## Exercice : 2.2

Calculer l'aire de tore défini par

$\varphi : [0, 2\pi]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\alpha, \theta) \longmapsto \varphi(\alpha, \theta) = ((b + a\sin\theta)\cos\alpha, (b + a\sin\theta)\sin\alpha, a\cos\theta)$

## Solution :

$\varphi_\alpha = (-(b + a\sin\theta)\sin\alpha, (b + a\sin\theta)\cos\alpha, 0)$

$\varphi_\theta = (a\cos\theta\cos\alpha, a\cos\theta\sin\alpha, -a\sin\theta)$

$E = \langle \varphi_\alpha, \varphi_\alpha \rangle = (b + a\sin\theta)^2$

$F = \langle \varphi_\alpha, \varphi_\theta \rangle = 0$

$G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = a^2$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\alpha\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b + a\sin\theta)\, d\alpha\, d\theta$$

$$= 2\pi a \left[ b\theta - a\cos\theta \right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab$$

## Définition : 2.4

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support $S$ ; $T_pS$ le plan tangent à $S$ en $p = \varphi(u, v)$ et

$n(u, v) = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v) = n_p$ le vecteur normal à $T_pS$

L'application $n : S \longrightarrow S^2$ est appelée
$p \longmapsto n(p) = n_p$

application de Gauss.

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \|(x,y,z)\| = 1\}$

## Remarque : 2.2

- L'application de Gauss est differensiable et son differentiel en $p$ est : $d_p n : T_p S \longrightarrow T_{n(p)} S^2$. comme $n(p) \perp T_p S$ et $n(p) \perp T_{n(p)} S^2$. d'où $T_p S$ et $T_{n(p)} S^2$ coincident :
alors on considère $d_p n$ comme une application linéaire de $T_p S$ dans lui même.

## Proposition 2.3

L'application $d_p n$ est autoadjointe (symetrique)
i.e $\forall w_1, w_2 \in T_p S$ : $\langle d_p n(w_1), w_2 \rangle = \langle w_2, d_p n(w_2) \rangle$

## Preuve :

on pose $w_1 = a_1 \varphi_u + b_1 \varphi_\theta$ et $w_2 = a_2 \varphi_u + b_2 \varphi_\theta$

$d_p n(w_1) = n_u \cdot a_1 + n_\theta \cdot b_1$ et $d_p n(w_2) = n_u a_2 + n_\theta b_2$

$\langle d_p n(w_1), w_2 \rangle = a_1 a_2 \langle n_u, \varphi_u \rangle + a_1 b_2 \langle n_u, \varphi_\theta \rangle + b_1 a_2 \langle n_\theta, \varphi_u \rangle +$
$+ b_1 b_2 \langle n_\theta, \varphi_\theta \rangle$ —— ①

Ce qui donne :

$$\mathrm{II}(w) = \langle n, \varphi_{uu} \rangle a^2 + 2 \langle n, \varphi_{uv} \rangle ab + \langle n, \varphi_{vv} \rangle b^2$$

on note : $L = \langle n, \varphi_{uu} \rangle$, $M = \langle n, \varphi_{uv} \rangle$, $N = \langle n, \varphi_{vv} \rangle$.

Les coefficients de $\mathrm{II}$.

**Exemple 2.2**

Determiner les cofficients de la seconde forme fondamentale de la surface $S$ paramétrée par

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (uv, u-v, u+v)$$

**Solution :**

$\varphi_u = (v, 1, 1)$, $\varphi_v = (u, -1, 1)$, $\varphi_{uu} = (0,0,0)$ ; $\varphi_{vv} = (0,0,0)$

$\varphi_{uv} = (1,0,0)$

$\varphi_u \wedge \varphi_v = (b_1, b_2, b_3)$

$$b_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad b_2 = -\begin{vmatrix} v & 1 \\ u & 1 \end{vmatrix} = u - v, \quad b_3 = \begin{vmatrix} v & 1 \\ u & -1 \end{vmatrix} = -u-v$$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{4 + u^2 + v^2 - 2uv + u^2 + v^2 + 2uv} = \sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}$$

$$n = \left( \frac{2}{\sqrt{4+2u^2+2v^2}}, \frac{u-v}{\sqrt{4+2u^2+2v^2}}, \frac{-u-v}{\sqrt{4+2u^2+2v^2}} \right)$$

$$L = \langle n, \varphi_{uu} \rangle = 0, \quad M = \langle n, \varphi_{uv} \rangle = \frac{2}{\sqrt{4+2(u^2+v^2)}}, \quad N = \langle n, \varphi_{vv} \rangle = 0$$

**Remarque 2.3**

Nous considerons $-\langle dn, d\varphi \rangle = -\langle n_u du + n_v dv, \varphi_u du + \varphi_v dv \rangle$

$\langle w_1, d_p n(w_2)\rangle = a_1 a_2 \langle \varphi_u, n_u\rangle + a_1 b_2 \langle \varphi_u, n_v\rangle +$

$b_1 a_2 \langle \varphi_v, n_u\rangle + b_1 b_2 \langle \varphi_v, n_v\rangle$ — ②

d'autre part : comme $\varphi_u$ et $\varphi_v$ sont orthogonaux à $n$ en tout point $(u,v)$. alors :

On dérive $\langle n, \varphi_u\rangle = 0$ par rapport à $v$ ; on obtient

$$\langle n_v, \varphi_u\rangle + \langle n, \varphi_{uv}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle n_v, \varphi_u\rangle = -\langle n, \varphi_{uv}\rangle.$$

en dérivant : $\langle n, \varphi_v\rangle = 0$ par rapport à $u$ on obtient

$$\langle n_u, \varphi_v\rangle + \langle n, \varphi_{vu}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle n_u, \varphi_v\rangle = -\langle n, \varphi_{vu}\rangle$$

d'où $\langle n_u, \varphi_v\rangle = \langle n_v, \varphi_u\rangle$ — ③

de ①, ② et ③ on trouve : $\langle w_1, d_p n(w_2)\rangle = \langle d_p n(w_2), w_1\rangle$

Définition : 2.5

On définit une forme quadratique sur $T_pS$, notée $\mathrm{II}$ par :

$\forall w \in T_pS : \mathrm{II}(w) = -\langle d_p n(w), w\rangle$,

s'appelle seconde forme fondamentale de $S$

Notation :

Si $w = a\varphi_u + b\varphi_v \in T_pS$, $d_p n(w) = n_u \cdot a + n_v \cdot b$

$\mathrm{II}(w) = -\langle n_u \cdot a + n_v b, a\varphi_u + b\varphi_v\rangle =$

$= -\langle n_u, \varphi_u\rangle a^2 - (\langle n_u, \varphi_v\rangle + \langle n_v, \varphi_u\rangle) ab - \langle n_v, \varphi_v\rangle b^2$

d'autre par on
$$\begin{cases} 0 = \langle n, \varphi_u\rangle_u = \langle n_u, \varphi_u\rangle + \langle n, \varphi_{uu}\rangle = 0 \\ 0 = \langle n, \varphi_u\rangle_v = \langle n_v, \varphi_u\rangle + \langle n, \varphi_{uv}\rangle = 0 \\ 0 = \langle n, \varphi_v\rangle_u = \langle n_u, \varphi_v\rangle + \langle n, \varphi_{vu}\rangle = 0 \\ 0 = \langle n, \varphi_v\rangle_v = \langle n_v, \varphi_v\rangle + \langle n, \varphi_{vv}\rangle = 0 \end{cases}$$

$= -\langle n_u, \varphi_u \rangle du^2 - (\langle n_u, \varphi_v \rangle + \langle n_v, \varphi_u \rangle) du dv - \langle n_v, \varphi_v \rangle dv^2$

$= \langle n, \varphi_{uu} \rangle du^2 + 2 \langle n, \varphi_{uv} \rangle du dv + \langle n, \varphi_{vv} \rangle dv^2$

$= \langle n, \varphi_{uu} du^2 + 2 \varphi_{uv} du dv + \varphi_{vv} dv^2 \rangle$

$= \langle n, d^2\varphi \rangle$

d'où $-\langle dn, d\varphi \rangle = \langle n, d^2\varphi \rangle = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = \mathrm{II}$

c'est une autre notation de la seconde forme fondamentale

## Définition 2.6

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support $S$, $n$ le vecteur normal unitaire à $T_pS$ au point $P = \varphi(u_0, v_0)$, et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par sa longueur tracée sur $S$, passant par $P$, et $T(s)$ le vecteur tangent unitaire à la courbe $\gamma$ au point $P$.

On appelle courbure normale de $\gamma$ dans $S$ au point $P$ notée $K_n = K_n(s)$, le scalaire : $K_n(s) = \langle \frac{dT(s)}{ds}, n \rangle = \langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, n \rangle$ ; $\forall s \in I$

## Remarque : 2.4

1) Si : $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s)) \Rightarrow d^2\gamma = d^2\varphi$.

$$K_n(s) = \langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, n \rangle = \frac{\langle d^2\gamma, n \rangle}{ds^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

2) Si $N(s)$ le vecteur normal principal de $\gamma$ au point P et $K(s)$ la courbure de $\gamma$, alors:

$$K_n(s) = \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, n \right\rangle = \langle K(s).N(s), n \rangle = K(s).\cos\theta.$$

où $\theta$ est l'angle entre $N(s)$ et $n$.

3) On a $T(s) \in T_pS$ alors $\langle n, T(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \frac{dn}{ds}, T(s) \right\rangle + \left\langle n, \frac{dT(s)}{ds} \right\rangle = 0$

$$II(T(s)) = -\langle d_p n(T(s)), T(s) \rangle = -\left\langle \frac{dn}{ds}(s), T(s) \right\rangle$$

$$II(T(s)) = \left\langle n(s), \frac{dT}{ds}(s) \right\rangle = K_n(s)$$

Exemple: 2.3

Calculer la courbure normale pour la sphère $S$ de rayon $a$.

Solution:

On a: $\varphi : ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\alpha, \theta) \longmapsto \varphi(\alpha, \theta) = (a\cos\alpha\sin\theta, a\sin\alpha\sin\theta, a\cos\theta)$

$\varphi_\alpha = (-a\sin\alpha\sin\theta, a\cos\alpha\sin\theta, 0)$

$\varphi_\theta = (a\cos\alpha\cos\theta, a\sin\alpha\cos\theta, -a\sin\theta)$

$E = a^2\sin^2\theta$, $F = 0$, $G = a^2$

$\varphi_\alpha \wedge \varphi_\theta = (b_1, b_2, b_3)$

$= (-a^2\cos\alpha\sin^2\theta, -a^2\sin\alpha\sin^2\theta, -a^2\cos\theta\sin\theta)$

$\|\varphi_\alpha \wedge \varphi_\theta\| = a^2\sin\theta$