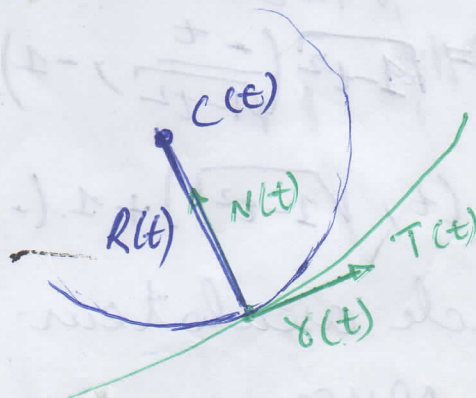


Définition 2.4

Soient $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrisée régulière et $(\gamma(t), T(t), N(t))$ le repère de Frenet au temps t . $K(t)$ la courbure de γ au temps t .

Le cercle de centre $C(t) = \gamma(t) + R(t) \cdot N(t)$ et de rayon

$R(t) = \frac{1}{K(t)}$ est appelé le cercle osculateur



Exemple 2.3

$$\gamma:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

Déterminer le cercle osculateur.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = \frac{-1}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

$$K(t) = \frac{|0 + \frac{1}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}|}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}^3} = \frac{\frac{1}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}^3} = 1$$

$$R(t) = \frac{1}{K(t)} = 1.$$

$$C(t) = \gamma(t) + R(t) \cdot N(t)$$

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \text{ et } N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right), \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$T(t) = \sqrt{1-t^2} \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right) = \left(\sqrt{1-t^2}, -t \right)$$

$$\dot{T}(t) = \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, -1 \right), \quad \|\dot{T}(t)\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$N(t) = \sqrt{1-t^2} \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, -1 \right) = (-t, -\sqrt{1-t^2})$$

$$C(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) + 1 \cdot (-t, -\sqrt{1-t^2}) = 0$$

Le cercle osculateur est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

3 Combres de l'espace: (de $\mathbb{R}^3$)

(21)

Définition 3.1

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le produit vectoriel de u et v (dans cet ordre) est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$, noté $u \wedge v$, tel que pour tout $w \in \mathbb{R}^3$ on a: $\langle (u \wedge v), w \rangle = \det(u, v, w)$
 $\langle w, u \wedge v \rangle =$

Propriétés: 3.1

01) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$: $u \wedge v = -v \wedge u$ (antisymétrique)

02) $\forall u, \tilde{u}, v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha u + \tilde{u}) \wedge v = \alpha u \wedge v + \tilde{u} \wedge v \quad (\text{linéarité à gauche})$$

$$u \wedge (\beta v + \tilde{v}) = \beta u \wedge v + u \wedge \tilde{v} \quad (\text{linéarité à droite})$$

03) Si $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ alors

$$u \wedge v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

04) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$ on a: $u \wedge v \perp u$ et $u \wedge v \perp v$

06) Si u, v sont unitaires et orthogonaux alors:

$\{u, v, u \wedge v\}$ forme une base orthonormée directe

05) Si θ est l'angle entre u et v alors:

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin \theta$$

Preuve:

① Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, $\forall w \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle (u \wedge v), w \rangle = \det(u, v, w)$$

$$\langle (v \wedge u), w \rangle = \det(v, u, w) \Rightarrow u \wedge v = -v \wedge u$$

$$\det(u, v, w) = -\det(v, u, w)$$

② Si $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $\forall w = (w_1, w_2, w_3)$

$$\langle (u \wedge v), w \rangle = \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } u \wedge v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

③ Si $u, v \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle u \wedge v, v \rangle = \det(u, v, v) = 0$$

$$\langle u \wedge v, u \rangle = \det(u, v, u) = 0$$

④ Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ et θ est l'angle entre u et v .

$$\text{On a: } \langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos^2 \theta = \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2 \|v\|^2} \Rightarrow 1 - \cos^2 \theta = \frac{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2 \|v\|^2}$$

Définition 3.4 et Théorème 3.1

(23)

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrisée par sa longueur; soit $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Frenet de γ en s , alors il existe une fonction de classe C^∞ : $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\forall s \in I: B'(s) = \tau(s) \cdot N(s)$$

- Le nombre $\tau(s)$ est appelé la torsion de γ .

Preuve:

En dérivant $B(s) = T(s) \wedge N(s)$

Nous obtenons: $B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$

car $T'(s)$ est colinéaire à $N(s)$ ($T'(s) = K(s) \cdot N(s)$).

De plus on a: $\|B(s)\| = 1 \Leftrightarrow \langle B(s), B(s) \rangle = 1$

En dérivant $\langle B(s), B(s) \rangle = 1$, nous obtenons

$$2 \langle B'(s), B(s) \rangle = 0.$$

Par conséquent $B'(s) \perp B(s)$.

Alors: $B'(s)$ est orthogonal à la fois à $T(s)$ et à $B(s)$,

$B'(s)$ est colinéaire à $N(s)$

i.e., $\exists \tau: I \rightarrow \mathbb{R} \quad C^\infty \quad / \quad B'(s) = \tau(s) \cdot N(s)$