

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2 \|v\|^2}$$

24

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

il suffit de prouver que $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$

$$\text{d'où } \|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin \theta$$

Définition 3.2

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière. Le repère $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ est de Frenet de γ au temps $t \in I$ si $(T(t), N(t), B(t))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 3.1

- $(T(t), N(t), B(t))$ est appelée triade de Frenet.
- Le vecteur $B(t)$ peut être défini par $B(t) = T(t) \wedge N(t)$.
- Le vecteur $B(t)$ est appelé le vecteur binormal à la courbe.

Définition 3.3

- Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par sa longueur; $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Frenet.
- La courbure de γ est le nombre $K(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$.
- Le rayon de courbure est le nombre $R(s) = \frac{1}{K(s)}$.

Proposition 3.1 (Formules de Frenet)

Soient (γ, I) un paramétrage naturel et $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Frenet au temps s ,
Si $K(s)$ la courbure de γ et si $\tau(s)$ la torsion de γ .

alors

$$\begin{cases} \dot{T}(s) = K(s) \cdot N(s) & \text{--- ①} \\ \dot{N}(s) = -K(s) T(s) - \tau(s) \cdot B(s) & \text{--- ②} \\ \dot{B}(s) = \tau(s) N(s) & \text{--- ③} \end{cases}$$

Preuve:

On démontre: ②

On a: $N(s) = B(s) \wedge T(s)$. (voir Exercice 01 de TD2)

En dérivant $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ alors:

$$\begin{aligned} \dot{N}(s) &= \dot{B}(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge \dot{T}(s) \\ &= \tau(s) N(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge K(s) \cdot N(s) \\ &= -\tau(s) \cdot B(s) - K(s) T(s) \\ &= -K(s) T(s) - \tau(s) B(s) \end{aligned}$$

Remarque 3.2

$$\left(\begin{array}{c} \dot{T}(s) \\ \dot{N}(s) \\ \dot{B}(s) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

Exercice 1.1

Soit $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad a, b > 0, a^2 + b^2 = 1$$

Déterminer la courbure et la torsion de γ .

Solution:

on a: $\dot{\gamma}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

on pose: $s = t$ (γ est une courbe paramétrisée (naturelle))

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = (-a \sin s, a \cos s, b)$$

$$\hat{T}(s) = \frac{\dot{\gamma}(s)}{\|\dot{\gamma}(s)\|} = (-a \cos s, -a \sin s, 0)$$

$$K(s) = \|\hat{T}'(s)\| = \|\dot{\hat{T}}(s)\| = a$$

$$N(s) = \frac{\hat{T}'(s)}{\|\hat{T}'(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} t_2 & t_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin s & b \\ -\sin s & 0 \end{vmatrix} = b \sin s$$

$$b_2 = - \begin{vmatrix} t_1 & t_3 \\ n_1 & n_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -a \cos s & b \\ -\cos s & 0 \end{vmatrix} = -b \cos s$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin s & a \cos s \\ -\cos s & -\sin s \end{vmatrix} = a \sin^2 s + a \cos^2 s = a$$

d'où $B(s) = (b \sin s, -b \cos s, a)$

$$\hat{b}(s) = (b \cos s, b \sin s, 0) = -b(-\cos s, -\sin s, 0) = -b N(s)$$

d'où $\tau(s) = -b$

Définition: 3.1

Soient $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par sa longueur et $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière, telles que α et γ sont équivalentes. (il existe $\phi: I \rightarrow J$ $\mathcal{C}^\infty$ diff, $\gamma = \alpha \circ \phi$).

La courbure $K_\gamma(t)$ et torsion $\tau_\gamma(t)$ sont définies par:

$$K_\gamma(t) = K_\alpha(\phi(t)) = K_\alpha(s) \text{ et } \tau_\gamma(t) = \tau_\alpha(\phi(t)) = \tau_\alpha(s)$$

où $K_\alpha(s)$ est la courbure de α , $\tau_\alpha(s)$ est la torsion de α .

Proposition: 3.2

Soient $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ le repère de Frenet de γ en t . Alors on a:

$$B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}, \quad K(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = -\frac{\langle \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2}$$

Preuve: voir l'exercice 02 TD 02)

Remarque: 3.3

La courbure (resp la torsion), elle mesure la variation de $T(t)$ (resp $B(t)$) c'est-à-dire le courbement (resp la tendance) de la courbe.

Définition: 3.6

Soient $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ le repère de Frenet en $t \in I$, si $K(t)$ la courbure de γ en t et $R(t)$ le rayon de courbure,

La sphère de centre $C(t) = \gamma(t) + R(t) \cdot N(t)$ et de rayon $R(t)$ est appelé la sphère osculatrice de γ en t .

Le plan $\gamma(t) + \text{Vect}(T(t), N(t))$ est appelé le plan osculateur de γ en t , il coïncide avec $\gamma(t) + \text{Vect}(\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}'(t))$

Le plan $\gamma(t) + \text{Vect}(N(t), B(t))$ est appelé le plan normal de γ en t .

Remarque: 3.4

Le plan osculateur est le plan passant par $\gamma(t)$ et perpendiculaire à $B(t)$.