Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière alors :

γ est paramétrée par sa longueur ssi $\forall s \in I : \|\gamma'(s)\| = 1$

Preuve : TD

$\Rightarrow$ supposons que γ est paramétrée par sa longueur.

soit $a \in I$, (a fixé)

* pour tout $s \geq a$: on a : $L_{\gamma/[a,s]} = s - a$

d'autre part $L_{\gamma/[a,s]} = \int_a^s \|\gamma'(u)\| du$

mais la fonction $s \longmapsto L_{\gamma/[a,s]}$ est dérivable de dérivée égale à $\|\gamma'(s)\|$.

$$\left[\int_a^s \|\gamma'(u)\| du\right]' = [s-a]'$$

d'où : $\|\gamma'(s)\| = 1$

* pour tout $s \leq a$ on a : $L_{\gamma/[s,a]} = a - s$

d'autre part $L_{\gamma/[s,a]} = \int_s^a \|\gamma'(u)\| du$

$$\left[\int_s^a \|\gamma'(u)\| du\right]' = [a-s]'$$

$-\|\gamma'(s)\| = -1$ d'où $\|\gamma'(s)\| = 1$

$\Leftarrow$ supposons que : $\forall s \in I : \|\dot{\gamma}(s)\| = 1$

Pour tout $[a,b] \subset I$:

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(u)\| \, du = \int_a^b 1 \, du = b - a.$$

Proposition 1.2

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière. alors il existe une courbe paramétrée par sa longueur $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ equivalente à γ.

Preuve : (TD)

Soient $a \in I$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \varphi(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\| \, du$$

l'abscisse curviligne d'origine $\varphi(a)$.

Posons $J = \varphi(I)$, nous allons montrer que $\varphi : I \longrightarrow J$ est un C^∞ difféomorphisme de classe C^∞ et que $\alpha = \gamma \circ \varphi^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ equivalente à γ.

φ est surjective par définition.

φ est de classe C^∞, de plus :

$$\forall t \in I : \dot{\varphi}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$$

φ est croissante $\Rightarrow$ φ est injective.

d'où φ est bijective.

et φ^{-1} de classe $\mathcal{C}^\infty$

donc φ est un $\mathcal{C}^\infty$-diff de I vers J

$$\varphi : I \longrightarrow J \quad , \quad \varphi^{-1} : J \longmapsto I$$
$$t \longmapsto \varphi(t) = s \qquad\qquad s \longmapsto \varphi^{-1}(s) = t$$

$$\forall s \in J : \alpha'(s) = (\gamma \circ \varphi^{-1})'(s)$$
$$= \gamma'(\varphi^{-1}(s)) \cdot [\varphi^{-1}(s)]'$$
$$= \gamma'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$
$$= \gamma'(t) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$

d'où : $\forall s \in J : \|\alpha'(s)\| = \|\gamma'(t)\| \cdot \dfrac{1}{\|\gamma'(t)\|} = 1$

Remarque : 1.8

Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe parametrée par sa longueur alors :

$\forall s \in I : \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$ i.e $\alpha'(s) \perp \alpha''(s)$

Preuve :

On a : $\forall s \in I : \|\alpha'(s)\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle} = 1$

$\Leftrightarrow \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$

En derivant cette egalité on obtient

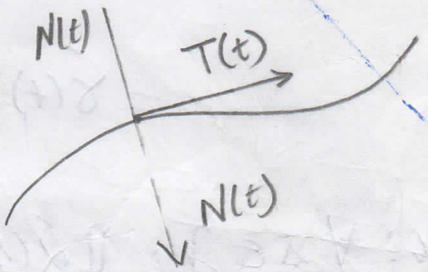
$2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha'(s) \perp \alpha''(s)$

Définition : 1.6

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière :

- $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est appelé le vecteur Tangent unitaire de γ en $\gamma(t)$.

- $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ est appelé le vecteur normal unitaire (vecteur normal principal unitaire) de γ en $\gamma(t)$.



Exemple : 1.6

Soient : $\gamma :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$

$\alpha :]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$s \longmapsto \alpha(s) = (\cos s, \sin s)$

γ et α sont equivalentes car il existe un C^∞-difféomorphisme $\phi :]0,\pi[\longrightarrow]-1,1[$

$s \longmapsto \phi(s) = \cos s = t$

tel que $\alpha(s) = \gamma(\phi(s))$

$\gamma'(t) = \left(1, \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$, $\|\gamma'(t)\| = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$T_\gamma(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \left(\sqrt{1-t^2}, -t\right)$

$T_\gamma'(t) = \left(\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, -1\right)$, $\|T_\gamma'(t)\| = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$N_\gamma(t) = \frac{T'_\gamma(t)}{\|T'_\gamma(t)\|} = (-t, -\sqrt{1-t^2}).$$

$$\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s), \quad \|\alpha'(s)\| = 1$$

$$T_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = (-\sin s, \cos s) = (-\sqrt{1-t^2}, t) = -T_\gamma(t)$$

$$T'_\alpha(s) = (-\cos s, -\sin s), \quad \|T'_\alpha(s)\| = 1$$

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{\|T'_\alpha(s)\|} = (-\cos s, -\sin s) = (-t, -\sqrt{1-t^2}) = N_\gamma(t)$$

Proposition 1.3

Le signe du vecteur tangent dépend de l'orientation du paramétrisation choisie. Par contre, lorsqu'il existe, le vecteur normal principal ne dépend pas du paramétrisation choisie.

Preuve:

Soient $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées régulières, alors il existe un C^∞-difféo

$$\phi: J \longrightarrow I \quad \text{tel que} \quad \alpha = \gamma \circ \phi$$
$$s \longmapsto \phi(s) = t$$

$$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad T_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$\alpha'(s) = \gamma'(\phi(s)) \cdot \phi'(s) = \gamma'(t) \cdot \phi'(s)$$

$$T_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \frac{\gamma'(t) \cdot \phi'(s)}{\|\gamma'(t)\| \cdot |\phi'(s)|} = \frac{\phi'(s)}{|\phi'(s)|} \cdot T_\gamma(t) = \pm T_\gamma(t)$$

$$N_\gamma(t) = \frac{T'_\gamma(t)}{\|T'_\gamma(t)\|} \quad , \quad N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{\|T'_\alpha(s)\|}$$

$$T'_\alpha(s) = \left(\pm T_\gamma(t)\right)' = \pm\left[T_\gamma(\phi(s))\right]' = \pm T'_\gamma(\phi(s)) \cdot \phi'(s)$$

$$= \frac{\phi'(s)}{|\phi'(s)|} \cdot T'_\gamma(t) \cdot \phi'(s) = |\phi'(s)| \cdot T'_\gamma(t)$$

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{\|T'_\alpha(s)\|} = \frac{|\phi'(s)| \cdot T'_\gamma(t)}{|\phi'(s)| \cdot \|T'_\gamma(t)\|} = \frac{T'_\gamma(t)}{\|T'_\gamma(t)\|} = N_\gamma(t)$$