et à v, on obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,z) + \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(u,v,z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,z) + \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(u,v,z) = 0$$

donc $b_1 = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(u,v,z)}$, $b_2 = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(u,v,z)}$, $b_3 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(u,v,z)\cdot N(u,v) = \nabla f(u,v,z)$$

alors $\nabla f(u,v,z)$ est colinéaire à $N(u,v)$

d'où : $n(u,v) = \dfrac{\nabla f(u,v,z)}{\|\nabla f(u,v,z)\|}$ est un vecteur normal unitaire

Exemple: 1.3

Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + 2y^2 - z^2 = 2\}$

1) vérifier que S est une surface géometrique

2) Déterminer le plan tangent à S en $A = (3,3,5)$

Solution

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2.$$

$\nabla f(x,y,z) = (2x, +4y, -2z) \neq (0,0,0)$ pour tout $(x,y,z) \in S$

d'ou S est une surface géométrique

② On a : $A(3,3,5) \in S$ et $\nabla f(A) = (6, 12, -10)$

$T_A S - A \perp \nabla f(A)$

$$v = (x, y, z) \in T_A S \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$6(x-3) + 12(y-3) - 10(z-5) = 0$$

$$3x + 6y - 5z - 2 = 0$$

2- Première et deuxième formes fondamentales:

Définition: 2.1

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S, $T_p S$ le plan tangent à S en $p \in S$.

Si $\langle\, , \rangle_p$ la restriction du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ au $T_p S$.

La forme quadratique associée à $\langle\, , \rangle$ sur $T_p S$, est dite, la première forme fondamentale de S en p, noté I

$$I : T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longmapsto I(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

Notation: On pose: $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_u$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_v$, où $\varphi(u, v) = p$

Si $w \in T_p S$ alors : $w = x\varphi_u + y\varphi_v$.

$$I(w) = \langle x\varphi_u + y\varphi_v, x\varphi_u + y\varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle x^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle xy + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle y^2$$

On note : $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ les coefficients de I.

Exemple : 2.1

Déterminer les coefficients de la première forme fondamentale à la surface S paramétrée par

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (u.v,\ u-v,\ u+v)$$

Solution :

$\varphi_u = (v, 1, 1)$, $\varphi_v = (u, -1, 1)$

$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = v^2 + 2$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = uv$

$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = u^2 + 2.$

Définition : 2.2

Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière, et

$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u,v) \longmapsto \varphi(u,v)$ une surface paramétrée régulière de support S.

γ est dite tracée sur S, si pour tout $t \in I$:

$$\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

Proposition 2.1

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe parametrée régulière tracée sur une surface paramétrée régulière de support S, si $a, b \in I$, $a < b$ alors la longueur de l'arc $\gamma/[a,b]$ est donnée par

$$l_{\gamma/[a,b]} = \int_a^b \sqrt{E.(u')^2 + 2F u'.v' + G (v')^2}\, dt$$

preuve :

On a : $l_{\gamma/[a,b]} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}\, dt$

$$\gamma'(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_u . u' + \varphi_v . v' \quad \text{ou } u' = \frac{du}{dt},\ v' = \frac{dv}{dt}$$

$$l_{\gamma/[a,b]} = \int_a^b \sqrt{\langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2}\, dt$$

Remarque : 2.1

- Si $s = \phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| du$ l'abscisse curviligne d'origine a

$$s = \int_a^t \sqrt{E u'^2 + 2F u'.v' + G v'^2}\, dt \quad \text{alors}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

d'où $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du.dv + G\,dv^2$

c'est une autre notation de la première forme fondamentale.

On écrit : $I = E\,du^2 + 2F\,du.dv + G\,dv^2$

• d'autre part : $d\varphi = \varphi_u \cdot du + \varphi_v \cdot dv$

$d\varphi^2 = \langle d\varphi, d\varphi \rangle = E\,du^2 + 2F\,du \cdot dv + G\,dv^2 = I$

Corollaire 2.1

Si θ est l'angle entre φ_u et φ_v alors

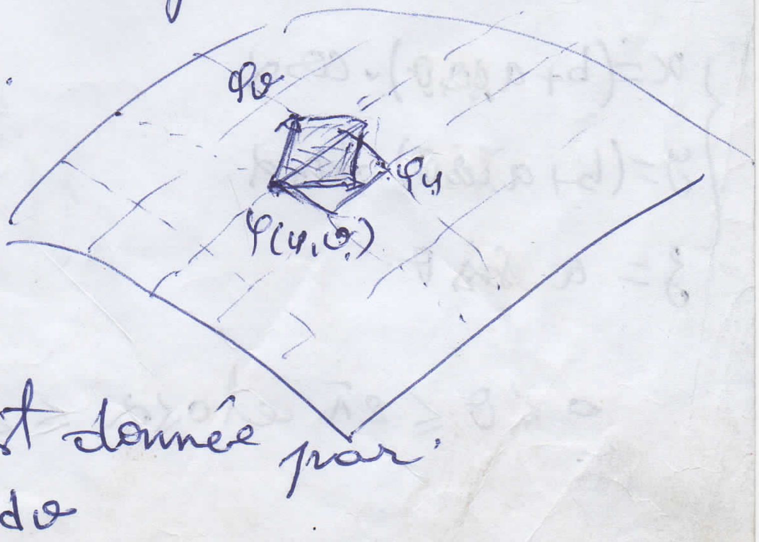
$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Définition : 2.3

Soit $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S.

L'aire $\mathcal{A}$ de la surface S est définie par

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{U}} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, du\, dv.$$



Proposition 2.2

L'aire $\mathcal{A}$ de la surface S est donnée par

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Preuve :

On a : $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 + \langle \varphi_u , \varphi_v \rangle^2 =$

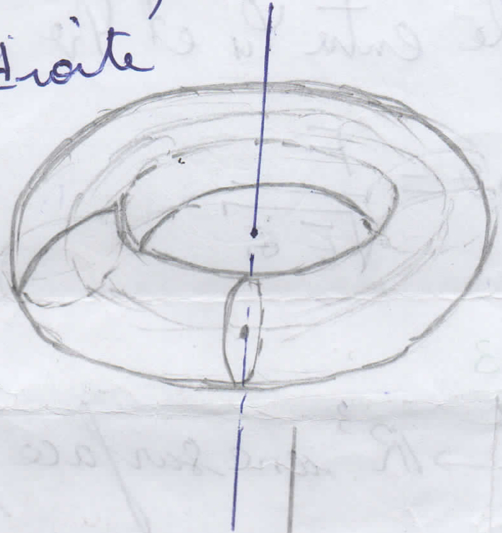
$$= \|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 \cdot \sin^2\theta + \|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 \cdot \cos^2\theta$$

$$= \|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 .$$

d'où $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = E^2 \cdot G^2 - F^2 .$

Remarque 2.2

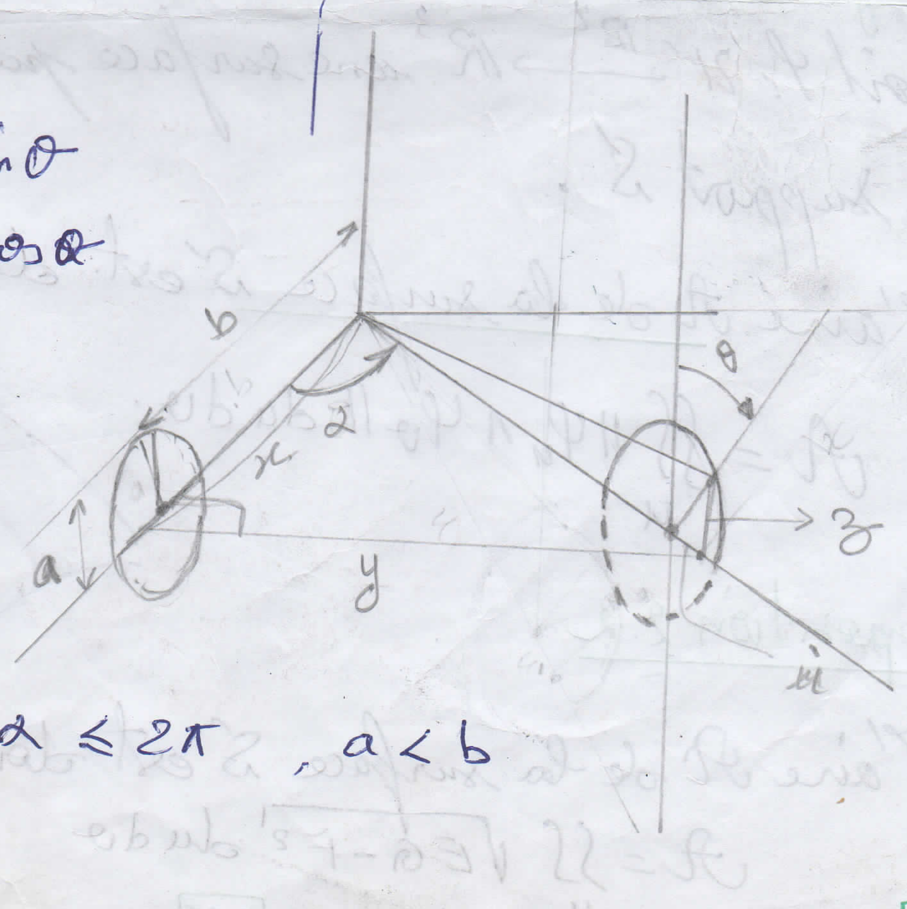
Le tore est la surface engendrée par la révolution d'un cercle (C) autour d'une droite



$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{u} \\ \sin\alpha = \dfrac{y}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u\cos\alpha \\ y = u\sin\alpha \end{cases}$$

$u = b + u'$

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{u'}{a} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = a\sin\theta \\ z = a\cos\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = (b + a\sin\theta) \cdot \cos\alpha \\ y = (b + a\sin\theta) \cdot \sin\alpha \\ z = a\cos\theta . \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $a < b$