

2 - Courbes planes:

13

Définition 2.1

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrisée régulière. Le repère $(\gamma(t), T(t), N(t))$ est de Frenet de γ au temps $t \in I$, si $(T(t), N(t))$ est une base orthonormale directe.

Définition 2.2 et Théorème 2.1

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrisée par sa longueur (naturelle), soit $(\gamma(s), T(s), N(s))$ le repère de Frenet de γ en s . Alors il existe une fonction de classe C^∞ $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\forall s \in I: T'(s) = \kappa(s) \cdot N(s) \quad \left(\frac{d}{ds} T(s) = \kappa(s) \cdot N(s) \right)$$

- le Nombre $\kappa(s)$ est appelé la courbure algébrique de γ .
- le Nombre $K(s) = |\kappa(s)|$ est appelé la courbure de γ .
- le Nombre $R = \frac{1}{|\kappa(s)|}$ est appelé le rayon de courbure.

Preuve:

On a: $\forall s \in I: \|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ et $T(s) = \dot{\gamma}(s)$

$$\Leftrightarrow \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle T(s), T(s) \rangle = 1$$

En dérivant, nous obtenons: $2 \langle T'(s), T(s) \rangle = 0$

i.e. $\forall s \in I: T(s) \perp N(s)$

also il existe $k: I \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall s \in I: T'(s) = k(s) \cdot N(s)$
 ($T'(s)$ et $N(s)$ sont colinéaires)

de plus: $\forall s \in I: k = |k(s)| = \|T'(s)\| = \|\dot{\gamma}(s)\|.$

Exemple: 2.1

1) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow t \mapsto \gamma(t) = (t, at+b) \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at+b \end{cases}$

$ds = \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot dt$

$\dot{\gamma}(t) = (1, a) \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1^2 + a^2}$

$ds = \sqrt{1+a^2} dt \Rightarrow s = \sqrt{1+a^2} \cdot t$

$\gamma(t) = \left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}, a \frac{s}{\sqrt{1+a^2}} + b \right) = \frac{s}{\sqrt{1+a^2}} T(s) + \left[\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} s + b \right] N(s) = \alpha(s)$

$\dot{\alpha}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)$

$\dot{\alpha}(s) = 0 \Rightarrow k(s) = 0 \Rightarrow R = +\infty$

2) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$

$ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad \dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$

$\|\dot{\gamma}(t)\| = r \Rightarrow s = rt$

$\gamma(t) = \alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$

$\dot{\alpha}(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$

$$\vec{\alpha}(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right)$$

$$K(s) = \|\vec{\alpha}(s)\| = \frac{1}{r} \Rightarrow R = \frac{1}{K} = r$$

15

Proposition 2.1 (Formules de Frenet)

Soient (s, I) un paramétrage naturel et $(\gamma(s), T(s), N(s))$ le repère de Frenet au temps s , et si $K(s)$ la courbure

$$\text{alors } \begin{cases} \dot{T}(s) = K(s)N(s) \\ \dot{N}(s) = -K(s)T(s) \end{cases} \quad \forall s \in I.$$

Preuve:

On a: $\forall s \in I: T(s) = \dot{\gamma}(s), N(s) = \frac{\dot{T}(s)}{\|\dot{T}(s)\|} = \frac{\dot{T}(s)}{K(s)}$, d'où

$$\forall s \in I: \dot{T}(s) = K(s)N(s).$$

$\forall s \in I: \|N(s)\| = 1 \Rightarrow \langle N(s), N(s) \rangle = 1 \Rightarrow 2 \langle \dot{N}(s), N(s) \rangle = 0$

Alors: $\dot{N}(s) \perp N(s)$, ainsi $\dot{N}(s) = a T(s)$, $a \in \mathbb{R}$.

$\langle N(s), T(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{N}(s), T(s) \rangle + \langle N(s), \dot{T}(s) \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle a T(s), T(s) \rangle + \langle N(s), K(s)N(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow a \underbrace{\|T(s)\|^2}_1 + K(s) \underbrace{\|N(s)\|^2}_1 = 0 \Rightarrow a + K(s) = 0$$

$$a = -K(s) \text{ d'où } \dot{N}(s) = -K(s)T(s)$$

Définition 2.3

soit $d: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée naturellement

et $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de même trace Γ , alors il existe un changement de paramétrage $\phi: I \rightarrow J$ (une abscisse curviligne) tel que $\gamma = \alpha \circ \phi$.

La courbure algébrique de γ est la fonction k_γ

$$k_\gamma = k_\alpha \circ \phi \quad \text{i.e.} \quad k_\gamma(t) = k_\alpha(\phi(t)) \quad \text{ou } k_\alpha \text{ la courbure algébrique de } \alpha.$$

La courbure de γ est le nombre $K_\gamma(t) = K_\alpha(s) = K_\alpha(\phi(t))$ ou $K_\alpha(s)$ la courbure de α .

Proposition 2.2

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière.
 $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$

La courbure de γ est $K(t) = \frac{|\dot{x}(t) \cdot \ddot{y}(t) - \ddot{x}(t) \cdot \dot{y}(t)|}{[\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2]^{3/2}}$.

Preuve:

Soit $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée naturelle de même trace que γ , i.e. : $\forall s \in J, \exists t \in I: \alpha(s) = \gamma(t)$

$$K_\gamma(t) = K_\alpha(s) = \left| \frac{d}{ds} T(s) \right| = \left| \frac{d^2}{ds^2} \alpha(s) \right|.$$

$$\forall s \in J, T(s) = \frac{d}{ds} \alpha(s) = \frac{d\alpha(s)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\gamma(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$= v(t) \cdot \frac{1}{\|v(t)\|} \quad \text{où} \quad \frac{d\gamma(t)}{dt} = v(t), \quad (ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (T(s)) &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{v(t)}{\|v(t)\|} \right) \\ &= \frac{1}{\|v(t)\|} \left[\frac{\frac{d}{dt} v(t) \cdot \|v(t)\| - \frac{d}{dt} \|v(t)\| \cdot v(t)}{\|v(t)\|^2} \right] \\ &= \frac{1}{\|v(t)\|^3} \left[\frac{d}{dt} v(t) \cdot \|v(t)\| - \left\langle \frac{d}{dt} v(t), v(t) \right\rangle \cdot \frac{v(t)}{\|v(t)\|} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on a, } K_{\alpha}(s) &= \left\| \frac{d}{ds} T(s) \right\| \Leftrightarrow K_{\alpha}^2(s) = \left\| \frac{d}{ds} T(s) \right\|^2 \\ K_{\alpha}^2(s) &= \left\langle \frac{d}{ds} T(s), \frac{d}{ds} T(s) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|v(t)\|^6} \left[\|v(t)\|^2 \left\langle \frac{d}{dt} v(t), \frac{d}{dt} v(t) \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{d}{dt} v(t), v(t) \right\rangle^2}{\|v(t)\|^2} - 2 \left\langle \frac{d}{dt} v(t), v(t) \right\rangle^2 \right] \\ &= \frac{1}{\|v(t)\|^6} \left[\|v(t)\|^2 \cdot \left\| \frac{d}{dt} v(t) \right\|^2 - \left\langle \frac{d}{dt} v(t), v(t) \right\rangle^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on a } \gamma(t) = (x(t), y(t)) &\Rightarrow v(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \\ \frac{d}{dt} v(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}^6} \left[(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2) \cdot (\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2) - (\dot{x}(t) \ddot{x}(t) + \dot{y}(t) \ddot{y}(t))^2 \right] \end{aligned}$$

$$K(t) = \frac{[\dot{x}(t) \cdot \dot{y}(t) - \ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t)]^2}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^3}$$

$$K(t) = \frac{|\dot{x}(t) \cdot \dot{y}(t) - \ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t)|}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}^3} = \frac{|\det(\frac{d^2 \gamma(t)}{dt^2}, \frac{d \gamma(t)}{dt})|}{\|\frac{d}{dt} \gamma(t)\|^3}$$

Example 2.2

① $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \gamma(t) = (t, f(t)) \quad f \in \mathcal{C}^2(I)$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = f'(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = f''(t) \end{cases}$$

$$K(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2) Z'asthoïde: $\gamma:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -3 \sin t \cos^2 t \\ \dot{y}(t) = 3 \cos t \sin^2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -3 [\cos^3 t - 2 \cos t \sin^2 t] \\ \ddot{y}(t) = -3 [\sin^3 t - 2 \sin t \cos^2 t] \end{cases}$$

$$K(t) = \frac{1}{3 |\sin t \cos t|}$$