Chapitre 2

Sous-variété d'une variété Riemannienne

2.1 Connexion induite et la deuxiéme forme fondamentale

Proposition 2.1.1 *Soient $(N, \mathcal{A})$ une variété de dimension n et de classe C^r, m un entier positif où $n > m$ et M un sous espace de N. Si il existe une carte $(U_p, \Phi_p) \in \mathcal{A}$ en $p \in M$ avec*

$$\begin{aligned} \Phi_p \quad &: \quad U_p \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \\ \Phi_p(U_p \cap M) \quad &= \quad \Phi_p(U_p) \cap (\overset{m}{\mathbb{R}^{n}} \times \{0\}), \end{aligned}$$

alors $\mathcal{B} = \{(U_p \cap M, \pi \circ \Phi_{p/U_p \cap M}) / \ p \in N\}$ est un atlas de classe C^r de M, où M est muni de la topologie induite par celle de N et π la projection de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ dons $\mathbb{R}^m$.

En particulier, $(M, \mathcal{B})$ est une variété de dimension $\overset{m}{n}$ et de classe C^r.

Définition 2.1.2 *La variété $(M, \mathcal{B})$ de la proposition precedente est appellée une* ***sous variété*** *de $(N, \mathcal{A})$. Le nombre $(n - m)$ est la codimension de M. dans N.*

Définition 2.1.3 *Soient M, N deux variétés de dimension m, n respectivement, f une application de classe C^∞ de M dans N et $p \in M$.*

1) *On dit que* f *est une* ***immersion*** *(resp.**submersion**) au point* p *si l'application* $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ *soit injective (resp. surjective), c'est- à-dire,* $rg_pf = m$ *(resp* $rg_pf = n$*).*

2) f *est dite* ***immersion*** *(resp.**submersion**) si* f *est* ***immersion*** *(resp.* ***submersion****) en tout point de* M*.*

3) *On dit que* f *est* ***étale*** *au point* p *si* f *à la fois une immersion et une submersion au point* p*, c'est à dire,* f *réalise un automorphisme locale en* p*.*

4) f *est dite* ***étale*** *si* f *est* ***étale*** *en tout point de* M

5) *On dit que* f *est une* ***subimmersion*** *en* p*,s'il existe un voisinage* U *ouvert de* p *tel que le* rg_pf *soit constant en tout point de* M*.*

6) f *est dite une* ***subimmersion*** *si* f *est* ***subimmersion*** *en tout point de* M*.*

7) *On dit que* f *est un* ***plongement*** *si* f *est une immersion et realise un homéomorphisme de* M *sur* $f(M)$ *muni de la topologie induite par celle de* N*.*

Remarque 2.1.4 *Soient* M*,* N *deux variétés de dimension* m, n *où* $n > m$*, et* i *une immersion de* M *dans* N*. Si la variété* N *(resp.* M*) est couverte par un système de coordonnées locales* $\{V, u^A\}$ *(resp.*$\{U, x^h\}$*), alors la sous-variété* M *est représentée locallement par*

$$u^A = u^A(x^h) \tag{2.1.1}$$

Dans le suivant, nous identifierons des champs de vecteurs dans M *et leurs images par l'application différentiable* i*, c'est à dire, si* X *un champ de vecteur dans* M*, on identifié* X *et* $i_*(X)$*.*

Donc, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ *a une expression locale* $X = X^h\partial_h$ *où* $\partial_h = \partial/\partial x^h$*, alors* X *est aussi a une expression locale dans* N

$$X = B_h^A X^h \partial_A \tag{2.1.2}$$

où $\partial_A = \partial/\partial u^A$ *et* $B_h^A = \partial u^A/\partial x^h$ *([6]).*

Définition 2.1.5 *Soient* N *une variété,* M *une sous-variété de* N *et* X *un champs de vecteur sur* M*. Soit* U *un ouvert de* N *tel que* $U \cap M \neq \phi$ $\underbrace{(M \subset U)}$*. Une* ***extension locale*** *de* X *sur* U *est un champs de vecteur* $\tilde{X} \in \underbrace{C^\infty(TU)}$ *tel que* $\tilde{X}_{/M} = X$*.*

Si $U = N$ alors $\tilde{X}$ est dite une ***extension globale.***

Définition 2.1.6 *Soient $(N^n, \bar{g})$ une variété Riemannienne et M^m une sous-variété de N. Le champ de tenseur g défini par :*

$$g : \mathfrak{X}(M)^{\overset{2}{r}} \to C^{\infty}(M) : g(X,Y)(p) = \bar{g}_p(i_* X_p, i_* Y_p) \cdot$$

$\bar{g}_p(X_p . Y_p)$

est une métrique Riemannienne sur M appellé la métrique induit sur M.

Remarque 2.1.7 *Soient $\tilde{X}$ une extension de X. Si $\tilde{X}, X$ à des expressions locales $\tilde{X} = \tilde{X}^A \partial_A$, $X = X^h \partial_h$ respectivement, alors de l'equation (2.1.1) on a $X = B_h^A X^h \partial_A$, i.e, $\tilde{X}^A$ est l'extension de $B_h^A X^h$.*

En coodonnées locales, $g_{ij} = \bar{g}_{AB} B_i^A B_j^B$. avec $g = g_{ij} dx^i dx^j$ et $\bar{g} = \bar{g}_{AB} du^A du^B$.

Définition 2.1.8 *Soient $(N^n, \bar{g})$ une variété Riemannienne et M^m une sous variété de N. Pour un point $p \in M$ on définie* ***l'espace normal*** *$N_p M$ par*

$$N_p M = T_p^{\perp}(M) = \{v \in T_p N \ / \ \bar{g}(v,w) = 0 \ \ \forall w \in T_p M\}$$

et ***Le fibré normal*** *de M dans N est définie par*

$$NM = T^{\perp}(M) = \underset{p \in M}{\cup} T_p^{\perp}(M) = \{(p,v) \ / \ p \in M, \ \ v \in T_p^{\perp}(M)\}$$

Remarque 2.1.9 *Le fibre tangent de N, restrain a M , est la somme direct du fibre tangent TM de M et le fibré normal $T^{\perp}(M)$ de M dans N,* ***i.e***

Pour tout $p \in M$ on a la décompostion orthonormal $T_p N = T_p M \oplus N_p M$ .où

$$TN_{/M} = TM \oplus T^{\perp}(M)$$

Théorème 2.1.10 ([2]) *Soient $(N^n, \bar{g})$ une variété Riemannienne et M^m une sous variété de N. Alors le fibré normal $\left(T^{\perp}(M), M, \pi\right)$ est un fibré vectoriel au dessus de M de dimension $(n-m)$.*

Proposition 2.1.11 *Soient $(N^n, \bar{g})$ une variété Riemannienne, M^m une sous variété de N, X et Y deux champs de vecteurs arbitraire sur M et $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont deux extensions de*

X et Y respectivement. Alors $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_{/M}$ est indépendent des extensions de $\tilde{X},\tilde{Y}$, et on a $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_{/M}=[X,Y]$.

Preuve. Si $\tilde{X}=\tilde{X}^A\partial_A$ et $\tilde{Y}=\tilde{Y}^B\partial_B$, alors on a

$$\tilde{X}^A_{/M}=B^A_hX^h \quad \text{et} \quad \tilde{Y}^A_{/M}=B^A_hY^h\,(u) \tag{2.1.3}$$

i.e $\tilde{X}^A$ et $\tilde{Y}^A$ des extensions de $B^A_hX^h$ et $B^A_hY^h$, respectivement.

On sait

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right](f) &= \tilde{X}\tilde{Y}(f)-\tilde{Y}\tilde{X}(f)\\
&= \tilde{X}^B\partial_B(\tilde{Y}^A\partial_A(f))-\tilde{Y}^B\partial_B(\tilde{X}^A\partial_A(f))\\
&= \tilde{X}^B\tilde{Y}^A\partial_B(\partial_A(f))+\tilde{X}^B\partial_A(f)\,\partial_B(\tilde{Y}^A)\\
&\quad -\tilde{Y}^B\tilde{X}^A\partial_B(\partial_A(f))-\tilde{Y}^B\partial_A(f)\,\partial_B(\tilde{X}^A)\\
&= \tilde{X}^B\partial_B(\tilde{Y}^A)\partial_A(f)-\tilde{Y}^B\partial_B(\tilde{X}^A)\partial_A(f)\\
&= \left[\tilde{X}^B\partial_B(\tilde{Y}^A)-\tilde{Y}^B\partial_B(\tilde{X}^A)\right]\partial_A(f)
\end{aligned}$$

par consequent, $\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_{/M}$ à des composentes

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]^A_{/M} &= (\tilde{X}^B\partial_B(\tilde{Y}^A)-\tilde{Y}^B\partial_B(\tilde{X}^A))_{/M}\\
&= (B^B_hX^h\partial_B(\tilde{Y}^A)-B^B_hY^h\partial_B(\tilde{X}^A))_{/M}\\
&= X^h\partial_h(B^A_iY^i)-Y^h\partial_h(B^A_iX^i)\\
&= X^hB^A_i\partial_h(Y^i)+X^hY^i\partial_h(B^A_i)-Y^hX^i\partial_h(B^A_i)\\
&\quad -Y^hB^A_i\partial_h(X^i)\\
&= B^A_i(X^h\partial_h(Y^i)-Y^h\partial_h(X^i))\\
&= B^A_i\,[X,Y]^i
\end{aligned}$$

(puisque $\partial_h\left(B^A_i\right)=\partial_h\left(\partial u^A/\partial x^i\right)=\partial_h\partial_i\left(u^A\right)=\partial_i\partial_h\left(u^A\right)=\partial_i\left(B^A_h\right)$donc on a $X^hY^i\partial_h(B^A_i)-Y^hX^i\partial_h(B^A_i)=X^hY^i\partial_h(B^A_i)-Y^iX^h\partial_i(B^A_h)=0.$)

Ce qui montre que $\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]_{/M}$ ne dépend pas de l'extension de $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ réspectivement, et