$n=(-\cos\alpha\sin\theta, -\sin\alpha\sin\theta, -\cos\theta)$

$\varphi_{\alpha\alpha}=(-a\cos\alpha\sin\theta, -a\sin\alpha\sin\theta, 0)$

$\varphi_{\alpha\theta}=(-a\sin\alpha\cos\theta, a\cos\alpha\cos\theta, 0)$

$\varphi_{\theta\theta}=(-a\cos\alpha\sin\theta, -a\sin\alpha\sin\theta, -a\cos\theta)$

$L=+a\sin^2\theta$, $M=0$, $N=a$

$$K_n=\frac{L d\alpha^2+2M d\alpha d\theta+N d\theta^2}{E d\alpha^2+2F d\alpha d\theta+G d\theta^2}$$

$$K_n=\frac{a\sin^2\theta d\alpha^2+a d\theta^2}{a^2\sin^2\theta d\alpha^2+a^2 d\theta^2}=\frac{1}{a}=\text{constante}.$$

Exemple 2.4

Calculer la courbure normale pour le cylindre

Solution:

$$\varphi :]0,2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v)\longmapsto \varphi(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$$

$\varphi_u=(-\sin u, \cos u, 0)$, $\varphi_v=(0,0,1)$

$E=1$, $F=0$, $G=1$, $I=du^2+dv^2$

$\varphi_u\wedge\varphi_v=(\cos u, \sin u, 0)$

$\|\varphi_u\wedge\varphi_v\|=1$.

$n=(\cos u, \sin u, 0)$

$\varphi_{uu}=(-\cos u,-\sin u,0)$, $\varphi_{uv}=0$, $\varphi_{vv}=0$

$L=-1$, $M=0$, $N=0$

$II=-du^2$

$$K_n=\frac{II}{I}=\frac{-du^2}{du^2+dv^2} \text{ dépend seulement de } \frac{du}{dv}$$

On peut choisir $du^2+dv^2=r^2>$; $du=r\cos\theta$, $dv=r\sin\theta$

$K_n=-\cos^2\theta$, $\theta\in]0,2\pi]$.

Proposition : 2.4

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ application linéaire, alors il existe une base $\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, telle que dans cette base f est diagonalisable. dans ce cas f admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1\geq\lambda_2$, qui sont respectivement le maximum et le minimum de la forme quadratique $Q(w)=\langle f(w),w\rangle$, où $w\in\mathbb{R}^2$, $\|w\|=1$

Preuve :

Soit $C=\{w\in E\ /\ \|w\|=1\}$ cercle d'unité.

On pose $\lambda_1=\max\limits_{w\in C} Q(w)$

d'où $Q(w) = x_1^2 \lambda_1 + x_2^2 \lambda_2$; $\forall w = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\langle f(w), w \rangle = {}^t w \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} w =$$

d'où f est diagonalisable.

$$\boxed{\|w\|^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1}$$

Pour $w = x_1 e_1 + x_2 e \in C$, on pose $x = x_1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x^2 - 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$Q(w) = x^2 \lambda_1 + (1 - x^2)\lambda_2 =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) x^2 + \lambda_2 = g(x)$$

$g'(x) = 2(\lambda_1 - \lambda_2) x \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-1		0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$Q(w) = g(x)$	λ_1	$\searrow$	λ_2	$\nearrow$	λ_1

alors $\lambda_2 = \min\limits_{w \in C} Q(w)$

Remarque : 2.5

1) Soit $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = \varphi_u \cdot u' + \varphi_v \cdot v'$

si $p = \gamma(0) = \varphi(u(0), v(0))$, en considérant $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ une base de $T_p S$

On a : $d_p n(\gamma'(t)) = n_u \cdot u' + n_v \cdot v'$

On choisit e_1 tel que $Q(e_1)=\lambda_1$

On choisit $e_2 \perp e_1$ et $\|e_2\|=1$ et on pose $\lambda_2 = Q(e_2)$

Pour tout $w \in E\setminus\{0\}$, $\frac{w}{\|w\|} \in C$

$$Q\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \left\langle f\left(\frac{w}{\|w\|}\right), \frac{w}{\|w\|}\right\rangle = \frac{1}{\|w\|^2}\langle f(w), w\rangle = \frac{1}{\|w\|^2} Q(w)$$

On en déduit que : $Q\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \leq \lambda_1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\|w\|^2} Q(w) \leq \lambda_1 \Rightarrow Q(w) \leq \lambda_1 \|w\|^2 \quad — \ *$$

Si $w = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $\|w\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$$Q(w) = Q(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \langle f(x_1 e_1 + x_2 e_2), x_1 e_1 + x_2 e_2\rangle$$

$$= \langle x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2), x_1 e_1 + x_2 e_2\rangle$$

$$= x_1^2 \langle f(e_1), e_1\rangle + x_2^2\langle f(e_2), e_2\rangle + x_1 x_2 \left[\langle f(e_1), e_2\rangle + \langle e_1, f(e_2)\rangle\right]$$

$$= x_1^2 Q(e_1) + x_2^2 Q(e_2) + x_1 x_2 \left[\langle f(e_1), e_2\rangle + \langle e_1, f(e_2)\rangle\right]$$

Comme $\begin{cases} Q(e_1) = \lambda_1 \Leftrightarrow \langle f(e_1), e_1\rangle = \lambda_1 \Leftrightarrow f(e_1) = \lambda_1 e_1 \\ Q(e_2) = \lambda_2 \Leftrightarrow \langle f(e_2), e_2\rangle = \lambda_2 \Leftrightarrow f(e_2) = \lambda_2 e_2 \end{cases}$

Comme n_u et n_v dans T_pS

on pose : $n_u = w_{11}\varphi_u + w_{21}\varphi_v$ et $n_v = w_{12}\varphi_u + w_{22}\varphi_v$

et par conséquent :

$$d_p n(\gamma'(t)) = (w_{11}\dot{u} + w_{12}\dot{v})\varphi_u + (w_{21}\dot{u} + w_{22}\dot{v})\varphi_v$$

$$d_p n\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12}\\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix}$$

La matrice $W = (w_{ij})$ de l'application $d_p n$ dans la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ s'appelle la matrice de Weingarten.

2) D'apres la proposition 2.4. il existe une base $\{w_1, w_2\}$ orthonormée telle que l'application $d_p n$ est diagonalisable (la matrice W est diagonalisable) dans cette base.

il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 \geq k_2$ les valeurs propres de $d_p n$

$k_1 = \max\limits_{\|w\|=1} II(w)$, $k_2 = \min\limits_{\|w\|=1} II(w)$, où $II(w) = -\langle d_p n(w), w\rangle$

$$= -x_1^2 k_1 - x_2^2 k_2, \quad w = x_1 w_1 + x_2 w_2.$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k_1 & 0\\ 0 & -k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} \quad \text{i.e} \quad \begin{cases} d_p n(w_1) = -k_1 w_1\\ d_p n(w_2) = -k_2 w_2\end{cases}$$