n - S_{n-1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) = u_n,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0.$$

L'implication inverse est fausse. En effet, reprenons l'exemple 2.1, la série $\sum \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ est divergente, bien que son terme général tend vers 0. $\square$

Remarque 1.3.

Par contraposition, si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

Exemple 1.4.

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(e^{\frac{1}{n}})$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sin(e^{\frac{1}{n}}) = \sin(1) \neq 0.$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée alors la série est divergente.

1.2.3 Critère de Cauchy

1.2 Proposition

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, i.e

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall p, q \in \mathbb{N},\quad q > p \geqslant N;\quad |S_q - S_p| < \varepsilon,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0n \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p, q \in \mathbb{N}, \ q > p \geqslant N; \ \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right| < \varepsilon.$$

Démonstration.

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée est convergente par conséquent c'est une suite de Cauchy, puis la proposition est démontrer. □

Exemple 1.5.

Pour montrer que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *est divergente, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles qui lui est associée* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *n'est pas de Cauchy.*
En effet, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *pour* $p = 2n$ *et* $q = n$, *on trouve que*

$$\begin{aligned} |S_p - S_q| &= |S_{2n} - S_n| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| \\ &> \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{n}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il suffit ainsi de choisir $\varepsilon = \frac{1}{2}$, *pour que* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ne soit pas de Cauchy.*

1.2.4 Reste de rang n d'une série convergente

1.3 Définition

Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge, on appelle reste de rang* n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

1.3 Proposition

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *une série convergente alors la suite* R_n *est convergente et on a*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \quad \text{et} \quad S_n + R_n = S.$$

Démonstration.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente, on a donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Soit $S_n + R_n = S$ alors $R_n = S - S_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} R_n = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

□

1.3 Séries à termes réels positifs

1.4 Définition

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *réelle est dite à termes positifs si pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

1.1 Lemme (convergence par majoration des sommes partielles)

Une série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge si et seulement la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

Démonstration.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergente (par définition).
- Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée, comme la série est à termes positifs alors elle est croissante et donc convergente.

□

Exemple 1.6.

Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2} > 0$. *Vérifions que* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ *est majorée.*

Comme $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ *pour tout* $k \geqslant 2$, *alors*

$$\begin{aligned} S_n &< 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \\ &< 2, \end{aligned}$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, ce qui implique que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *est convergente.*

1.1 Théorème (Règle de comparaison)

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries à termes positifs telles que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. *Alors*

1− *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*

2− *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Démonstration.

1− Posons : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $S_n \leqslant T_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ converge $\Rightarrow T_n$ converge $\Rightarrow T_n$ est bornée (majorée) $\Rightarrow S_n$ est majorée.
D'après le Lemme 1.3 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2− Par contraposition : si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge.

$\square$

Remarque 1.4.

1. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *sont à termes négatifs, alors il suffit d'étudier les séries* $\sum_{n=0}^{\infty} -u_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} -v_n$.
2. *Dans le théorème de comparaison, on peut remplacer l'hypothèse* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ *par l'hypothèse :* $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geqslant n_0; u_n \leqslant v_n$.

Exemple 1.7.

Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin^2 n}{2^n + \ln n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_n \geqslant 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on peut appliquer la règle de comparaison.*

Comme $\sin^2 n$ *est majorée par* 1, *et* $\ln n \geqslant 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leqslant \frac{1}{2^n + \ln n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *est une série géométrique convergente, d'après la règle de comparaison* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *est convergente.*

1.2 Théorème (Règle d'équivalence)

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries à termes positifs telles que, lorsque* $n \to +\infty$, $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$ ($\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$). *Alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *ont la même nature.*

Démonstration.

Soit $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0;\ (1-\varepsilon)v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)v_n,$$

Grâce a la règle de comparaison et les inégalités précédentes on trouve que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ ont la même nature. $\square$

Exemple 1.8.

Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1 + a^n}{5^n + 3^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a > 0$.

a) *Si* $0 < a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, *donc*

$$u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{5^n + 3^n} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{5^n}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ *est une série géométrique convergente, et d'après la règle d'équivalence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{2^n + \ln n}$.

b) *Si* $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$, *alors*

$$u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{a^n}{5^n + 3^n} \overset{+\infty}{\sim} \frac{a^n}{5^n},$$

si $a \geqslant 5$ *la série géométrique* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{5}\right)^n$ *diverge, et par la règle d'équivalence* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+a^n}{5^n + 3^n}$ *diverge, et si* $a < 5$ *la série géométrique* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{5}\right)^n$ *converge, et donc* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+a^n}{5^n + 3^n}$ *converge.*

1.4 Comparaison d'une série avec une intégrale

1.3 Théorème

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ *et* $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une fonction continue et décroissante, posons* $u_n = f(n)$ *pour tout* $n \geqslant n_0$. *La série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge si et seulement si* $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge, et on a*

$$\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leqslant f(n_0) + \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n_0$, f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, et pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k),$$

en intégrant par rapport à x de k à $k+1$, on obtient

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x,$$

d'où

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k),$$

en sommant de n_0 à n, et en utilisant le fait que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$, on obtient

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_{k+1} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} u_k,$$

d'où

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} u_k \leqslant \int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} u_k,$$

en déduit que

$$S_{n+1} - S_{n_0} \leqslant \int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_n - S_{n_0-1}.$$

1– Si $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

$$S_{n+1} \leqslant \int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x + S_{n_0} \leqslant \int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + S_{n_0} = M.$$

où M est une constante positive.

La suite $(S_{n\in\mathbb{N}})$ est donc majorée et comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs alors d'après le Lemme 1.3, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

2– Supposons maintenant que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente de somme S,

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S$$

ainsi $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.