CHAPITRE 2

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente les notions de convergence simple et uniforme, l'interprétation graphique de la convergence uniforme, le Critère de Cauchy pour la convergence uniforme, et on donne les propriétés des suites et séries de fonctions uniformément convergentes.

Objectifs du chapitre

- Maitriser les différents types de convergences d'une suite ou d'une série de fonctions.
- Étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite.

2.2 Suites de fonctions

2.2.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

2.1 Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On appelle une suite de fonction sur E dans $\mathbb{K}$, la donnée d'une famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{array}{rccl} f_n: & E & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & f_n(x). \end{array}$$

2.2 Définition

Ont dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $D \subset E$ vers une fonctions f si pour tout x de D

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

c'est à dire

$$\forall x \in D, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

L'ensemble des points $x \in D$ tels que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge est appelé domaine de convergence simple, noté

$$D = \{x \in E/(f_n(x))_n \text{ converge}\}.$$

On appelle la fonction $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.1 Proposition

Si la limite simple d'une suite de fonctions existe alors elle est unique.

Démonstration.

Ceci est une conséquence immédiate de l'unicité de la limite d'une suite de nombres réels. $\square$

Exemple 2.1.

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} f_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

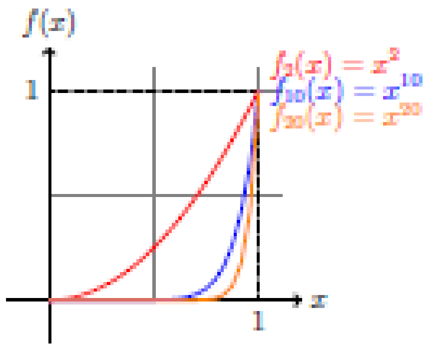

FIGURE 3.1. *Graphes des fonctions* f_2, f_{10} *et* f_{20}.

Soit $x \in [0, 1]$ *fixé, on a*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0, 1[, \\ 1 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $[0, 1]$ *vers la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0, 1[, \\ 1 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

2. *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction définie par*

$$g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \end{array}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

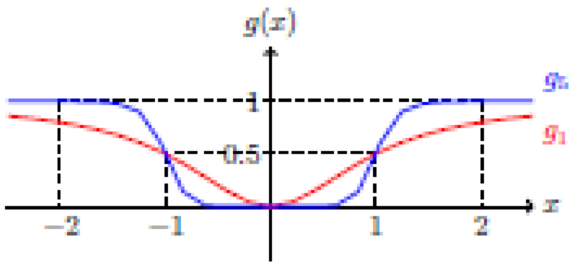

FIGURE 3.2. *Graphes des fonctions* g_1 *et* g_5.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} +\infty & si \quad |x| > 1, \\ 1 & si \quad x = \pm 1, \\ 0 & si \quad |x| < 1, \end{cases}$$

on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| > 1, \\ \frac{1}{2} & si \quad x = \pm 1, \\ 0 & si \quad |x| < 1. \end{cases}$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* g *définie par*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| > 1, \\ \frac{1}{2} & si \quad x = \pm 1, \\ 0 & si \quad |x| < 1. \end{cases}$$

3. *Soit* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction définie par*

$$\begin{array}{rccc} h_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n + (1-x)^n \end{array}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

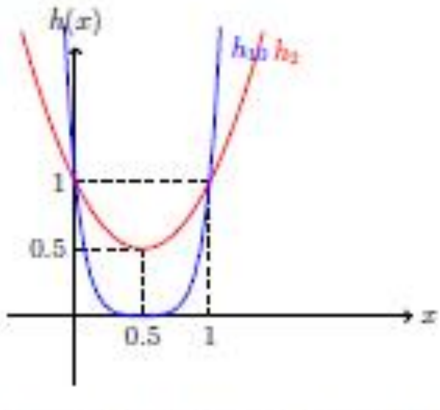

FIGURE 3.3. *Graphes des fonctions* h_2 *et* h_{10}.

Pour tout $x \in]0,1[$, $1-x$ appartient à $]0,1[$, les suites numériques x^n et $(1-x)^n$ tendent vers 0, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1, \end{cases}$$

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction h.

2.2.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

2.3 Définition

Ont dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0; \ \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que f est la limite uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2.1.

Dans la définition de la convergence simple n_0 dépend de x et ε mais pour la convergence uniforme il dépend uniquement de ε

2.1 Théorème

Si la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D,alors elle converge simplement vers f sur D.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction uniformément convergente vers f sur D,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0; \ \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

d'autre part

$$\forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$$

on déduit alors que

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f. □

Remarque 2.2.

La réciproque du théorème précédent est fausse.

Exemple 2.2.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1].$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1[, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

mais

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} x^n = 1 \underset{n \to \infty}{\nrightarrow} 0$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$.

Cependant, si pour tout réel $a \in]0, 1[$ on restreint les fonctions f_n sur le segment $[0, a] \subset [0, 1[$, on trouve que

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,a]} x^n = a^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, a]$

2.2.3 Interprétation graphique de la convergence uniforme

Si l'on trace les courbes représentatives des fonctions $f-\varepsilon$ et $f+\varepsilon$. Dire que la suite$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f revient à dire qu'à partir d'un certain rang la courbe de f_n est comprise entre les deux autres.

2.2 Théorème (Critère de Cauchy de la convergence uniforme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur $D\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur D si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\quad \forall p>q\geqslant n_0;\quad \forall x\in D,\quad |f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon.$$

Démonstration.

Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers f. Alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, on ait

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $p>q\geqslant n_0$ et tout $x\in D$, par l'inégalité triangulaire on obtient

$$|f_p(x)-f_q(x)|\leqslant|f_p(x)-f(x)|+|f_q(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

d'où

$$\sup_{x\in D}|f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon.$$

Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant q \geqslant n_0$, on a

$$\sup_{x\in D} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Pour tout $x \in D$ fixé

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon, \quad \forall p \geqslant q \geqslant n_0,$$

en laissant $q \to \infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\forall p \geqslant n_0, |f(x)_p - f(x)| < \varepsilon$$

où $x \in D$ et n_0 est indépendant de x,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. $\square$

Remarque 2.3.

Le critère de Cauchy nous permet d'étudier la convergence uniforme sans savoir la limite.

2.3 Propriétés des suites de fonctions uniformément convergente

Dans cette partie, nous allons donner les conditions suffisantes sous lesquelles la fonction limite f conserve certaines propriétés des fonctions f_n.

2.3 Théorème (continuité)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $D \subset \mathbb{R}$ continue et uniformément convergente vers la fonction f sur D, alors f est continue sur D.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément convergente sur D vers f,

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0; \quad \forall x \in D, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.1}$$

en particulier, on a

$$\forall x \in D, \quad |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.2}$$

Comme f_{n_0} est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ avec $|x - x_0| \leqslant \delta$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $x \in D$ avec $|x - x_0| \leqslant \delta$, moyennant (2.1) et (2.2) on trouve

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

f est continue en x_0. □

Remarque 2.4.

Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur D et sa limite f n'est pas continue sur D alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur D.

Exemple 2.3.

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'Exemple 2.1 ne converge pas uniformément vers h puisque les fonctions h_n sont toutes continues sur $[0,1]$ et h n'est pas continue sur $[0,1]$.

2.4 Théorème (intégration)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $E \subset \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ intégrable et uniformément convergente vers f. Alors, pour tout compact $[a,b] \subset E$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration.

Puisque la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[b,a]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

en intégrant sur $[a,b]$, on obtient l'inégalité suivante

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

ce qui achève la démonstration. □

2.5 Théorème (dérivation)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction telle que $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, supposons que

1. *f_n est de classe C^1 sur $[a,b]$.*
2. *$(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.*
3. *Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Alors

1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.*
2. *La limite de f_n est de classe C^1 sur $[a,b]$.*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = f'(x)$.

Démonstration.

On va développer la preuve du théorème en trois étapes élémentaires

1. Soit $x \in [a,b]$, on a

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $l = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x_0) - l + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x_0) - l| + \int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(x) - g(t)|\,\mathrm{d}t,$$

Comme $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction g sur $[a,b]$ et $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite noté l, on déduit que

$$\forall x \in [a,b],\ \forall \varepsilon > 0; \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_1; \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_2; \quad |f_n(x_0) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $x \in [a,b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 = \max(n_1, n_2)$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on obtient

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|x - x_0|}{2(b-a)},$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f.

2. On a $f(x) = l + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$, comme f_n' est continue et converge uniformément sur $[a,b]$ vers g, et d'après le théorème de continuité g est continue sur $[a,b]$, mais $f'(x) = g(x)$ alors f' est continue sur $[a,b]$, et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

3. Pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) = g(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'.$$

$\square$