2.4 Séries de fonctions

2.4.1 Définitions et propriétés

De facon analogue aux séries, les séries de fonctions sont définies à partir des suites de fonctions.

2.4 Définition

Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la somme partielle des $(n+1)$-premiers termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'expression*

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad \forall x \in E.$$

   On appelle cette somme suite des sommes partielles.

2. *On appelle série de fonctions de terme général f_n le couple des suites de fonctions $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$.*
   La série de fonctions est notée par $f_1 + f_2 + ... + f_n + ...$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

2.4.2 Convergence simple d'une série de fonctions

2.5 Définition

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur D si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D.

On appelle l'ensemble $D = \{x \in E/(S_n(x))_n \text{ converge}\}$ domaine de convergence simple de la série $\sum f_n$.
On suppose que la série $\sum f_n$ converge simplement sur D. On note, pour $x \in D$, $S(x)$ la limite $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ de sorte que

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in D.$$

La fonction S, définie sur D, est appelée la somme de la série $\sum f_n$. On appelle, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, reste d'ordre n la fonction $R_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in D, \quad R_n(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n + R_n = S$.

2.4.3 Convergence absolue d'une série de fonctions

2.6 Définition

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument sur D si pour chaque $x \in D$, la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ converge.

Autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument sur D si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement sur D.

Exemple 2.4.
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{sin(nx)}{n\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout x de $\mathbb{R}$ fixé,

$$\left|\frac{sin(nx)}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *est une série de Riemann convergente, et d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{sin(nx)}{n\sqrt{n}}\right|$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{sin(nx)}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente sur $\mathbb{R}$.*

2.2 Proposition

Toute série de fonctions absolument convergente sur D est simplement convergente sur D.

Démonstration.

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions absolument convergente sur D, pour tout x de D la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ converge et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge, ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur D. □

Remarque 2.5.

La réciproque du théorème précédent est fausse.

Exemple 2.5. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$ *mais elle n'est pas absolument convergente.*

2.4.4 Convergence uniforme d'une série de fonctions

2.7 Définition

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est uniformément convergente sur D si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0; \quad \forall x \in D \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

En d'autres termes, pour montrer la convergence uniforme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur D, il faut d'abord vérifier la convergence simple de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note S la somme, puis vérifier que le reste converge uniformément vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n - S| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = 0.$$

Remarque 2.6.

pour que le reste $R_n(x)$, avec $x \in D$ ait un sens il faut d'abord vérifier la convergence simple sur D.

2.3 Proposition

Si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge uniformément sur* D, *alors la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* D.

Exercice 2.1.

1) *Démontrer cette proposition.*

2) *Montrer, à l'aide de la proposition, que la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n^2}$ *converge simplement sur* $[0,+\infty[$ *mais qu'elle ne converge pas uniformément sur* $[0,+\infty[$.

2.4 Proposition

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x)b_n(x)$ *une série de fonctions définies sur* D *telle que*

1. *Pour tout* $x \in D$ *la suite* $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit décroissante*
2. *La suite de fonctions* $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* D *vers la fonction nulle.*
3. *Il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait* $\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=0}^{n} b_n(x)\right| \leqslant M$.

Alors la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x)b_n(x)$ *converge uniformément sur* D.

2.5 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions positives, définies sur* D, *telle que*

1− *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0.

2− *Pour tout* $x \in D$ *la suite numérique* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *décroit, c'est-à-dire* $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n f_n(x)$ *converge uniformément sur* D.

2.4.5 Convergence normale d'une série de fonctions

2.8 Définition

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge normalement sur* D *s'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \geqslant n_0$ *la fonction* f_n *soit bornée et la série numérique* $\sum_{n\geqslant n_0} \|f_n\|_\infty$ *converge, où*

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in D} |f_n(x)|.$$

Exemple 2.6.

1. *On considère la série de fonctions*

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \quad \forall x \in [0,1].$$

Comme $f_n(x) = x^n$ *est le terme général d'une suite géométrique de raison* x *on peut trouver la suite des sommes partielles*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1[, \\ n+1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Pour $x \in [0,1]$ *fixé, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1[, \\ +\infty & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ *converge simplement sur* $[0,1[$ *vers la fonction* S *définie par*

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in [0,1[$$

Notons que le reste d'ordre $n \geqslant 1$

$$S_n(x) - S(x) = -\frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad \forall x \in [0,1[$$

n'est pas borné sur l'intervalle $[0,1[$*, on déduit que la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ *ne converge pas uniformément sur l'intervalle* $[0,1[$*. Cependant, si pour tout* réel $a \in]0,1[$ on restreint les fonctions $f_n(x)$ sur le segment $[0,a] \subset [0,1[$,

$$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n,$$

la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction S.

2. Soit la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^2+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posons $g_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < g_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors d'après le théorème de Weierstrass la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n^2+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Soit la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{1+n^2x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posons $h_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ fixé,

$$0 < h_n(x) \leqslant \frac{1}{x^2n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}} h_n(x) = 1$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^*$.

Si pour tout réel $a > 0$ on restreint la suite de fonctions h_n sur $]-\infty,-a[\cup]a,\infty[$, on trouve que

$$\sup_{x\in]-\infty,-a[\cup]a,\infty[} h_n(x) = \frac{1}{1+a^2n^2}.$$

ce qui implique que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ converge normalement sur $]-\infty,-a[\cup]a,\infty[$ pour tout $a > 0$.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

2.5 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergente

À l'aide des propriétés de la convergence uniforme pour les suites de fonctions, on obtient des propriétés similaires pour les séries de fonctions, que nous énoncerons sans démonstration. Il suffit d'appliquer les Théorèmes 2.3, 2.3 et 2.3 à la suite de fonctions des sommes partielles.

2.7 Théorème (continuité)

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$ si les fonctions f_n sont continue en $x_0\in[a,b]$, la somme de la série S est continue en x_0, c-à-d

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(x_0).$$

2.8 Théorème (intégration)

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur $[a,b]$, si les fonctions f_n sont intégrable sur $[a,b]$, la somme S de la série est intégrable et on a

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

2.9 Théorème (dérivation)

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de terme général f_n de classe C^1 sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$ telle que

1) *Il existe x_0 de $[a,b]$ tel que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge.*

2) *$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$.*

alors

1) *La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $[a,b]$.*

2) La somme $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et on a

$$\forall x \in [a,b], \quad S'(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'(x).$$

2.6 Sommaire pour l'étude d'une série de fonctions

Pour étudier, sur un exemple donné, les convergences d'une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, on peut proposer le plan suivant, qu'il sera parfois nécessaire de compléter :