

Chapitre: 02 Surfaces:

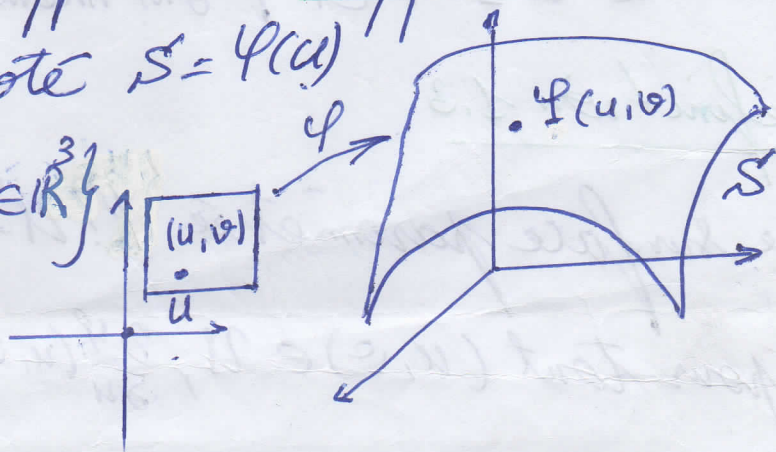
1- Surfaces paramétrées:

Définition: 1.1

• Une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$ est une application $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , où U un domaine de $\mathbb{R}^2$.

• L'image de U par φ est appelée le support de la surface paramétrée φ , noté $S = \varphi(U)$

$$S = \{ \varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}$$



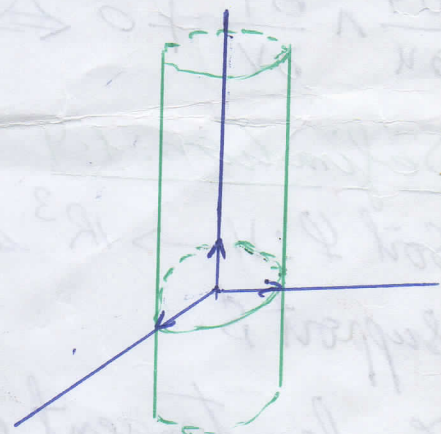
Exemple: 1.1

① Le cylindre de révolution est une surface paramétrée

$$\varphi: U =]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R} \}$$

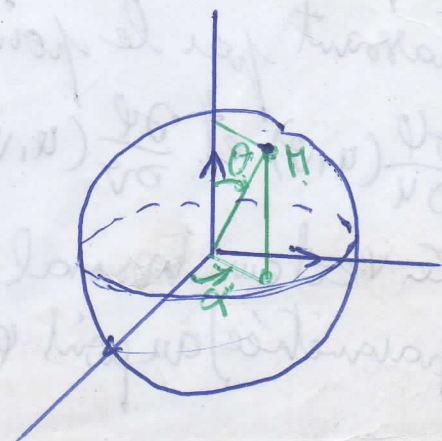


② La sphère S^2 est une surface paramétrée

$$\varphi:]0, 2\pi[\times]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, \theta) \longmapsto (\cos \alpha \sin \theta, \sin \alpha \sin \theta, \cos \theta)$$

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$



Définition: 1.2

• On dit que deux surfaces paramétrées $\varphi: U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}^3$ et $\psi: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont équivalentes, s'il existe un C^∞ -difféomorphisme $\phi: U \rightarrow V$, tel que $\psi = \varphi \circ \phi$.

• On dira que ϕ est un changement de paramétrage.

• Dans ce cas φ et ψ ont même support S .

Définition 1.3

Une surface paramétrée $\varphi: U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}^3$ est dite régulière si pour tout $(u, v) \in U$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ sont libres.

Remarque: 1.1

$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont libres.

Définition: 4.4

Soit $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S .

Le plan tangent à la surface φ au point $\varphi(u, v)$ est le plan passant par le point $\varphi(u, v)$ et engendré par les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$, noté $T_{\varphi(u, v)} S$.

Le vecteur normal unitaire à ce plan tangent (à la surface paramétrée) au point $\varphi(u, v)$ est le vecteur $n(u, v) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}\|}$

Exemple: 1.2

$$\text{Soit } \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (u-v, u^2+v^2, u^2-v^2)$$

- 1) Déterminer les points où φ est régulière.
- 2) Déterminer une équation du plan tangent à la surface en $\varphi(2,1)$.

Solution:

$$1) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 2u, 2u), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-1, 2v, -2v)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (b_1, b_2, b_3) \neq 0$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} 2u & 2u \\ 2v & -2v \end{vmatrix} = -8uv$$

$$b_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ -1 & -2v \end{vmatrix} = 2v - 2u$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ -1 & 2v \end{vmatrix} = 2v + 2u$$

$$\begin{cases} uv = 0 \\ v - u = 0 \\ v + u = 0 \end{cases} \Rightarrow u = v = 0$$

φ est régulière sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$2) \varphi(2,1) = (1, 5, 3)$$

$$T_{\varphi(2,1)} S = \varphi(2,1) + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u}(2,1) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial v}(2,1)$$

$$(x, y, z) \in T_{\varphi(2,1)} S \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 5 + 4\alpha + 2\beta \\ z = 3 + 4\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 + \beta \\ y = 4x + 1 + 6\beta \\ z = 4x - 1 + 2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 8x + y - 3z - 4 = 0$$

$$T_{\varphi(2,1)} S = \varphi(2,1) \perp \frac{\partial \varphi}{\partial u}(2,1) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(2,1)$$

$$v = (x, y, z) \in T_{\varphi(2,1)} S \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \\ z-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + y - 3z - 4 = 0$$

Définition: 1.5

Une application $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , est dite immersion sur U , si pour tout $(u, v) \in U$, $J_\varphi(u, v)$ est de rang 2.

$$\text{Si } \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Remarque: 1.2

$J_\varphi(u, v)$ est de rang 2 $\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont libres.
 tout immersion sur U est une surface paramétrée régulière.

Exemple: 1.3

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{est une immersion sur } \mathbb{R}^2.$$

$$(u, v) \longmapsto (u, v, u+v)$$

Définition: 1.6

Une application $f: W \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^3} \mathbb{R}$ de classe C^∞ est dite submersion sur W , si pour tout $(x, y, z) \in W$, $J_f(x, y, z)$

est de rang 1

Remarque: 3.1

$J_f(x, y, z)$ est de rang 1 $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

- Le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ est appelé le gradient de f , noté $\text{grad} f$ ou ∇f .

Proposition: 1.1

Soit $f: W \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^3} \mathbb{R}$ une submersion, alors l'ensemble

$S = \{ (x, y, z) \in W / f(x, y, z) = 0 \}$ localement est un support d'une surface paramétrée régulière, de plus le vecteur normal unitaire à S en (x, y, z) est donnée

par $\frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|}$.

Preuve:

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in S$ alors $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Comme f est une submersion alors $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Supposons $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

D'après le théorème des fonctions implicites

Il existe un voisinage U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ et un voisinage I de z_0 dans $\mathbb{R}$, et une fonction

$h: U \rightarrow I$ tels que:

$$\forall (x, y, z) \in U \times I: f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = h(x, y)$$

alors l'application $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

$$\text{de } J_{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ de rang } 2.$$

c'est-à-dire φ est une surface paramétrisée régulière

$$\varphi(U) = \{(x, y, z) \in W / z = h(x, y)\} = \{(x, y, z) \in W: f(x, y, z) = 0\} = S$$

$$N(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) \\ 1 & \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial u}(u, v)$$

$$b_2 = -\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) \\ 0 & \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial v}(u, v)$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

En dérivant $f(u, v, z) = 0$ successivement par rapport à u