CUR

المركز الجامعي لغليزان

Pr M. Djaa

Introduction a la Geometrie Riemannienne Et L'Analyse Harmonique sur les varietes

Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane
2017

Ce document est un projet de livre destiné pour les étudiants en master et doctorat LMD, aussi pour les chercheurs débutant en géométrie Riemannienne et analyse globale sur les variétés.

Toute remarque sur le contenu sera prise en considérations.

Pr. Mustapha Djaa

Email: Djaamustapha20@gmail.com

Table des matières

Chapitre 3

Introduction à la géométrie harmonique

3.1 Le fibré tangent inverse

3.1.1 Le fibré tangent inverse

(voir la sous-section 2.1.11 et la sous-section 2.2.5)

Soient M, N deux variétés différentiables et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. Si ∇^N est une connexion linéaire sur le fibré tangent (TN, π_N, N), alors le fibré tangent inverse est définit par

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}TN &= \{\,(x,v)\,|\,x \in M\,,\ v \in T_{\varphi(x)}N\,\}\\ &= \bigcup_{x\in M}\{x\} \times T_{\varphi(x)}N\,,\end{aligned}$$

et

$$\Gamma(\varphi^{-1}TN) = \{\,V : M \longrightarrow TN, \quad \forall x \in M\,,\ V_x \in T_{\varphi(x)}N\,\}$$

Localement pour tout $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ et $\varphi^\beta = y^\beta \circ \varphi$, on a

$$d\varphi(X) = X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

et

$$\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \{\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\overset{N}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi\}\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi$$

En effet

$$\begin{aligned}\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j}) &= \nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi\\ &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi\\ &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}(\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\beta}) \circ \varphi\\ &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\overset{N}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi. \quad \square\end{aligned}$$

Remarque 3.1.1. *Soient M, N deux variétés différentiables, $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(TN)$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable ; Si X et V (resp. Y et W) sont φ-conjugué i.e.*

$$d\varphi(X) = V \circ \varphi \quad et \quad d\varphi(Y) = W \circ \varphi,$$

alors

$$\nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) = (\nabla^N_V W) \circ \varphi\,.$$

Proposition 3.1.1. *Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Si ∇^N une connexion linéaire compatible avec une métrique h sur N, alors la connexion linéaire ∇^{φ} est compatible avec la métrique h_φ sur $\varphi^{-1}TN$. C'est à dire, pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ on a*

$$X(h_\varphi(V, W)) = h_\varphi(\nabla^{\varphi}_X V, W) + h_\varphi(V, \nabla^{\varphi}_X W)\,.$$

Preuve : Soient $X \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ et $\widetilde{X}, \widetilde{V}, \widetilde{W} \in \Gamma(TN)$, tels que

$$d\varphi(X) = \widetilde{X} \circ \varphi \quad , \quad \widetilde{V} \circ \varphi = V \quad et \quad \widetilde{W} \circ \varphi = W$$

alors,

$$\begin{aligned} X(h_\varphi(V, W)) &= X(h(\widetilde{V}, \widetilde{W}) \circ \varphi) \\ &= \widetilde{X}(h(\widetilde{V}, \widetilde{W})) \circ \varphi \\ &= h(\nabla^N_{\widetilde{X}} \widetilde{V}, \widetilde{W}) \circ \varphi + h(\widetilde{V}, \nabla^N_{\widetilde{X}} \widetilde{W}) \circ \varphi \\ &= h_\varphi(\nabla^{\varphi}_X V, W) + h_\varphi(V, \nabla^{\varphi}_X W)\,. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.2. *Soit ∇^N une connexion sans torsion sur N, alors*

$$\nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) = \nabla^{\varphi}_Y d\varphi(X) + d\varphi([X, Y])\,,$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve : Soit $V, W \in \Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs φ-conjugué avec X et Y respectivement . On a

$$[V, W] \circ \varphi = d\varphi \circ [X, Y]$$
$$\nabla^N_V W = \nabla^N_W V + [V, W]$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) &= (\nabla^N_V W) \circ \varphi \\ &= (\nabla^N_W V + [V, W]) \circ \varphi \\ &= \nabla^{\varphi}_Y d\varphi(X) + d\varphi([X, Y]) \end{aligned}$$

■

3.1.2 Seconde forme fondamentale

Définition 3.1.1. *Soient (M,g), (N,h) deux variétés Riemannienne et $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application différentiable de classe C^∞. La seconde forme fondamentale de l'application φ est la dériveé covariante de la 1-forme vectoriel $d\varphi$, définie par*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y)\,,$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Propriété 3.1.1. *Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application différentiable. Alors la seconde forme fondamentale de l'application φ est une forme vectoriel $C^\infty(M)$-bilinéaire symétrique. C'est à dire :*

$$(\nabla d\varphi)(\alpha.X, \beta.Y) = \alpha\beta(\nabla d\varphi)(X,Y)$$
$$(\nabla d\varphi)(X,Y) = (\nabla d\varphi)(Y,X)$$

pour tout $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve : :

• On a :

$$\begin{aligned}
\nabla d\varphi(\alpha.X, \beta.Y) &= \nabla^\varphi_{\alpha.X} d\varphi(\beta.Y) - d\varphi(\nabla^M_{\alpha.X}\beta.Y) \\
&= \alpha\nabla^\varphi_X \beta.d\varphi(Y) - d\varphi(\alpha.\nabla^M_X \beta.Y) \\
&= \alpha\beta\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) + \alpha.X(\beta)d\varphi(Y) - d\varphi(\alpha\beta\nabla^M_X Y + \alpha.X(\beta)Y) \\
&= \alpha\beta[\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y)]
\end{aligned}$$

• En utilisant la Proposition 3.1.2 on a :

$$\begin{aligned}
\nabla d\varphi(X,Y) &= \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) - d\varphi(\nabla^M_Y X) \\
&= \nabla d\varphi(Y,X)\,,
\end{aligned}$$

∎

Proposition 3.1.3. *Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors*

$$\nabla d(\psi \circ \varphi) = d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)\,.$$

Preuve : Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}
\nabla d(\psi\circ\varphi)(X,Y) &= \nabla^{\psi\circ\varphi}_X d(\psi\circ\varphi)(Y) - d(\psi\circ\varphi)(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla^{\psi\circ\varphi}_X d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla^P_{d\psi(d\varphi(X))} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla^\psi_{d\varphi(X)} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X,Y))\,.
\end{aligned}$$

∎

Définition 3.1.2. *Soient (M,g) et (N,h) des variétés Riemanniennes. Une application $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ est dite totalement géodésique si $\nabla d\varphi=0$.*

Remarque 3.1.2. *$\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h$ est totalement géodésique si et seulement si pour toute géodésique $\gamma:I\in\mathbb{R}\to M$ alors la courbe $\varphi\circ\gamma$ est une géodésique sur la variété N, i.e :*

$$\nabla^M_\gamma\dot\gamma=0,\quad\Rightarrow\quad\nabla^N_{\varphi\circ\gamma}\dot{\overline{\varphi\circ\gamma}}=0$$

Définition 3.1.3. *Soit $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ une application de classe C^∞. La trace de la seconde forme fondamentale de l'application φ est appelé champ de tension de l'application φ, noté par*

$$\tau(\varphi)=tr_g\nabla d\varphi. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.3. *Relativement à une base orthonormée (e_i) sur M on a*

$$\tau(\varphi)=\nabla^\varphi_{e_i}d\varphi(e_i)-d\varphi(\nabla^M_{e_i}e_i)\,,$$

Si $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ (resp $(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})$) est une base locale de champs de vecteurs sur M (resp sur N), on a :

1)

$$\begin{aligned}\tau(\varphi)&=g^{ij}\Big(\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x^i}}d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j})-d\varphi(\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\Big)\\&=g^{ij}(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\overset{N}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}\circ\varphi-\frac{\partial\varphi\gamma}{\partial x^k}\overset{M}{\Gamma^k_{ij}})\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi\,. &(3.2)\\\tau(\varphi)^\gamma&=g^{ij}(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\overset{N}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}\circ\varphi-\frac{\partial\varphi\gamma}{\partial x^k}\overset{M}{\Gamma^k_{ij}})\,. &(3.3)\\(\nabla d\varphi)_{ij}&=\Big(\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x^i}}d\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j})-d\varphi(\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\Big)\\&=(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\overset{N}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}\circ\varphi-\frac{\partial\varphi\gamma}{\partial x^k}\overset{M}{\Gamma^k_{ij}})\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi\,. &(3.4)\\(\nabla d\varphi)^\gamma_{ij}&=\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\overset{N}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}\circ\varphi-\frac{\partial\varphi\gamma}{\partial x^k}\overset{M}{\Gamma^k_{ij}} &(3.5)\end{aligned}$$

Proposition 3.1.4. *Soient $\varphi:M\longrightarrow N$ et $\psi:N\longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors*

$$\tau(\psi\circ\varphi)=d\psi(\tau(\varphi))+tr_g\nabla d\psi(d\varphi,d\varphi). \tag{3.6}$$

3.1.3 Cas des sous-variétés

Soient (N,h) une variété Riemannienne et M une sous-variété de N. Alors le champ de tenseur $g:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow C^\infty(M)$ défini pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$ et $p\in M$ par

$$g(X,Y)_p=h_p(X_p,Y_p)\,,$$

est une métrique Riemannienne sur M, appelé la métrique induite sur M par h.
Pour tout $p \in M$ on a

$$T_pN = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

où,

$$T_pM^{\perp} = \{ v \in T_pN \,|\, h_p(v,w) = 0 \;, \forall w \in T_pM\}$$

$\forall\, v \in T_pN \quad \exists!\, v^{\top} \in T_pM \quad \exists!\, v^{\perp} \in T_pM^{\perp} \quad | \quad v = v^{\top} + v^{\perp}\,.$

Remarque 3.1.4. *Soient $X \in \Gamma(TM)$ et $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$ un prolongement de X (i.e. $\tilde{X}|_M = X$). Si ∇^N (resp ∇^M) désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique h sur N (resp sur M), alors*

$$\nabla^M_X Y = (\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\top} \qquad , \quad X, Y \in \Gamma(TM)\,,$$

est la connexion de Levi-Civita associée á la métrique g sur M, qui indépendent de choix de prolongement.

La deuxième forme fondamentale de M sur N est donnée par

$$B(X,Y) = (\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\perp} \qquad , \quad X, Y \in \Gamma(TM)\,,$$

et la courbure moyenne est donnée par

$$H = trace\, B\,.$$

Définition 3.1.4. *Une sous variété M d'une variété N est dite minimale si sa courbure moyenne est nulle ($H = 0$).*

Remarques 3.1.1. *.*
1) Soit $i : M \hookrightarrow N$ l'injection canonique, alors la deuxième forme fondamentale de i coincide avec la deuxième forme fondamentale de M sur N, c'est à dire

$$\nabla di(X,Y) = B(X,Y) = (\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\perp} \qquad X, Y \in \Gamma(TM)\,.$$

2) Soit $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^{\perp})$, on a

$$g(\nabla di(X,Y), \mathcal{N}) = -g(\tilde{Y}, \nabla^N_{\tilde{X}} \mathcal{N}) \qquad X, Y \in \Gamma(TM)\,. \tag{3.7}$$

3) Dans le cas où M est une hyper-surface de N et $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^{\perp})$, on a

$$\nabla di(X,Y) = g(\nabla di(X,Y), \mathcal{N})\, \mathcal{N}\,.$$

En effet, pour prouver (2), soit $p \in M$ on a

$$\begin{aligned} g(\nabla di(X,Y), \mathcal{N}) &= g((\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\perp}, \mathcal{N}) \\ &= g(\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \mathcal{N}) - g((\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y})^{\top}, \mathcal{N}) \\ &= g(\nabla^N_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \mathcal{N}) \\ &= \tilde{X}(g(\tilde{Y}, \mathcal{N})) - g(\tilde{Y}, \nabla^N_{\tilde{X}} \mathcal{N})\,, \end{aligned}$$

Si $(\varphi_t(p))_t$ est une courbe sur M, définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, telle que $\tilde{X}_p = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p)|_{t=0}$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_p(g(\tilde{Y},\mathcal{N})) &= \frac{d}{dt}g(\tilde{Y},\mathcal{N})\circ\varphi_t(p)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}g_{\varphi_t(p)}(\tilde{Y}_{\varphi_t(p)},\mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}h_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)},\mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

(3) découle immédiatement de (1) et (2).

Exemple 3.1.1. *Si $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ désigne la sphère unité et $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ le champ de vecteur normal à la sphère, alors*

$$\nabla di(X,Y)_p = -g(X,Y)_p\mathcal{N}_p \qquad X,Y \in \Gamma(TM) \quad ,\forall p \in M\,. \tag{3.8}$$

$$g(\nabla di(X,Y),\mathcal{N})_p = -g(X,Y)_p \qquad X,Y \in \Gamma(TM) \quad ,\forall p \in M\,,$$

en effet, ceci découle de la formule 3.7 et de la relation

$$\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\tilde{X}}\mathcal{N} = \tilde{X}, \quad \forall \tilde{X} \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1}).$$

Définition 3.1.5. ***Troisième forme fondamentale***
Soit $\varphi : (M^n,g) \longrightarrow (N^n,h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.
La troisième forme fondamentale de φ est la dérivée covariante de $\nabla d\varphi$, elle est définie par :

$$\nabla^2 d\varphi(X,Y,Z) = \nabla_X(\nabla d\varphi(Y,Z)) - \nabla d\varphi(\nabla_X Y,Z) - \nabla d\varphi(Y,\nabla_X Z), \tag{3.9}$$

õu $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$

Proposition 3.1.5. *Contrairement à la seconde forme fondamentale, la troisième forme fondamentale n'est pas symétrique, nous avons :*

$$\nabla^2 d\varphi(X,Y,Z) = \nabla^2 d\varphi(Z,Y,X) + d\varphi(R^M(Z,X)Y) - R^N(d\varphi(Z),d\varphi(X))d\varphi(Y). \tag{3.10}$$

Preuve :
par définition nous avons :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 d\varphi(X,Y,Z) - \nabla^2 d\varphi(Z,Y,X) &= \nabla_X(\nabla d\varphi(Y,Z)) - \nabla d\varphi(\nabla_X Y,Z) - \nabla d\varphi(Y,\nabla_X Z) \\
&\quad - \nabla_Z(\nabla d\varphi(X,Y)) + \nabla d\varphi(\nabla_Z Y,X) + \nabla d\varphi(Y,\nabla_Z X),
\end{aligned}$$

en utilisant la deuxième forme fondamentale, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 d\varphi(X,Y,Z) - \nabla^2 d\varphi(Z,Y,X) &= \nabla_X(\nabla^\varphi_Z d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_Z X)) - \nabla^\varphi_Z d\varphi(\nabla_X Y) \\
&\quad + d\varphi(\nabla_Z\nabla_X Y) - \nabla^\varphi_{\nabla_X Z}d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z}Y) \\
&\quad - \nabla_Z(\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X Y)) + \nabla^\varphi_X d\varphi(\nabla_Z Y) \\
&\quad - d\varphi(\nabla_X\nabla_Z Y) + \nabla^\varphi_{\nabla_Z X}d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X}Y),
\end{aligned}$$

il suit que :

$$
\begin{aligned}
&= \nabla^{\varphi}_X \nabla^{\varphi}_Z d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi}_X d\varphi(\nabla_Z Y) - \nabla^{\varphi}_Z d\varphi(\nabla_X Y) \\
&+ d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla^{\varphi}_{\nabla_X Z} d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y)) \\
&- d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) + \nabla^{\varphi}_{\nabla_Z X} d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y) \\
&- \nabla^{\varphi}_X \nabla^{\varphi}_Z d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla^{\varphi}_{\nabla_X Z} d\varphi(Y) \\
&+ d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y) - \nabla^{\varphi}_Z \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) \\
&+ \nabla^{\varphi}_{\nabla_Z X} d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y) \\
&= d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{\nabla_X Z} Y \\
&- \nabla_X \nabla_Z Y) - (\nabla^{\varphi}_Z \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi}_X \nabla^{\varphi}_Z d\varphi(Y) \\
&+ \nabla^{\varphi}_{\nabla_X Z} d\varphi(Y)) - \nabla^{\varphi}_{\nabla_Z X} d\varphi(Y),
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
&= d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]} Y) - (\nabla^{\varphi}_Z \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) \\
&- \nabla^{\varphi}_X \nabla^{\varphi}_Z d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi}_{[Z,X]} d\varphi(Y)).
\end{aligned}
$$

Du fait que :

$$\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]} Y = R^M(Z,X)Y,$$

et :

$$
\begin{aligned}
\nabla^{\varphi}_Z \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi}_X \nabla^{\varphi}_Z d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi}_{[Z,X]} d\varphi(Y)) &= R^{\varphi}(Z,X) d\varphi(Y) \\
&= R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X)) d\varphi(Y),
\end{aligned}
$$

nous obtenons le résultat :

$$\nabla^2 d\varphi(X,Y,Z) = \nabla^2 d\varphi(Z,Y,X) + d\varphi(R^M(Z,X)Y) - R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X)) d\varphi(Y).$$

3.2 Equations d'Euler-Lagrange

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le lagrangien sur U est une fonction de classe C^∞ :

$$L : (x,y,t) \in U \times \mathbb{R}^n \times [t_1,t_2] \longrightarrow L(x,y,t) \in \mathbb{R}.$$

Etant donné deux points $x_1, x_2 \in U$, le problème variationnel associé consiste à chercher les courbes $\varphi : [t_1,t_2] \longrightarrow U$ tracées dans U, telles que $\varphi(t_1) = x_1$ et $\varphi(t_2) = x_2$, qui minimisent la fonctionnelle énergie :

$$E(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\, dt. \tag{3.11}$$

Pour caractériser la fonction $\varphi : [t_1,t_2] \longrightarrow U$, on considére la variation $\varphi_s(t) = \varphi(t) + s\, v(t)$ où $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ et $v(t)$ une fonction non nulle, sauf aux bornes t_1 et t_2, on alors :

$$v(t_1) = v(t_2) = 0 \quad , \quad \varphi_s(t_1) = \varphi(t_1) = x_1 \quad et \quad \varphi_s(t_2) = \varphi(t_2) = x_2.$$

Théorème 3.2.1.

$$\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

où $<,>_{\mathbb{R}^n}$ *désigne le produit scalaire standard sur* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \Big(\frac{\partial L}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial x^n}\Big) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \Big(\frac{\partial L}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial y^n}\Big)$$

Démonstration. Soit $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par :

$$\phi(s,t) = \varphi_s(t) = \varphi(t) + s\,v(t). \tag{3.12}$$

D'après (3.11) et (3.12), on a :

$$\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big|_{s=0} dt. \tag{3.13}$$

comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} L\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial x^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big).\end{aligned} \tag{3.14}$$

En intègrant par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial s}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big)\, dt.\end{aligned} \tag{3.15}$$

d'après les formules (3.12), (3.13), (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad + \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n}\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.\end{aligned}$$

comme $v(t_1) = v(t_2) = 0$, alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.\end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.2. *La courbe $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$ est un point critique pour la fonctionnelle énergie $E(\varphi)$ si et seulement si :*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big) = 0. \tag{3.16}$$

Ce système de n équations différentielles du second ordre s'appelle système d'équations d'Euler-Lagrange.

Exemple 3.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $L : U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$L(x, y, t) = \frac{y^2}{2},$$

ici le lagrangien représente l'énergie cinétique.

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{d\varphi}{dt}\Big)^2 dt$$

le système (3.16) est réduit à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

les solutions des équations d'Euler Lagrange sont les droites affine (géodésiques) :

$$\varphi(t) = a\,t + b, \quad a, b \in \mathbb{R}^n.$$

3.3 Applications harmoniques

3.3.1 Applications harmoniques

Définition 3.3.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemannienne de dimensions m et n respectivement. On appelle la densité de φ l'application*

$$e(\varphi) : M \longrightarrow \mathbb{R}_+ ,$$

définie pour tout $x \in M$ par

$$e(\varphi)(x) = \frac{1}{2}|d_x\varphi|^2 ,$$

où $|d_x\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la differentielle $d_x\varphi$ de φ au point x. Si $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ est une base orthonormée de T_xM, on a

$$\begin{aligned} |d_x\varphi|^2 &= tr_g\varphi^* h \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(d_x\varphi(e_i), d_x\varphi(e_i)) \end{aligned}$$

Si $\{x^i\}_{1\leq i\leq m}$ et $\{y^\alpha\}_{1\leq \alpha\leq n}$ sont les coordonneés locale autour de $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$ respectivement, alors

$$|d_x\varphi|^2 = g_x^{ij}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}|_x\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}|_x h_{\alpha\beta}(\varphi(x))$$

L'énergie de l'application φ sur un domain compact D dans M est définie par

$$E(\varphi, D) = \int_D e(\varphi)v_g = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2 v_g$$

Une variation de l'application φ est une application de classe C^∞,

$$\begin{array}{rcll} \phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) & \longrightarrow & N & , \quad \epsilon > 0 \\ (x, t) & \longmapsto & \varphi_t(x) & \end{array}$$

telle que (φ_t) est une famille des applications de classe C^∞ sur M, et $\varphi_0 = \varphi$. Soit $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ définie par

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)|_{t=0} \\ &= d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} \in T_{\varphi(x)}N \end{aligned}$$

Définition 3.3.2. *Application harmonique.*
Une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ de classe C^∞ est dite harmonique si

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} = 0$$

pour tout domaine compact D dans M et toute variation (φ_t) á support inclue dans D.

3.3.2 Première variation d'énergie

Proposition 3.3.1. *Soient $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application différentiable et (φ_t) une variation de φ á supports inclue dans D. Alors*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))v_g.$$

où $v(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)|_{t=0}$ et $\tau(\varphi) = tr_g \nabla d\varphi$ est le champ de tension de l'application φ.

Preuve : Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M et $\{\frac{d}{dt}\}$ base sur $(-\epsilon, \epsilon)$, alors $\{(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})\}$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale sur la variété produit $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, et on a le crochet de Lie $[(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})] = 0$, pour tout $i = 1, ..., m$, on a $d\phi(e_i, 0) = d\varphi(e_i)$ et $d\phi(0, \frac{d}{dt}) = v$. En effet, remarquons que

$$d\phi(e_i, 0) : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow TN \quad ,$$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i, 0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x) + d_0\phi_x(0) \qquad (\,formule\,de\,Leibniz\,) \\ &= d_x\phi_0(e_i|_x) \\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0|_x) + d_0\phi_x(\frac{d}{dt}|_{t=0}) \\ &= d\phi_x(\frac{d}{dt})_{|t=0} \\ &= v(x)\,, \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x, 0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x, t)$. Donc,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)_{|t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_i))v_g|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))v_g|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial}{\partial t}h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))|_{t=0}v_g \\ &= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))|_{t=0}v_g \\ &= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}d\phi(0, \frac{d}{dt}), d\phi(e_i, 0))|_{t=0}v_g \\ &= \int_D h(\nabla^{N}_{d\varphi(e_i)}v, d\varphi(e_i))v_g \\ &= \int_D h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v, d\varphi(e_i))v_g \end{aligned}$$

Soit $\omega(*) = h(v, d\varphi(*))$, 1-forme sur M, alors

$$\begin{aligned} div\,\omega &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i}e_i) \\ &= e_i(h(v, d\varphi(e_i)) - h(v, d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)) \\ &= h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v, d\varphi(e_i)) + h(v, \tau(\varphi))\,, \end{aligned}$$

et comme $\int_D div\,\omega\, v_g = 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)_{|t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))v_g$$

∎

Théorème 3.3.1. *Une application différentiable $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est harmonique si et seulement si $\tau(\varphi) = 0$.*

3.3.3 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 3.3.1. *Toute application constante $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est harmonique.*

Exemple 3.3.2. *Le seconde forme fondamentale de l'application identité, $\boldsymbol{Id}_M : (M, g) \longrightarrow (M, g)$ est nulle, c'est à dire $\boldsymbol{Id}_M$ est totalement géodésique, donc $\boldsymbol{Id}_M$ est harmonique.*

Exemple 3.3.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ et (e_i) une base orthonormée sur M on a*

$$\begin{aligned} \tau(f) &= tr_g \nabla df \\ &= \nabla df(e_i, e_i) \\ &= \nabla^f_{e_i} df(e_i) - df(\nabla^M_{e_i}e_i) \\ &= e_i(e_i(f)) - (\nabla^M_{e_i}e_i)(f) \\ &= g(\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\ &= div(grad\, f) \\ &= \triangle(f)\,. \end{aligned}$$

Exemple 3.3.4. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique g_0 et soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0)$ une application différentiable, $\varphi(x) = (\varphi^1(x), ..., \varphi^n(x))$. d'aprés la formule* **??** *et comme ${}^{\mathbb{R}^n}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, on a*

$$\tau(\varphi) = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial\varphi\gamma}{\partial x^k}\, \overset{M}{\Gamma^k_{ij}}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi\,,$$

c'est à dire,

$$\tau(\varphi) = (\triangle(\varphi^1), ..., \triangle(\varphi^n))\,,$$

d'où l'application φ est harmonique si et seulement si $\triangle(\varphi^\alpha) = 0$, $\alpha = 1, ..., n$, c'est à dire φ^α sont des fonctions harmoniques.

Exemple 3.3.5. *Soit $M =]a,b[$ un intervalle sur $\mathbb{R}$. Alors la courbe $\gamma :]a,b[\longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique si*

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} + ^N\Gamma^\alpha_{\beta\delta}\frac{d\gamma^\beta}{dt}\frac{d\gamma^\delta}{dt} = 0\,,$$

donc, γ est harmonque si et seulement si c'est une géodésique.

Exemple 3.3.6. *Soit S une surface dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et soit :*

$$\varphi : (\Omega, <,>_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, <,>_{\mathbb{R}^3}),$$

une paramétrisation locale de S, où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Supposons que :

$$\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2 = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2, \quad \Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

Alors, S est minimale si et seulement si φ est harmonique. En effet, notons :

$$N = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|}$$

le vecteur unitaire normal,

$$E = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2, \quad F = \Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad G = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2,$$

$$e = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad f = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad g = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

on obtient :

$$H = \frac{1}{2}\frac{e\,G + g\,E - 2f\,F}{E\,G - F^2}$$

la courbure moyenne de S. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tau(\varphi)\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} + \Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}\\
&= \Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} - \Big\langle\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2\\
&= 0,\\
\Big\langle\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tau(\varphi)\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\tau(\varphi)$ est normal à la surface S et on a :

$$H = \frac{e+g}{2E} = \frac{\langle N, \tau(\varphi)\rangle_{\mathbb{R}^3}}{2E}.$$

Exemple 3.3.7. *Soient N une variété Riemannienne et M une sous-variété de N.*
Si $i : M \hookrightarrow N$ est l'injection canonique, alors la sous-variété M est minimale si et seulement si i est harmonique. En effet, en utilisant la Remarque 3.1.3 *on a*

$$\nabla di = B\,,$$

d'où, $\tau(i) = H = traceB$.

Exemple 3.3.8. *Soient (M,g) et (N,h) des variétés Riemanniennes. Si $\varphi : M \longrightarrow N$ est un plongement régulier isométrique, c'est à dire, φ est un plongement régulier tel que pour tout $p \in M$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a*

$$g_p(X_p, Y_p) = h_{\varphi(p)}(d\varphi(X_p), d\varphi(Y_p))\,.$$

Alors, $\varphi(M)$ est une sous-variété de N, de plus $\varphi(M)$ est minimale si et seulement si l'application φ est harmonique.
En effet, si $\nabla^{\varphi(M)}$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique induite par h sur $\varphi(M)$, et B désigne la deuxième forme fondamentale de $\varphi(M)$ sur N, alors

$$\begin{aligned}
B(d\varphi(X), d\varphi(Y)) &= (\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y))^\perp \\
&= \nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y) - (\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y))^\top \\
&= \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi(M)}_{d\varphi(X)} d\varphi(Y) \\
&= \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla d\varphi(X,Y) \quad , \qquad X, Y \in \Gamma(TM)\,,
\end{aligned}$$

Soit (e_i) une base orthonormée locale sur M, comme l'application φ est isométrique, on a $(d\varphi(e_i))$ une base orthonormée sur $\varphi(M)$, d'où

$$\begin{aligned}
H &= traceB \qquad\qquad (\,courbure\,moyenne\,) \\
&= B(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\
&= \nabla d\varphi(e_i, e_i) \\
&= \tau(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.9. *Soit M une variété Riemannienne et g la métrique Riemannienne induite sur la sphère unité S^n par l'injection canonique $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $\varphi : M \longrightarrow S^n$ une application de classe C^∞, posons $\psi = i \circ \varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, alors φ et harmonique si et seulement si*

$$\tau(\psi) = -|d\psi|^2 \psi\,.$$

En effet, d'aprés la proposition 3.1.4 *on a*

$$\tau(\psi) = \tau(i \circ \varphi) = di(\tau(\varphi)) + tr\,\nabla di(d\varphi, d\varphi)\,,$$

donc , φ et harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= tr\,\nabla di(d\varphi, d\varphi) \\
&= \sum_{i=1}^m \nabla di(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\,,
\end{aligned}$$

où (e_i) *est une base orthonormée de* T_xM, $x \in M$, *en utilisant la formule 3.8 on obtient*

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= -\sum_{i=1}^{m} g(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\mathcal{N}_{\psi(x)} \qquad , \text{où} \quad \mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= -\sum_{i=1}^{m} |d\varphi(e_i)|^2 \psi(x) \qquad , (\mathcal{N}_{\psi(x)} = \psi(x)) \\
&= -|d\varphi|^2 \psi(x) \\
&= -|d\psi|^2 \psi(x)\,.
\end{aligned}$$

Remarque 3.3.1. *La composé de deux applications harmoniques n'est pas en générale une application harmonique. En particulier si* ϕ *est harmonique et si* ψ *et totalement géodésique c'est à dire* $(\nabla d\psi = 0)$, *alors* $\psi \circ \phi$ *et harmonique.*

Exemple 3.3.10. *Soit l'application,*

$$\begin{aligned}
\varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\
x &\longmapsto (x, 0)\,,
\end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi) &= (\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

et soit l'application,

$$\begin{aligned}
\psi : (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2) \\
(x, y) &\longmapsto x^2 - y^2\,,
\end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= \Delta(\psi) \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \psi}{dy^2} \\
&= 2 - 2 = 0\,,
\end{aligned}$$

alors les deux applications φ *et* ψ *sont harmoniques, mais remarquons que la composé,*

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2) \\
x &\longmapsto x^2\,,
\end{aligned}$$

est non harmonique, $\tau(\psi \circ \varphi) = 2$.

3.3.4 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion est introduit par P.Baird et J. Eells [1]

Définition 3.3.3. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variété riemanniennes et $\phi : M^m \to N^n$ une application C^∞, Le tenseur énergie-impulsion $S(\phi)$ associé à ϕ est un teneur de type $(0,2)$ sur M, défini par :*

$$S(\phi) = e(\phi)g - \phi^* h.$$

Lemme 3.3.1. *Soit $G = (g_{ij})_{ij}$ une matrice symétrique carré d'ordre m. Si $G^{-1} = (g^{ij})_{ij}$ désigne la matrice inverse de G, alors :*

$$\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}) = -g^{ia}g^{ib}$$

pour tout $i, j = 1, ..., m$.

Preuve : de l'égalité :

$$G^{-1}G = (g^{ij}).(g_{ij}) = Id$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}).(g_{ij}) &= -(g^{ij}).\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g_{ij}) \\ &= -(g^{ij}).\delta_{ab} \end{aligned} \tag{3.17}$$

où δ_{ab} désigne la matrice $(\delta_i^a \delta_j^b)_{ij}$. De la formule 3.17, on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}) &= -(g^{ij}).\delta_{ab}(g^{ij}) \\ &= -(g^{ia}g^{bj}) \\ &= -(g^{ia}g^{jb}) \end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.2. *Si $G = (g_{ij})_{ij}$ est une matrice symétrique carré d'ordre m, alors :*

$$\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(g_{ij})) = cofacteur(g_{ab})$$

Preuve : Si $A_i = (g_{i1}, ..., g_{im})^t$ désigne la ième colone de la matrice (g_{ij}), alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(g_{ij})) &= \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(A_1, ..., A_m)) \\ &= det(\frac{\partial}{\partial g_{ab}}A_1, ..., A_m)) + ... + det(A_1, ..., \frac{\partial}{\partial g_{ab}}A_m)) \\ &= det(A_1, ... \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(A_a), ..., A_m) \\ &= det(A_1, ..., (A_a^b), ..., A_m) \\ &= cofacteur(g_{ab}) \end{aligned}$$

où $A_a^b = (0, ..., 1, ..., 0)^t$. ■

Lemme 3.3.3. *Soent (M^m, g) une variété Riemannienne et $(g_u)_u \in \otimes^2 T^*M$ une variation régulière de la métrique g $(g_0 = g)$, alors :*

$$\delta g = \frac{\partial}{\partial u}(g_u)|_{u=0} \in \otimes^2 T^*M$$

En effet, localement on a :

$$g_u(x) = g_{ij}(u,x)dx^i \otimes dx^j$$

d'où

$$(\delta g)_{ij}(x) = \frac{\partial}{\partial u}(g_{ij}(u,x))|_{u=0} dx^i \otimes dx^j \in \otimes^2 T^*M$$

Proposition 3.3.2. *Soient $(\phi : M \to N$ une application C^∞ entre deux variétés Riemannienne (M^m, g) et (N^n, h). Si $(g_u)_u$ est une variation C^∞ de la métrique g sur un domaine compact M, alors la prmière variation d'énérgie de ϕ respectivement à la variation $(g_u)_u$ est donnée par :*

$$\frac{dE(\phi)}{du}|_{u=0} = \frac{1}{2}\int_M < S(\phi), \delta g > vg \tag{3.18}$$

où localement $S(\phi)_{ij} = e(\phi)g_{ij} - (\phi^*h)_{ij}$ et $< S(\phi), \delta g >= g^{ia}g^{jb}S(\phi)_{ij}\delta g_{ab}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{dE(\phi)}{du}|_{u=0} &= \int_M \frac{de(\phi)v_{g_u}}{du}|_{u=0} \\
&= \int_M (\frac{\partial e(\phi)v_{g_u}}{\partial g_{ab}})\delta g_{ab} \\
&= \int_M \frac{\partial e(\phi)}{\partial g_{ab}}\delta g_{ab} v_g + \int_M e(\phi)\frac{\partial v_g}{\partial g_{ab}}\delta g_{ab}
\end{aligned}$$

Utilisant le lemme 3.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(\phi)}{\partial g_{ab}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial g_{ab}}\phi^\alpha \phi^\beta h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}g^{ia}g^{jb}\phi_i^\alpha \phi_j^\beta h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}g^{ia}g^{jb}(\phi^*h)_{ij}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

De la formule $v_g = (det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1....dx^m$ et le lemme 3.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_g}{\partial g_{ab}} &= \frac{1}{2}(det(g_{ij}))^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(g_{ij}))dx^1....dx^m \\
&= \frac{1}{2}(det(g_{ij}))^{-1} cofacteur(g_{ab})(det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1....dx^m \\
&= \frac{1}{2} g^{ab}(det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1....dx^m \\
&= \frac{1}{2} g^{ab} v_g \\
&= \frac{1}{2} g^{ia} g^{jb} g_{ij} v_g \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

La preuve se termine par substitution des formules 3.19 et 3.20 dans 3.18. ∎

Théorème 3.3.2. *Soient* ($\phi : M^m \to N^n$ *une application* C^∞ *entre deux variétés Riemannienne* (M^m, g) *et* (N^n, h)*, alors :*

$$h(\tau(\phi), d\phi) = -div(S(\phi)). \qquad (3.21)$$

i.e : $\forall X \in (TM)$*, on a*

$$h(\tau(\phi), d\phi(X)) = -div(S(\phi))(X).$$

où

$$\begin{aligned}
div : \Gamma(T^*M \otimes T^*M) &\to \Gamma(T^*M) \\
\varrho &\mapsto div(\varrho) = trace(\nabla \varrho)
\end{aligned}$$

Preuve : Si $\{X_i\}_i$ (resp $\{e_i\}_i$) désigne une base locale (resp orthonormale), alors :

$$\begin{aligned}
div(S(\phi)) &= g^{ij} \Sigma^i (\nabla_{X_i}(S(\phi))(X_i) \\
&= \Sigma^i (\nabla_{e_i}(S(\phi))(e_i)
\end{aligned}$$

soit $x \in M$ et (e_i) une base locale orthonormale telle que $(\nabla_{e_i} e_j)_x = 0$, alors

$$\begin{aligned}
div(S(\phi)(e_j) &= \sum_i (\nabla_{e_i}(S(\phi))(e_i, e_j) \\
&= \sum_i (\nabla_{e_i}(S(\phi)(e_i, e_j)) - \sum_i (S(\phi)(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - \sum_i (S(\phi)(e_i, \nabla_{e_i} e_j) \\
&= \sum_i (\nabla_{e_i}(S(\phi)(e_i, e_j)) \\
&= \sum_i e_i(S(\phi)(e_i, e_j)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k} e_i(h(d\phi(e_k), d\phi(e_k))g(e_i, e_j)) - \sum_i e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k} e_i(h(d\phi(e_k), d\phi(e_k)))\delta_i^j - \sum_i e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k e_j(h(d\phi(e_k), d\phi(e_k))) - \sum_i e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\
&= \sum_k h(\nabla^\phi_{e_j} d\phi(e_k), d\phi(e_k) - \sum_i h(\nabla^\phi_{e_i} d\phi(e_i), d\phi(e_j)) - \sum_i h(d\phi(e_i, \nabla^\phi_{e_i} d\phi(e_j)) \\
&= -h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) + \sum_i h(\nabla^\phi_{e_j} d\phi(e_i), d\phi(e_i) - \sum_i h(d\phi(e_i, \nabla^\phi_{e_i} d\phi(e_j)) \\
&= -h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) \qquad (\nabla^\phi d\phi \text{ est symétrique}).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.3.1 (Loi de conservation)**.** *Le tenseur énergie impulsion d'une application harmonique $\phi : M \to N$ est de divergence nulle*

$$\tau(\phi) = 0 \Rightarrow divS(\phi) = 0$$

Corollaire 3.3.2. *Si $\phi : M \to N$ est une submersion sur un ensemble dense, alors ϕ est harmonique si et seulement si $divS(\phi)$ est nulle*

$$\tau(\phi) = 0 \Leftrightarrow divS(\phi) = 0$$

3.3.5 Métrique critique

Définition 3.3.4. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne compacte orienté. Une métrique Riemannienne critique est un point critique pour la functionnelle :*

$$H(g = \int_M |S_g|^2 v_g$$

où S_g désigne la courbure scalaire de (M, g) et v_g désigne l'élèment volume mesurer par g.

Localement, si on note par $(x_i)_{i=1}^m$ les coordonnées locale sur M et Ric^g_{ij} les coordonnées du tenseur de Ricci associé à g, alors g est une métrique critique, si et seulement si on a :

$$m\nabla_i\nabla_j S_g - mS_g Ric^g_{ij} - (\Delta S_g)g_{ij} + S_g^2 g_{ij} = 0 \tag{3.22}$$

(For more details, we can refer to [15] and [92])

3.4 Déformation conforme

3.4.1 Déformation conforme de la métrique de départ :

Proposition 3.4.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une appliction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g. Alors le champs de tension de φ associé à la nouvelle métrique $\widetilde{g}$ est donné par :*

$$\widetilde{\tau}(\varphi) = e^{-2\gamma}[\tau(\varphi) + (m-2)d\varphi(grad\gamma)] \tag{3.23}$$

Preuve : :
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une base orthonormale associeé à la métriqe g. Par définition du champ de tension (Définition 3.1.3), on a :

$$\widetilde{\tau}(\varphi) = \sum_i^m \{\nabla^{\varphi}_{\widetilde{e_i}} d\varphi(\widetilde{e_i}) - d\varphi(\widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i})\} = \sum_i^m \{\nabla^N_{d\varphi(\widetilde{e_i})} d\varphi(\widetilde{e_i}) - d\varphi(\widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i})\}. \tag{3.24}$$

où $\widetilde{e_i} = e^{-\gamma}e_i$, $i = 1, ..., n$, est une base orthonormée relativement à la métrique $\widetilde{g}$.

Calculons chaque terme de l'équation (3.24) :
1)On a

$$\widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i} = \ \widetilde{\nabla}_{e^{-\gamma}e_i} e^{-\gamma}e_i = e^{-2\gamma}[-e_i(\gamma)e_i + \widetilde{\nabla}^M_{e_i}e_i]. \tag{3.25}$$

D'aprés le Corollaire 1.5.1 (formule 1.27) on obtient :

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}^M_{e_i}e_i &= \nabla^M_{e_i}e_i + 2e_i(\gamma)e_i - g(e_i, e_i)grad(\gamma) \\ &= \nabla^M_{e_i}e_i + 2e_i(\gamma)e_i - grad(\gamma) \end{aligned} \tag{3.26}$$

En remplaçant (3.26) dans (3.25) nous obtenons :

$$\widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i} = e^{-2\gamma}[\nabla^M_{e_i}e_i + e_i(\gamma)e_i - grad(\gamma)]$$

$$\sum_i^m \widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i} = e^{-2\gamma}[\sum_i^m \nabla^M_{e_i}e_i + (1-m)grad(\gamma)]$$

d'où

$$\sum_i^m d\varphi(\widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i}) = e^{-2\gamma}[\sum_i^m d\varphi(\nabla^M_{e_i}e_i) + (1-m)d\varphi(grad\gamma)]. \tag{3.27}$$

2) On utilisant les propriétés de ∇^{φ}, on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla^{\varphi}_{\widetilde{e_i}} d\varphi(\widetilde{e_i}) &= e^{-2\gamma}\nabla^{\varphi}_{e_i} e^{-2\gamma} d\varphi(e_i) \\ &= e^{-2\gamma}[-e_i(\gamma)d\varphi(e_i) + \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i)]. \\ &= e^{-2\gamma}[-d\varphi(e_i(\gamma)e_i) + \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i)]\end{aligned} \tag{3.28}$$

d'où

$$\sum_{i}^{m} \nabla^{\varphi}_{\widetilde{e_i}} d\varphi(\widetilde{e_i}) = e^{-2\gamma}[\sum_{i}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(gard\gamma)]. \tag{3.29}$$

Remplaçons (3.29) et (3.27) dans l'égalité (3.24), nous obtenons :

$$\widetilde{\tau}(\varphi) = e^{-2\gamma}[\tau(\varphi) + (m-2)d\varphi(grad\gamma)]$$

■

Remarque 3.4.1. *Si la variété M est de dimension 2, alors toute application harmonique reste harmonique, par changement conforme de la métrique de départ.*

Exemples 3.4.1. *Soit $\mathbb{R}^3$ (resp $\mathbb{R}^2$), muni de la métrique euclidienne, et soit l'application φ définie par :*

$$\begin{array}{cccc}\varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & (\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3)\end{array},$$

en utilusant les coordonneés cylindriques dans $\mathbb{R}^3$, l'application φ s'écrit :

$$\begin{array}{cccccc}\varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta,x_3) & \longmapsto & (rcos\theta, rsin\theta, x_3) & \longmapsto & (\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3) = (r, x_3)\end{array},$$

donc

$$\varphi(r,\theta,x_3) = \varphi(rcos\theta, rsin\theta, x_3) = (r, x_3).$$

$$d_{(r,\theta,x_3)}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En coordonneés cylindriques, la métrique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$g_{\mathbb{R}^3} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dx_3^2$$

de base orthonormale :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad e_2 = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial\theta} \quad ; \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

tels que

$$[e_1, e_2] = -[e_1, e_2] = -\frac{1}{r}e_2 \quad ; \quad [e_i, e_j] = 0$$

pour tout $(i,j) \notin \{(1,2),(2,1)\}$

$\mathbb{R}^2$ *est muni de la métrique euclidienne :*

$$g_{\mathbb{R}^2} = dr^2 + dx_3^2,$$

de base orthonormale

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

De la formule de Kozul, on déduit :

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0 \quad ; \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1}{r} e_1 \quad ; \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0 \quad et \quad \nabla_{f_i} f_j = 0$$

pour tout $i,j = 1,2$.

De la formule du champ de tension, on obtient :

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}$$

donc φ *est une application non harmonique.*

Soit $\widetilde{g}_{\mathbb{R}^3} = e^{2\gamma} g_{\mathbb{R}^3}$ *, une déformation conforme de* $g_{\mathbb{R}^3}$*, où* $\gamma = \gamma(r)$ *dépend uniquement de* r.

D'aprés la formule (3.23) de la Proposition 3.4.1 on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}(\varphi) &= e^{-2\gamma}[\tau(\varphi) + (m-2)d\varphi(grad\gamma)] \\ &= e^{-2\gamma}[\frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r} + d\varphi(\gamma^{'}(r)\frac{\partial}{\partial r})] \\ &= e^{-2\gamma}(\frac{1}{r} + \gamma^{'}(r))\frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

avec $grad\gamma = \gamma^{'}(r)\frac{\partial}{\partial r}$.

Ainsi φ *est harmonique pour la métrique* $\widetilde{g}_{\mathbb{R}^3}$*, si et seulement si*

$$\gamma^{'}(r) = -\frac{1}{r},$$

ie

$$\gamma(r) = ln(\frac{cst}{r})$$

3.4.2 Déformation conforme de la métrique d'arriveé

Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés riemanniennes et $\widetilde{h} = e^{2\gamma} h$, une déformation conforme de la métrique d'arriveé h .

Proposition 3.4.2. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $\widetilde{h} = e^{2\gamma}h$ est une déformation conforme de la métrique h, alors :*

$$\widetilde{\nabla}^\varphi_X V = \nabla^\varphi_X V + X(\gamma\circ\varphi)V + V(\gamma)d\varphi(X) - h(d\varphi(X), V)[grad(\gamma)]o\varphi \tag{3.30}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$. Où $\widetilde{\nabla}^\varphi$ (resp ∇^φ) désigne la connexion du fibré inverse $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ relativement à la métrique $\widetilde{h}$ (resp h).

Preuve : Soient $\widetilde{X}, \widetilde{V} \in \Gamma(TN)$ tels que $\widetilde{X}\circ\varphi = d\varphi(X)$ et $\widetilde{V}\circ\varphi = V$. Des formules 2.7 et 1.27, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^\varphi_X V &= (\widetilde{\nabla}^N_{\widetilde{X}}\widetilde{V})\circ\varphi \\
&= [\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} + \widetilde{X}(\gamma)\widetilde{V} + \widetilde{V}(\gamma)\widetilde{X} - h(\widetilde{X},\widetilde{V})grad(\gamma)]\circ\varphi \\
&= \nabla^\varphi_X V + [\widetilde{X}(\gamma)\widetilde{V} + \widetilde{V}(\gamma)\widetilde{X} - h(\widetilde{X},\widetilde{V})grad(\gamma)]\circ\varphi \\
&= \nabla^\varphi_X V + d\varphi(X)(\gamma)V + V(\gamma)d\varphi(X) - h(d\varphi(X), V)[grad(\gamma)]\circ\varphi \\
&= \nabla^\varphi_X V + X(\gamma\circ\varphi)V + V(\gamma)d\varphi(X) - h(d\varphi(X), V)[grad(\gamma)]\circ\varphi
\end{aligned}$$

■

De la Proposition 3.4.2, on a :

Proposition 3.4.3. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $\widetilde{h} = e^{2\gamma}h$ est une déformation conforme de h, alors :*

$$\widetilde{\tau}(\varphi) = \tau(\varphi) + 2d\varphi(grad_M(\gamma o\varphi)) - |d\varphi|^2(grad_N(\gamma))o\varphi. \tag{3.31}$$

Preuve : Soit $(e_i)_{i=1,\dots m}$ une base orthonormée de (M, g), ona :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}(\varphi) &= trace_g\widetilde{\nabla}d\varphi \\
&= \sum_{i=1}^m \{\widetilde{\nabla}^\varphi_{e_i}d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i}e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^m \{\nabla^\varphi_{e_i}d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i}e_i)\} + \sum_{i=1}^m\{e_i(\gamma\circ\varphi)d\varphi(e_i) + d\varphi(e_i)(\gamma)d\varphi(e_i)\} \\
&\quad -\sum_{i=1}^m\{h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))[grad(\gamma)]o\varphi\} \\
&= \tau(\varphi) + \sum_{i=1}^m\{2e_i(\gamma\circ\varphi)d\varphi(e_i) + -h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))[grad(\gamma)]o\varphi\} \\
&= \tau(\varphi) + 2d\varphi(grad(\gamma\circ\varphi)) - |d\varphi|^2[grad(\gamma)]o\varphi\}
\end{aligned}$$

3.4.3 Applications conformes

Définition 3.4.1. *Soient* (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variété riemanniennes, une application* $\phi : M^m \to N^n$ *est dite conforme s'il existe une fonction* $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *de classe* C^∞ *telle que pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, on a :*

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y)$$

La fonction λ *est appelée fonction de dilatation associée à* ϕ*.*

Proposition 3.4.4. *Si* $\phi : M^m \to N^n$ *est une application conforme, alors :*

$$e(\phi) = \frac{1}{2} \mid d\phi \mid^2 = \frac{1}{2} m\lambda^2$$

Preuve : Soit (e_i) une base locale orthonormale, on a :

$$\begin{aligned} e(\phi) &= \frac{1}{2} \sum_i h(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \lambda^2 g(e_i, e_i) \\ &= \frac{m}{2} \lambda^2 \end{aligned}$$

■

Lemme 3.4.1. *Si* $\phi : M^m \to N^n$ *est une application conforme, alors :*

$$S(\phi) = \frac{(m-2)\lambda^2}{2} g$$

Preuve : Soit (e_i) une base locale orthonormale, on a :

$$\begin{aligned} S(\phi)(e_i, e_j) &= e(\phi) g(e_i, e_j) - h(d\phi(e_i), d\phi(e_j)) \\ &= \frac{1}{2} m\lambda^2 g(e_i, e_j) - \lambda^2 g(e_i, e_j)) \\ &= \Big(\frac{1}{2} m\lambda^2 - \lambda^2\Big) g(e_i, e_j)) \end{aligned}$$

■

Proposition 3.4.5. *Si* $\phi : M^m \to N^n$ *est une submersion conforme, alors le champ de tension est donné par :*

$$\tau(\phi) = (2 - m) d\phi(grad \ln \lambda)$$

Preuve :(version 1.)
Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point x, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$. Au point x, on a :

$$\begin{aligned} h\big(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\big) &= \sum_{i=1}^{n} h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ e_i\Big(h\big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\big)\Big) - h\big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j)\big)\Big\}. \end{aligned}$$

Puisque φ est conforme de dilatation λ et $\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j) = \nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_i)$, alors :

$$\begin{aligned} h\big(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ e_i(\lambda^2)\Big(g\big(e_i, e_j\big)\Big) - h\big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_i)\big)\Big\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ 2\lambda^2\Big(g\big(e_i(\ln\lambda)e_i, e_j\big)\Big) - \frac{1}{2} e_j(h\big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)\big))\Big\} \\ &= 2\lambda^2 g\big(\operatorname{grad}^M \ln\lambda), e_j\big) - n\lambda^2 e_j(\ln\lambda) \\ &= 2\lambda^2 g\big(\operatorname{grad}^M \ln\lambda), e_j\big) - n\lambda^2 g\big(\operatorname{grad}^M \ln\lambda), e_j\big) \\ &= (2-n)\lambda^2 g\big(\operatorname{grad}^M \ln\lambda), e_j\big) \\ &= (2-n)\, h\big(d\varphi(\operatorname{grad}^M \ln\lambda), d\varphi(e_j)\big). \end{aligned}$$

■

Preuve :(version 2.) Soit (e_i) une base locale orthonormale, du Théoréme 3.3.2, on a :

$$\begin{aligned} -h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) &= div(S(\phi))(e_j) \\ &= \sum_i (\nabla_{e_i} S(\phi))(e_i, e_j) \\ &= \sum_i e_i(S(\phi)(e_i, e_j)) \\ &= \sum_i e_i(\frac{(m-2)\lambda^2}{2} g(e_i, e_j)) \\ &= \sum_i \frac{(m-2)}{2} e_i(\lambda^2)\delta_i^j \\ &= \frac{(m-2)}{2} e_j(\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) &= \frac{(m-2)}{2} g(e_j, grad(\lambda^2)) \\
&= (m-2)\lambda g(e_j, grad(\lambda)) \\
&= (m-2)\lambda^2 g(e_j, \frac{grad(\lambda)}{\lambda}) \\
&= (m-2)\lambda^2 g(e_j, grad(ln\lambda)) \\
&= (m-2) h(d\phi(e_j), d\phi(grad(ln\lambda))) \\
&= h((m-2) d\phi(grad(ln\lambda)), d\phi(e_j))
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.4.1. *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une submersion conforme, alors ϕ est harmonique si et seulement si $n = 2$ ou la dilatation λ est constante.*

3.4.4 Application semi-conforme

Soit $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe C^∞, entre deux variétés riemanniennes. L'espace tangent au point $x \in M$ se décompose en somme directe :

$$T_x M = H_x \oplus V_x$$

d'un espace vertical $V_x = kerd\phi_x$ et d'un espace horizontal $H_x = V_x^\perp$ (complément orthogonal de V_x).
On note :

$$C_\phi = \{x \in M / d\phi_x \cong 0\} \tag{3.32}$$

L'ensemble des points critiques de ϕ.

$$\overline{M} = M \backslash C_\phi \tag{3.33}$$

Définition 3.4.2. *Supposons $m \geq n$, l'application $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ est dite semi-conforme si pour tout $x \in \overline{M}$,*

$$d\phi_{x/H_x} : H_x \to T_{\phi(x)} N$$

est une application linéaire surjective et conforme.
i.e : il existe une fonction $\lambda : \overline{M} \to \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $X, Y \in H_x$, on a

$$h(d_x\phi(X), d\phi_x(Y)) = \lambda^2(x) g(X, Y). \tag{3.34}$$

Remarques 3.4.1. *:*

- *Sur $\overline{M}$, on a : $\lambda^2 = \frac{1}{n}|d\phi|^2$.*
- *La fonction λ peut-être étendue d'une maniére régulière à M, en posant $\lambda_{/C_\phi} \equiv 0$.*
- *La fonction $\lambda : M \to \mathbb{R}_+$ est appelée fonction de dilatation de ϕ.*
- *Si $m < n$, alors la seule application semi-conforme est l'application constante $\phi = Cst$ ($\overline{M} = \emptyset$, $C_\phi = M$) puisque $d_x\phi$ ne peut pas être surjectve.*
  Par la suite, on cosidére dans le cas semi conforme $m \geq n$.

- *Si $C_\phi = \varnothing$, alors ϕ est dite conforme de dilatation λ.*

- *Si φ est semi-conforme, alors localement, on a :*

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} = \lambda^2 \left(h^{\alpha\beta} \circ \varphi\right) \tag{3.35}$$

pour tout $\alpha, \beta = 1, ..., n$.

Définition 3.4.3. *Soit $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application semi-conforme de dilatation λ, alors :*

- *ϕ est dite submersion semi-conforme, si $C_\phi = \emptyset$.*
- *ϕ est dite submersion riemannienne , si $C_\phi = \emptyset$ et $\lambda = \mathbf{1}_M$.*

Proposition 3.4.6. *Soient $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ et $\psi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$ deux applications semi-conformes de dilatations λ et μ respectivement, alors $\psi \circ \phi$ est semi-conforme de dilatation $\alpha_{\psi\circ\phi} = \lambda(x).\mu(\phi(x))$.*

Preuve : Remarquons que :

- $H_x^{\psi\circ\phi} \subset H_x^\phi$
- $d_{\phi(x)}\psi \circ d_x\phi$ est surjective sur $H_x^{\psi\circ\phi}$.

Soient $X, Y \in H_x^{\psi\circ\phi}$, on a :

$$\begin{aligned} k(d_x(\psi\circ\phi)(X), d_x(\psi\circ\phi)(Y)) &= k(d_{\phi(x)}\psi(d_x\phi(X)), d_{\phi(x)}\psi(d_x\phi(Y))) \\ &= \mu^2(\phi(x))h(d_x\phi(X), d_x\phi(Y)) \\ &= \mu^2(\phi(x)).\lambda^2(x)g_x(X,Y) \end{aligned}.$$

■

Proposition 3.4.7. *Soient $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application semi-conforme. Si $f \in C^\infty(N)$, alors :*

$$\Delta^M(f\circ\phi) = df(\tau(\phi)) + \lambda^2(\Delta^N f)\circ\phi \tag{3.36}$$

Preuve : :

Soients$\{e_i\}_{1\le i\le m}$ une base orthonormée sur M, et $\{f_i\}_{1\le i\le n}$ une base orthonormée sur N telles que

$$e_1, ..., e_n \in H_x \quad ; \quad e_{n+1}, ..., e_m \in V_x \quad ; \quad d\phi(e_i) = \lambda(f_i\circ\phi), (1 \le i \le n)$$

alors d'aprés la formule (3.6) de la Proposition 3.1.4, on a :

$$\Delta^M(f\circ\phi) = \tau(f\circ\phi) = df(\tau(\phi)) + Tr_g\nabla df(d\phi, d\phi),$$

Comme $\nabla df(d\phi, d\phi)$ est une forme vectoriel $C^\infty(M)$ bilinéaire. on obtient :

$$\begin{aligned} Tr_g \nabla df(d\phi, d\phi) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla df(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\nabla df(\lambda.f_i, \lambda.f_i)] \circ \phi \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 [\nabla df(f_i, f_i)] \circ \phi \\ &= \lambda^2.(\Delta^N f) \circ \phi, \end{aligned}.$$

■

3.4.5 Morphisme harmonique

Les morphismes hamoniques entre deux variétés riemanniennes sont des applications qui préservent l'harmonicité.

Définition 3.4.4. *soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux varietés reimanniennes de dimensions m et n respectivement. ϕ est dite morphisme harmonique si et seulement si, pour toute fonction harmonique*

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

où V est un ouvert de N tel que $\phi^{-1}(V) \neq \varnothing$, la fonction

$$f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est harmonique.

Théorème 3.4.1. ***(Caractérisation)***
Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors ϕ est un morphisme harmonique si et seulement si ϕ est harmonique et semi-conforme.

Voir le livre de Paul Baird [7].

Remarque 3.4.2. *D'aprés la formule (3.36) de la Proposition 3.4.7, $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme harmonique, si et seulement si, pour toute fonction harmonique $f \in C^\infty(N)$,on a :*

$$df(\tau(\phi)) = 0$$

Contrairement aux applications harmoniques, on a :

Proposition 3.4.8. *La composeé de deux morphismes harmoniques est un morphisme harmonique.*

Preuve : Soient $\phi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux morphisme harmoniques, alors si

$$f : W \subset P \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction harmonique telleque $\psi^{-1}(W) \neq \varnothing$ alors :

$$f \circ \psi : \psi^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est harmonique car ψ est morphisme harmonique. donc

$$f \circ \psi \circ \phi : (\psi \circ \phi)^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est harmonique car ϕ est morphisme harmonique ■

Théorème 3.4.2. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est un morphisme harmonique ;*
2. *φ est harmonique et semi-conforme ;*
3. *Pour toute fonction v définie sur un ouvert V de N tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit non vide,*

$$\Delta^M(v \circ \varphi) = \lambda^2 \, (\Delta^N v) \circ \varphi,$$

où λ est une fonction positive sur M.

Démonstration.

Lemme 3.4.2 ([115])**.** *Soit $y_0 \in N^n$, (y^γ) des coordonnées normales en y_0 et $\{C_\gamma, C_{\alpha\beta}\}^n_{\alpha,\beta,\gamma=1}$ des constantes avec $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$, $\sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha\alpha} = 0$. Il existe alors un voisinage V de y_0 dans N et une fonction harmonique $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :*

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = C_\alpha, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = C_{\alpha\beta}, \tag{3.37}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n$.

Supposons que $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme harmonique. Munissons les deux variétés différentiables M et N de coordonnées locales (x^i) et (y^α) respectivement, autour des point $x_0 \in M$ et $y_0 = \varphi(x_0)$ et supposons que (y^α) sont des coordonnées normales en y_0. D'après le lemme 3.4.2 il existe une fonction harmonique v telle que pour tous $\alpha, \beta = 1, ..., n$, on a :

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = c_{\alpha\beta}, \tag{3.38}$$

avec $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ et $\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha\alpha} = 0$.

La fonction $v \circ \varphi$ est harmonique dans un voisinage de x_0, d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^M(v \circ \varphi) \\ &= dv(\tau(\varphi)) + \mathrm{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &= \mathrm{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi), \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\nabla dv = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta. \tag{3.40}$$

D'après (3.39) et (3.40), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha,\beta} g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) c_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha\neq\beta} g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Puisque $\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha\alpha} = 0$, on déduit :

$$0 = \sum_{\alpha} g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1) c_{\alpha\alpha}. \tag{3.42}$$

D'après (3.41) et (3.42), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha} \Big[g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) - g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1) \Big] c_{\alpha\alpha} \\ &\quad + \sum_{\alpha\neq\beta} g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Soient $\alpha_0 \neq 1$, on pose

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1\,; \\ -1, & \text{si } \alpha = \beta = \alpha_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta \neq 1, \alpha_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

D'après (3.43), on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}) = g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1). \tag{3.44}$$

C'est-à-dire, pour tout $\alpha = 1, ..., n$, on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\alpha) = g(\operatorname{grad}^M \varphi^1, \operatorname{grad}^M \varphi^1). \tag{3.45}$$

Soit $\alpha_0 \neq \beta_0$ et soit :

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \alpha_0 \text{ et } \beta = \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \text{ ou } \beta \neq \beta_0\,; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

D'après (3.43), on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \operatorname{grad}^M \varphi^{\beta_0}) = 0. \tag{3.46}$$

C'est-à-dire, pour tous $\alpha \neq \beta = 1, ..., n$, on a :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) = 0. \tag{3.47}$$

des formules (3.45) et (3.47), on obtient :

$$g(\operatorname{grad}^M \varphi^\alpha, \operatorname{grad}^M \varphi^\beta) = \lambda^2 \, \delta_{\alpha\beta}, \tag{3.48}$$

pour tous $\alpha, \beta = 1, ..., n$, où $\lambda = |\operatorname{grad}^M \varphi^1|$. Ainsi, d'après (3.35) l'application φ est semi-conforme. Si $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞, définie sur un ouvert V de N, de la Proposition 3.4.7 on a :

$$\begin{aligned} \Delta^M(v \circ \varphi) &= dv(\tau(\varphi)) + \operatorname{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &= dv(\tau(\phi)) + \lambda^2(\Delta^N v) \circ \phi \end{aligned} \tag{3.49}$$

Tenant compte que φ est un morphisme harmonique, de la formule (3.49), on déduit $\tau(\varphi) = 0$ c'est-à-dire l'application φ est harmonique, d'où (1) $\Longrightarrow$ (2). D'après la formule (3.49) on a (2) $\Longrightarrow$ (3). Enfin (3) $\Longrightarrow$ (1). $\square$

3.4.6 Application de Hopf

Soit l'application de Hopf, définie en fonction de sa paramétrisation :

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{\phi} : S^3 \subset \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\
(cos(s)e^{ia}, sin(s)e^{ib}) & \mapsto & (cos(\alpha(s)), sin(\alpha(s))e^{i\psi(a,b)}) \\
\varphi_1 \uparrow & & \uparrow \varphi_2 \\
\phi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
(s,a,b) & \longmapsto & (\alpha(s), \psi(a,b))
\end{array}$$

notée en abrégé

$$\begin{array}{rcl}
\phi : S^3 & \longrightarrow & S^2 \\
(s,a,b) & \longmapsto & (\alpha(s), \psi(a,b))
\end{array}$$

où $\psi(a,b) = ka + lb$ et $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, \pi]$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$.

Soient :

$$g_{S^3} = ds^2 + cos^2 s\, da^2 + sin^2 s\, db^2$$

la métrique Riemannienne sur S^3 obtenue par lamatrice ${}^tD_{(s,a,b)}\varphi_1.D_{(s,a,b)}\varphi_1$.

$$h_{S^2} = d\alpha^2 + sin^2\alpha\, d\psi^2$$

la métrique Riemannienne sur S^2 obtenue par lamatrice ${}^tD_{(\alpha,\psi)}\varphi_2.D_{(\alpha,\psi)}\varphi_2$.

a) Calcul du champ de tension $\tau(\phi)$

On a :

- $\{ e_1 = \frac{\partial}{\partial s} , e_2 = \frac{1}{cos\, s}\frac{\partial}{\partial a} , e_3 = \frac{1}{sins}\frac{\partial}{\partial b} \}$ est une base orthonormée sur S^3.
- $\{ f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} , f_2 = \frac{1}{sin\alpha}\frac{\partial}{\partial \psi} \}$ est une base orthonormée sur S^2.
- $d\phi = \begin{pmatrix} \alpha'(s) & 0 & 0 \\ 0 & k & l \end{pmatrix}$, relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b})$ sur S^3, (resp $(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \psi})$ sur S^2).
- $d\phi(e_1) = \alpha'(s)\frac{\partial}{\partial \alpha} = \alpha'(s) f_1$
- $d\phi(e_2) = \frac{k}{cos(s)}\frac{\partial}{\partial \psi} = k\frac{sin(\alpha)}{cos(s)} f_2$
- $d\phi(e_3) = \frac{l}{sin(s)}\frac{\partial}{\partial \psi} = l\frac{sin(\alpha)}{sin(s)} f_2$
- $\nabla_{e_1} e_1 = 0$

- $\nabla_{e_2} e_2 = tan(s)\frac{\partial}{\partial s} = tan(s)e_1$
- $\nabla_{e_3} e_3 = -cot(s)\frac{\partial}{\partial s} = -cot(s)e_1$
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\alpha}} \frac{\partial}{\partial\alpha} = 0$
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\psi}} \frac{\partial}{\partial\psi} = -sin(\alpha)\, cos(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}.$
- $\nabla^{\phi}_{e_1} d\phi(e_1) = \alpha'' \frac{\partial}{\partial\alpha}$
- $\nabla^{\phi}_{e_2} d\phi(e_2) = -\frac{k^2 sin\alpha\, cos\alpha}{cos^2 s}\frac{\partial}{\partial\alpha}$
- $\nabla^{\phi}_{e_3} d\phi(e_3) = -\frac{l^2 sin(\alpha)\, cos(\alpha)}{cos^2(s)}\frac{\partial}{\partial\alpha}$

  où $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$.

Par définition, on a :

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{3}\{\, \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\,\} = \sum_{i=1}^{3}\{\, \nabla^{S^2}_{d\phi(e_i)} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla^{S^3}_{e_i} e_i)\,\},$$

il suit que :

$$\tau(\phi) = \Big(\alpha''(s) + \alpha'(s)(cot(s) - tan(s)) - sin(\alpha)\, cos(\alpha)(\frac{k^2}{cos^2(s)} + \frac{l^2}{sin^2(s)})\Big)\frac{\partial}{\partial\alpha} \tag{3.50}$$

b) Condition de semi-conformalité de ϕ :

on a :

1) $d\phi$ est surjective si et seulement si $\alpha'(s) \neq 0$ et $(k, l) \neq (0, 0)$.

2)$(u, v, w) \in V_{(s,a,b)} = Kerd_{(s,a,b)}\phi \Leftrightarrow u = 0 \quad et \quad kv + lw = 0$

d'où : $\quad V_{(s,a,b)} =< (0, -l, k) >$

3)$(u, v, w) \in H_{(s,a,b)} \quad \Leftrightarrow \quad g((u, v, w), (0, -l, k)) = -lv\cos^2(s) + kw\sin^2(s) = 0$

d'où : $\quad H_{(s,a,b)} =< (1, 0, 0), (0, k\sin^2(s), l\cos^2(s)) >=< (e_1, \overline{e}) >$

tel que :

- $\overline{e} = k\sin^2(s)\frac{\partial}{\partial a} + l\cos^2(s)\frac{\partial}{\partial b} = k\sin^2(s)\cos(s)e_2 + l\cos^2(s)\sin(s)e_3.$

- $d\phi(\overline{e}) = (k^2\sin^2(s) + l^2\cos^2(s))\frac{\partial}{\partial\psi} = \sin(\alpha(s))(k^2\sin^2(s) + l^2\cos^2(s))f_2$

4) Utilisant la formule (3.34) de la Définition 3.4.2, on obtient

$$\begin{aligned}
h(d\phi(e_1), d\phi(e_1)) &= (\alpha'(s))^2 \\
&= \lambda^2 g(e_1, e_1) \\
&= \lambda^2 \\
h(d\phi(\overline{e}), d\phi(\overline{e})) &= [\sin(\alpha(s))]^2 [k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)]^2 \\
&= \lambda^2 g(\overline{e}, \overline{e}) \\
&= \lambda^2 [k^2 \sin^4 \cos^2(s) + l^2 \cos^4 \sin^2(s)] \\
&= \lambda^2 \sin^2 \cos^2 [k^2 \sin^2 + l^2 \cos^2]
\end{aligned}$$

d'où :

$$(\alpha'(s))^2 = \lambda(s)^2 = \frac{[\sin(\alpha(s))]^2}{\sin^2 \cos^2}[k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)] \tag{3.51}$$

De la formule (3.51), on obtient :

$$\alpha^{'}(s) = \frac{\sin \alpha(s)}{\sin s . \cos s} . \beta(s),$$

avec $\beta(s) = \sqrt{k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)}$.

c) Condition d'harmonicité de ϕ

En dérivant $\alpha^{'}(s)$ on déduit que la condition de semi-conformalité se traduit par l'équation :

$$\begin{aligned}
\alpha^{''}(s) &= \frac{\sin \alpha(s)}{\sin(s).\cos(s)} . \beta'(s) + [\frac{\sin \alpha(s)}{\sin(s).\cos(s)}]' . \beta(s) \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + [\frac{\alpha'(s) \cos \alpha(s)}{\sin s . \cos s} - \frac{\sin \alpha(s)(\cos^2(s) - \sin^2(s))}{\sin^2(s).\cos^2(s)}] . \beta(s) \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \frac{\alpha'(s)\beta(s) \cos \alpha(s)}{\sin(s).\cos(s)} - \frac{\sin \alpha(s)\beta(s)(\cos^2(s) - \sin^2(s))}{\sin^2(s).\cos^2(s)} \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \frac{\beta^2(s) \cos \alpha(s) \sin \alpha(s)}{\sin^2(s).\cos^2(s)} - \frac{\alpha'(s)(\cos^2(s) - \sin^2(s))}{\sin(s).\cos(s)} \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \cos \alpha(s) \sin \alpha(s) (\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s}) - \alpha^{'}(s)(\cot(s) - \tan(s))
\end{aligned}$$

ainsi

$$\alpha^{''}(s) = (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \cos \alpha(s) \sin \alpha(s) (\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s}) - \alpha^{'}(s)(\cot(s) - \tan(s)) \tag{3.52}$$

Substituant(3.52) dans l'expression de $\tau(\phi)$, donneé par la formule (3.50), on déduit :

$$\tau(\phi) = \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} (k^2 - l^2) . \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.53}$$

Conclusion :
• Si $|k| = |l|$, alors ϕ est un morphisme harmonique.
• Si $|k| \neq |l|$, alors ϕ n'est pas un morphisme harmonique .

■

3.5 Applications biharmoniques

Soit $M = (M^m, g)$ et $N = (N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes, et soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. La bienergie de l'application φ sur un domaine compact D dans M est définie par

$$E_2(\varphi, D) = \frac{1}{2}\int_D \mid \tau(\varphi) \mid^2 \upsilon_g$$

où $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de l'application φ et υ_g est la forme volume sur M associée à la métrique g.

Définition 3.5.1. *L'application $\varphi : M \longrightarrow N$ est dite biharmonique si*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0}$$

pour tout domaine compact D dans M et pour toute variation (φ_t) à support inclu dans D.

Proposition 3.5.1. ***(Première variation de la biénergie)**.*
Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable et $\{\varphi_t\}_{t\in I}, I =]-\epsilon, \epsilon[$, une variation de φ á support inclue dans D. Alors

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} = \int_D h(\upsilon, \tau_2(\varphi))\upsilon_g$$

où $\upsilon(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t \mid_{t=0}$ et

$$\tau_2(\varphi) = tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) + tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi$$

est le champ de bitension de l'application φ. Où, $tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) = \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)$ $tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)$ et R^N désigne le tenseur de courbure de la variété N.

Preuve : Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de φ à support inclu dans un domaine compact D de M, on a

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t))\upsilon_g$$

et pour tout $(x, t) \in M\times]-\epsilon, \epsilon[$, on a :

- $\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0))_{(x,t)} = \tau(\varphi_t)_x$

- $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}h(\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \quad & \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0))) \mid_{t=0} \\ &= h(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)))\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Abbassi M.T.K., Calvaruso G. and Perrone D., Harmonic sections of tangent bundles equipped with Riemannian g-natural metrics, Quarterly Journal of Mathematics - QUART J MATH , vol. 61, no. 3 (2010).

[2] ABBASSI M. T. K. and SARIH M., On Natural Metrics on Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)Tomus 41 (2005), 71 - 92.

[3] Aghasi ., Dodson C.T.J., Galanis G.N. and Suri A., Infinite dimensional second order differential equations via T^2M. Nonlinear Analysis-theory Methods and Applications, vol. 67, no. 10 (2007), pp. 2829-2838.

[4] Antonelli P.L., and Anastasiei M., The Differential Geometry of Lagrangians which Generate Sprays, Dordrecht : Kluwer, 1996.

[5] Antonelli P.L., Ingarden R. S., and Matsumoto M. S., The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology , Dordrecht : Kluwer, 1993.

[6] M. Ara, Geometry of F-harmonic maps, Kodai Math. J. 22 (1999), 243.263.

[7] P.Baird ,Harmonic maps between Riemannain manifolds. Clarendon Press Oxford 2003.

[8] P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, *Conformal and semi-conformal biharmonic maps*, Annals of global analysis and geometry, Vol 34, (2008),403-414.

[9] P. Baird, J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds,Clarendon Press Oxford 2003.

[10] A. Balmus, S. Montaldo and C. Onicius, Biharmonic maps between warped product manifolds. J.Geom.Phys. 57(2007),no. 2, 449-466.

[11] C.L Bejan M.Benyounes Harmonic φ Morphisms Volume 44 (2003),No.2.309-321.

[12] C.L Bejan and T.Q. Binh, Harmonic maps and morphisms from the tangent bundle, Acta Sci. Math (Szeged) 66 (2000) no 1-2, 385 - 401

[13] V. Bérard, Les applications conforme-harmoniques., Université de Strasbourg. C.N.R.S (2010).

[14] V. Bérard, Les applications conforme-harmoniques., Canad. J. Math. 65 (2013), 266-298

[15] M. Berger, Quelque formules de variation pour une structure Riemannain, Ann. Sci. Ecole Sup. 4^e series 3,285-294(1970).

[16] R.L.Bishop R. L. and B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc., 145, (1969), 1-49

[17] Boeckx E. and Vanhecke L., Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles, Differential Geometry and its Applications Volume 13, Issue 1, July 2000, Pages 77-93.

[18] A. Boulal, N.E.H. Djaa, M. Djaa and S. Ouakkas, Harmonic maps on generalized warped product manifolds, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 4 Issue 1(2012) pages 156-165 .

[19] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc., Biharmonic submanifolds of S^3, Int. J.Math., 12(2001), 867-876.

[20] O. Calin and D. Chen Chang, Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds Applications to Partial Differential Equations, ľ2005 Birkhäuser Boston

[21] D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon and M. Herzlich, On the Kato inequality in Riemannian geoemetry. Séeminaires and Congrès, Société Mathématiques de France 2000.4(2000), p. 95Ű113

[22] C.Carathéodory, calculus of variations and partial défferential equations of the first order, vol. I and II, Holden Day, San Francisco, 1967 (first edition in German Teubner, Berlin (1935).

[23] Calvaruso G., Naturally Harmonic Vector Fields, Note di Matematica, Note Mat. 1(2008), suppl. n. 1, 107-130

[24] Cheeger J. and Gromoll D., On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math. 96, 413-443, (1972).

[25] Cengiz, N., Salimov, A.A. : Diagonal lift in the tensor bundle and its applications. Appl. Math. Comput. 142, no. 2-3, 309-319 (2003).

[26] , B.Y. Chen, Geometry of warped products as Riemannain subamnifolds and related problems, Soochow Journal of Mathematics.Volume 28, No. 2, pp. 125-156, April 2002.

[27] B.Y. Chen, Geometry of submanifolds and its applications. Science University of Tokyo, Tokyo, 1981. bibitemB.CheChen B.Y., Geometry of submanifolds, Marcel Dekker Inc., New York, 1983.

[28] Chen Li and Chen Wenyi,Gradient estimates for positive f-harmonique functions, Acta Mathematica Scientia 2010,30B(5) :1614-1618

[29] A. M. Cherif, Géométrie harmonique des variétés. Thèse de Doctorat en sciences, Université d'Oran 2014.

[30] A. M. Cherif, H. Elhendi And M. Terbeche, on generalized conformal maps, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 4 Issue 4 (2012), 99-108.

[31] A. M. Cherif and M. Djaa, On generaized f-harmonic morphisms, Coment. Math. Univ. Carolin. 55,1 (2014) pp 17-27.

[32] A.M. Cherif and M. Djaa, Geometry of energy and bienergy variations between Riemannian manifolds, Kyungpook Mathematical Journal, (to appear) (2015).

[33] Y.J. Chiang, f-biharmonic Maps between Riemannian Manifolds, Doepartment of Mathematics, University of Mary Washington Fredericksburg, VA 22401, USA 2012.

[34] Cieslinski J., Sym A. and Wesselius W., On the Geometry of the Inhomogeneous Heisenberg Ferromagnet Model : non-integrable case, J. Phys. A. Math. Gen. 26 (1993), 1353-1364.

[35] Course, .N, f-harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target ; New York Journal of Mathematics. 13, (2007), 423-435.

[36] M. Dajczer, Submanifolds and isometric immersion,Volume 13 de Mathematics lecture series. Publish or Perish, Incorporated, 1990.

[37] M.H. Dida, Holonomie des métriques naturelles sur le fibré tangent, Doctorat en Sciences, Université Djilali Liabes Sidi Bel Abbes 03-07-2010.

[38] H.M. Dida, F. Hathout, M. Djaa, On the Geometry of the Second Order Tangent Bundle with the Diagonal Lift Metric, International Journal of Mathematical Analysis 2009 ; Vol. 3, 2009,

[39] M. Djaa, Introduction à la Géométrie Riemannienne Et L'Analyse Harmonique sur les variétés (Master - Doctorat) Centre Universitaire de Relizane(2015).

[40] M. Djaa and J. Gancarzewicz, The geometry of tangent bundles of order r . 1985 , Boletin Academia , Galega de Ciencias ,Espagne, Vol 4, p 147-165

[41] M. Djaa, Prolongation des structures géométriques au fibré tangent d'ordre supérieur et Classification spectrale des opérateurs de multiplications, Thèse de doctorat d'état, Université d'Oran 1998.

[42] M. Djaa, H. Elhendi and S. Ouakkas, On the Biharmonic Vector Fields. Turk.J. Math, Vol 35,(2011)

[43] M. Djaa and A. M. Cherif, On Generalized f-biharmonic Maps and Stress f-bienergy Tensor. Journal of Geometry and Symmetry in Physics JGSP 29(2013), pp. 65-81.

[44] A. M. Cherif and M. Djaa, On generaized f-harmonic morphisms, Co-ment. Math. Univ. Carolin. 55,1 (2014) pp 17-27.

[45] M. Djaa, A. M. Cherif, K. Zegga And S. Ouakkas, on the generalized of harmonic and bi-harmonic maps, international electronic journal of geometry, volume 5 no. 1 pp. 1-11 (2012).

[46] N.E.H. Djaa, A. Boulal and A. Zagane, Generalized Warped Product Manifolds And Biharmonic Maps. Acta Math. Univ. Comenianae. Vol. LXXXI, 2 (2012), pp. 283-298.

[47] M. Djaa, N.E.H. Djaa and R. Nasri, Natural Metrics on T2M and Harmonicity, International Electronic Journal of Geometry Volume 6 No.1 pp. 100-111 (2013) .

[48] N.E.H. Djaa and M. Djaa, Generalized Warped Product Manifold and Critical Riemannian Metric, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis Vol 28 (2012).

[49] N.E.H. Djaa, S. Ouakkas, M. Djaa, Harmonic sections on the tangent bundle of order two. Annales Mathematicae et Informaticae 38(2011) pp 15-25.

[50] M. Djaa, M. Elhendi, S. Ouakkas, On the Biharmonic Vector Fields. Turkish Journal of Mathematics. 36(2012) pp 463-474.

[51] M. Djaa, Prolongation des structures géométriques au fibré tangent d'ordre supérieur et Classification spectrale des opérateurs de multiplications, Thèse de doctorat d'état, Université d'Oran 1998.

[52] F. Dobarro and E. Lami Dozo, Scalar curvature and warped products of Riemann manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 161-168.

[53] F. Dobarro and B. Unal, About curvature, conformal metrics and warped products, Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical Volume 40 Number 46 2007 .

[54] P.Dombrowski ,On the Geometry of Tangent Bundle ,J.Rrine Angew .Math.210 (1962),70-80.

[55] Duggal K. L., Constant scalar curvature and warped product globally null manifolds, J. Geom. Phys., 43, (2002), 327-340.

[56] J. Eells, p-Harmonic and exponentially harmonic maps, lecture given at Leeds University, June 1993.

[57] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Maths. 86(1964).

[58] J. Eells et L. Lemaire, *A report on harmonic maps*,Bull. London Math. Soc. 16 (1978), 1-68.

[59] J. Eells et L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.

[60] H. Elhendi,Applications Harmonique et Biharmonique sur Le fibré tangent. Memoire de Magister, Université de Mascara 2010.

[61] B. Fuglede, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978) 107-144

[62] Gezer A., On the Tangent Bundle With Deformed Sasaki Metric. International Electronic Journal of Geometry Volume 6 No. 2 pp. 19-31 (2013).

[63] S. Gudmundsson, the geometry of harmonic morphisms, University of Leeds,Department of Pure Mathematics, April 1992.

[64] S.Gudmundson and E. Kappos, on the Geometry of Tangent Bundles, Expo.Math .20(2002),1-41.

[65] C. Godbillon, Géométrie différentielle et mécanique analytique collection Hermann. Paris (1968).

[66] F. Hathout, Sur Les Métriques Naturelles sur le Fibré Tangent et Signature de Feuilletage et Applications ; Thèse de doctorat. Université Djilali Liabes Sidi Bel Abbes 2008.

[67] F. Hathout, M.H. Dida Diagonal Lift in the Tangent Bundle of Order Two and its Applications, TUBITAK,Turk J Math, 30 (2006), 373-384.

[68] R. S. Hamilton. The formation of singularities in the ricci flow. Surveys in Diff. Geom. 27-136, 1995.

[69] R. S. Hamilton, Harmonic Maps of Manifolds with boundary, Lect. Notes in Math. 471, Springer-Verlag, 1975.

[70] E. Hebey, Nonlinear Analysis on Manifolds, Sobolev Spaces and Inequalities ; Reprinted by the American Mathematical Society,(2000).

[71] M. Herzlich, Refined Kato inequality in Riemannian geoemetry, Journées Equations aux dérivées partielle. Nantes 5-9 juin 2000.

[72] T. Ishihara, Harmonic sections of tangent bundles. J. Math. Tokushima Univ. 13 (1979), 23-27.

[73] G.Y. Jiang, Harmonic maps and their first and second variational formulas. Chinese Ann.Math. Ser. A. 7, 389-402 (1986).

[74] E.Kappos, Natural metrics on tangent bundles, Master's thesis 2001.

[75] B. H. Kim, Warped products with critical Riemannian metric, Proc. Japan Acad, 71, ser. A 117-118(1995)

[76] S.Kobayashi and K.Nomizu,Fondation of Differential Geometry ,vol.I,II.Intersciense ,New York-London 1963.

[77] J.Konderak, On harmonic vector fields, Publication Matemàtiques,Vol 36(1992),217-288.

[78] Kowalski O. and Sekizawa M., On Riemannian Geometry Of Tangent Sphere Bundles With Arbitrary Constant Radius. Archivum Mathematicum (BRNO).Tomus 44 (2008), 391-401

[79] J.M. Lee, Differentiel Geometry Analysis and physics, Universitext (2000).

[80] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variťetťes kĺahleriennes, Symposia Mathematica, Vol. III , Academic Press, London, 1968/1969, pp. 341Ű402.

[81] E. Loubeau, S. Montaldo, And C. Oniciuc, the stress-energy tensor for biharmonic maps, arXiv :math/0602021v1 [math.DG] 1 Feb 2006.

[82] E.Loubeau and C.Oniciuc. On the biharmonic and harmonic indices of the hopf map, Transaction of the American Mathematical Society, 359 (2007) , 5239-5256.

[83] Wei-jun Lu, f-Harmonic maps of doubly warped product manifolds , Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities , June 2013, Volume 28, Issue 2, pp 240-252 . Springer 2013

[84] Wei-jun Lu, On f-bi-harmonic maps between Riemannian manifolds,arXiv 2013.

[85] P. Malliavin, Géométrie differentielle intrinseque, Collection Enseignement des SClences, 14, Hermann Paris 1972.

[86] T. Masson, Géométrie Différentielle,Groupes et Algèbres de Lie ,Fibrés et Connexion. Version du 10 Novembere 2003.

[87] Merlin, X., Methodix algèbre, Ellipses (1999).

[88] P.W. Michor, Topic in Differentiel Geometry, The University of Vienna 2001.

[89] J. Milnor, Morse Theory, Ann. of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press,Princeton 1963.

[90] A. Morimoto, Liftings of tonsors fields and connection to tangant bundles of higher order Nogoya Math.jour,40(1970),99-120.

[91] E. Musso and F.Tricerri, Riemannian metrics on tangent bundles,Ann.Mat.Purz Appl.(4),150(1988),1-10.

[92] Y. Muto, Curvature and critical Riemannian metric, J. Math. Soc. Japan. Vol.26, Num 4, 686-697(1974).

[93] R. Nasri, M. Djaa. Sur la courbure des variétés riemanniennes produits. Université Mentouri, Constantine, Algérie, Sciences et Technologie $A-N°24$, Décember. (2006), pp. 15-20.

[94] R. Nasri and M. Djaa, "On the geometry of the product Riemannian with the Poisson structure" ; International Electronic Journal of Geometry, Volume 3 No. 2 pp. 1 - 14 (2010).

[95] B. O'Neill, Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press,New York, 1983.

[96] Ye-Lin Ou. On f-harmonic morphisms between Riemannian manifolds, arXiv : 1103.5687v1, 2011

[97] C. Oniciuc, Nonlinear connections on tangent bundle and harmonicity. Ital. J. Pure Appl. No 6 (1999), 109-122.

[98] C. Oniciuc, Pseudo-Riemannian metrics on tangent bundle and harmonic problems, Bull. Belg. Soc. 7(2000), 443-454.

[99] V. Opriou, On Harmonic Maps Between Tangent Bundles. Rend.Sem.Mat, Vol 47, 1 (1989).

[100] Ouakkas, S., Nasri, R. and Djaa, M., On the f-harmonic and f-biharmonic maps, JP Journal of Geometry and Topology, Volume 10, Number 1, 2010, Pages 11-27 Mars 2010.

[101] Ouakkas, S., Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geometry and its Applications,26 (2008), 495-502.

[102] S. Ouakkas,Géométrie conforme associée aux applications biharmoniques et Théorèmes de Liouville, Thèse de Doctorat, 2008, Université de Sidi Belabbes.

[103] P. Pansu . Géométrie différentielle, Cours DEA, Laboratoire de Mathťematique dŠOrsay . 27 octobre 2005

[104] F. Paulin, Géométrie différentielle élémentaire,Ecole Normale Supereiure, 2006-2007.

[105] P. Petersen ,Riemanniann Geometry (Second Edition),1-70.

[106] R. Ponge, H. Reckziegel. Twisted products in pseudo-Riemannian geometry. Geom. Dedicata 48(1993), no 1, 15-25.

[107] M. Rimoldi and G. Veronelli, f-Harmonic maps and Applications to Gradient Ricci Solitons, Institut Élie Cartan Université de Lorraine ; Journées Nancéiennes de Géométrie 17 et 18 janvier 2012.

[108] Salimov, A., Gezer, A., Akbulut, K., *Geodesics of Sasakian metrics on tensor bundles*, Mediterr. J. Math. **6**, no.2, 135-147 (2009).

[109] A.A. Salimov and S. Kazimova, *Geodesics of the Cheeger-Gromoll Metric*, Turk J Math **33** (2009) , 99 - 105.

[110] A.A. Salimov and A. Gezer, On the geometry of the (1, 1)-tensor bundle with Sasaki type metric. Chinese Annals of Mathematics, Series B May 2011, Volume 32, Issue 3, pp 369-386.

[111] A. A. Salimov, F. Agca, Some Properties of Sasakian Metrics in Cotangent Bundles. Mediterranean Journal of Mathematics ; 8(2) (2011). 243-255.

[112] Sasaki, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifoldsII, Tohoku Math. J. 14 (1962), 146-155.

[113] Sekizawa M., Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric, TokyoJ. Math. 14, No. 2 (1991), 407-417.

[114] Shuxiang Feng and Yingbo Han Liouville Type Theorems of f-Harmonic Maps with Potential - Results in Mathematics January 2014. Springer Basel.

[115] M. Svensson, Polynomyial Harmonic Morphisms ,Examensarbete 20 poäng Lunds Universitet Noveembre 1998.

[116] K. yano and S.Ishihara , Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker.Inc. New York 1973.

[117] K. Yano and S.Ishihara, Horizontal lifts of tonsors fields and connexion to the tangent bundles. j.Math.Mech. 16(1967), 1015-1030.

[118] Wu HX, Chen W H. Topics of Riemannian Geometry. Beijing : Beijing University Press,1993.

[119] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), pp. 201-228.

[120] Yingbo Han and Shuxiang Feng, Some result of f-biharmonic maps, Acta Mathematica Universitatis Comeniane, In press 2014.

[121] K. Zegga, M. Djaa and A.M. Cherif, On the f-biharmonic maps and submanifolds, Kyungpook Mathematical Journal, 55 (2015), pp 157-168

Mustapha DJAA, Professeur en mathématiques au centre universitaire Ahmed Zabana Relizane. Spécialiste en Géométrie, Analyse globale et Théorie spectrale. Directeur du laboratoire Géométrie Analyse Contrôle et Application à l'université Ahmed Medeghri Saida 2000-2011. Directeur du laboratoire Gestion des marchés financiers par l'application des mathématiques et l'informatique 20012-2017. Responsable du domaine mathématiques et informatique 2013-2017. Auteur de plusieurs publications internationales en géométrie, analyse et théorie spectrale. Auteur de l'Algèbre générale et Mesure et intégration publiés par l'office national des publications universitaires.