

## Chapitre 01: Les courbes

### 0- Rappels:

- Dans ce chapitre,  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel.  
noté  $\cdot$  ou  $\langle, \rangle$ .

- On rappelle que si  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$

\* le produit scalaire de  $X$  et  $Y$ :  $\langle X, Y \rangle = X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

\* la norme euclidienne de  $X$ :  $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

\* La dérivée de produit scalaire: le produit scalaire se dérive comme un produit usuel. i.e.

$$\langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle = X' \cdot Y + X \cdot Y'$$

\* Une base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite directe (resp indirecte) si  $\det(e_1, \dots, e_n) > 0$ , (resp  $\det(e_1, \dots, e_n) < 0$ ).

### 1- Courbes paramétrées:

#### Définition 1.1

- Une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^n$  est une application

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , où  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  
 $t \mapsto \gamma(t)$

-  $t$  est appelé le paramètre de la courbe paramétrée  $\gamma$ .

- L'image de  $I$  par  $\gamma$  est appelée la trace de  $\gamma$  ou.

le support de  $\gamma$ , noté  $\gamma(I) = M$ .

- $(\gamma, I)$  est appelé un paramétrage (une paramétrisation) de  $M$ .
- Si  $[a, b] \subset I$ ,  $\gamma|_{[a, b]} = \overline{AB}$  est appelé arc de  $\gamma$  compris entre  $A = \gamma(a)$  et  $B = \gamma(b)$ .
- La dérivée  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$  est appelée le vecteur tangent à la courbe paramétrée  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ .

### Exemples 1.1

1) soit  $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$

$\alpha_1: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe paramétrée  
 $t \longmapsto (t, f(t))$

le support de  $\alpha_1: \alpha_1(I)$  est le graphe de  $f$ .

2):  $\alpha_2: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

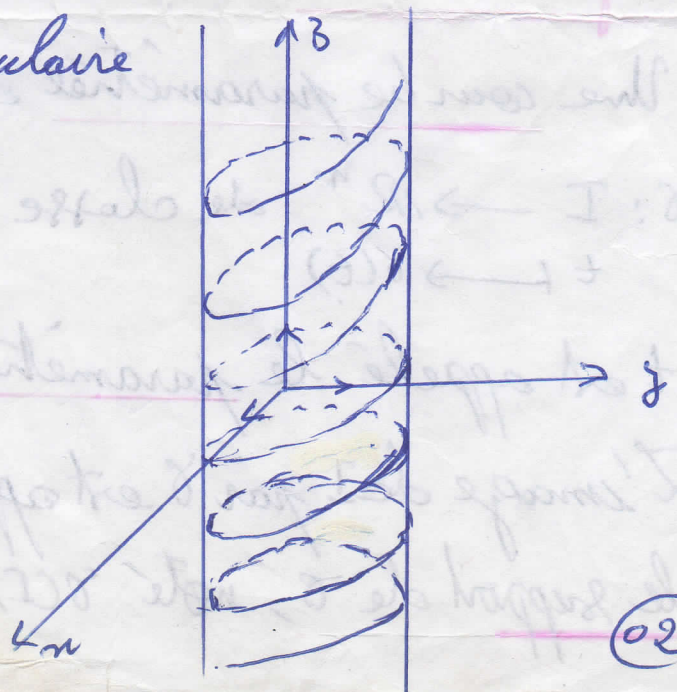
$t \longmapsto (R \cos t, R \sin t)$ ,  $R > 0$

le support de  $\alpha_2$  est le cercle de centre 0 et de rayon  $R$ .

3)  $\gamma_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto (R \cos t, R \sin t, vt)$ ,  $R > 0, v \in \mathbb{R}$

le support de  $\gamma_1$  est l'hélice circulaire de rayon  $R$  et de pas  $v$ .



### Définition 1.2

03

Une courbe paramétrée  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est régulière si  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

### Exemples: 1.2

•  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\gamma_1$  sont régulières.

$\gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto (t^3, t^2)$  n'est pas régulière car  $\gamma'(0) = (0, 0)$

### Définition 1.3

- On dit que deux courbes paramétrées  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont équivalentes, s'il existe un  $C^\infty$ -diffeomorphisme  $\phi: J \rightarrow I$  tel que  $\alpha = \gamma \circ \phi$ .

- On dira que  $\phi$  est un changement de paramétrage de  $\gamma$ .

### Remarque: 1.1

•  $\gamma$  et  $\alpha$  ont même support  $\Gamma$ .

•  $\gamma$  est régulière  $\Leftrightarrow \alpha$  est régulière.

• Si  $\phi'(t) > 0, \forall t \in J$ : On dit que  $\gamma$  et  $\alpha$  définissent la même orientation, sinon on dit qu'elles définissent des orientations opposées.

### Exemples: 1.3

$$1) \gamma: ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

$$\alpha: ]0, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

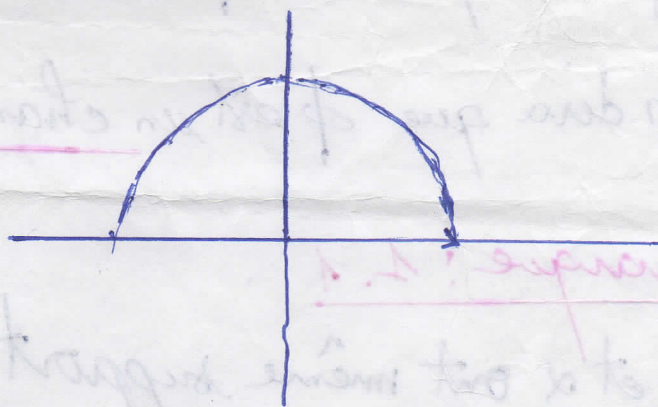
soit:  $\phi: ]0, \pi[ \longrightarrow ]-1, 1[$   $C^\infty$  difféomorphisme

$$t \longmapsto \cos t$$

$\alpha = \gamma \circ \phi$  d'où  $\phi$  est un changement de paramétrage  
i.e.  $\gamma$  et  $\alpha$  sont équivalentes

$$\forall t \in ]0, \pi[: \phi'(t) = -\sin t < 0$$

donc  $\gamma$  et  $\alpha$  définissent des orientations opposées



### Définition 1.4

Soit  $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée.

et  $[a, b]$  un intervalle inclus dans  $I$ ,  $\gamma(a) = A$ ,  $\gamma(b) = B$ .

La longueur de l'arc  $\overline{AB} = \gamma/[a, b]$  est définie par

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \|\dot{\gamma}(u)\| du :$$

06

• L'abscisse curviligne d'origine A de  $\gamma$  est la fonction  $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \varphi(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\| du.$$

• Si  $I = [a, b]$  alors la longueur de  $\gamma$  est

$$L_\gamma = \int_a^b \|\dot{\gamma}(u)\| du.$$

Exemple: 1.4 (Hélice)

Déterminons la longueur de l'arc  $\gamma|_{[0,1]}$  de

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, vt), \quad R > 0, v \in \mathbb{R}.$$

$$L_{\gamma|_{[0,1]}} = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^1 \sqrt{R^2 + v^2} du = \sqrt{R^2 + v^2}$$

Exercice: 1.1

Déterminer l'abscisse curviligne d'origine  $\gamma(0)$

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = (t^3, t^2).$$

Solution:

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^t 3u \sqrt{u^2 + \frac{4}{9}} du$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^t (2u) \left(u^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} du = \left[u^2 + \frac{4}{9}\right]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^t$$

$$= \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} = \sqrt{\left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^3} - \frac{8}{27}$$

06

### Définition: 1.5:

Soit  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrisée régulière de support  $M$ .

On dit que  $\gamma$  est paramétrisée par sa longueur (naturellement) ou  $(\gamma, I)$  une paramétrisation naturelle si pour tout  $[a, b] \subset I$ :

$$L_{\gamma/[a, b]} = b - a.$$

### Exemple: 1.6

Soit:  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \gamma(t) = \left(r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r}\right), \quad r > 0$$

$$\dot{\gamma}(t) = \left(-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r}\right)$$

Pour tout  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ :

$$L_{\gamma/[a, b]} = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| du = \int_a^b 1 du = b - a.$$

$\gamma$  est paramétrisée par sa longueur.

### Proposition: 1.4