est égale à $[X,Y]$ ..car

$$
\begin{aligned}
\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_{/M} &= \left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]^{A}_{/u=u(x)}\partial_A \\
&= B_i^A\,[X,Y]^i\,\partial_A \\
&= [X,Y]^i\,\partial_h \\
&= [X,Y]
\end{aligned}
$$

■

Proposition 2.1.12 *Soient $(N^n,\bar{g})$ une variété Riemannienne, M^m une sous-variété de N, X et Y deux champs de vecteurs sur M, $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ des extensions de X et Y, respectivement. Alors $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})_{/M}$ ne dépend pas des extensions.On note $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})_{/M}$ par $\bar{\nabla}_X Y$ et on a*

$$
\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h\,(X,Y) \tag{2.1.5}
$$

où $\bar{\nabla}$ (resp. ∇) est la connexions définie sur N (resp. M) par rapport a la métrique $\bar{g}$ (resp. g) et $h\,(X,Y)$ un champ de vecteur normal sur M et il est symétyrique et bilinéaire dans X et Y.

Preuve. Soit $\Gamma^C_{BA}=\{^{\,C}_{BA}\}$ les composentes de la connexion Riemannienne$\bar{\nabla}$. Alors les composentes de $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$ sont donné par

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} &= \bar{\nabla}_{\bar{X}^B\partial_B}\bar{Y}^A\partial_A \\
&= \bar{X}^B\bar{\nabla}_{\partial_B}\bar{Y}^A\partial_A \\
&= \bar{X}^B\left(\partial_B\left(\bar{Y}^A\right)\partial_A+\bar{Y}^A\bar{\nabla}_{\partial_B}\partial_A\right) \\
&= \bar{X}^B(\partial_B\left(\bar{Y}^A\right)\partial_A+\bar{Y}^A\{^{\,C}_{BA}\}\partial_C) \\
&= \bar{X}^B(\partial_B\left(\bar{Y}^C\right)\partial_C+\bar{Y}^A\{^{\,C}_{BA}\}\partial_C) \\
&= \bar{X}^B(\partial_B\left(\bar{Y}^C\right)+\{^{\,C}_{BA}\}\bar{Y}^A)\partial_C
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}\right)_{/M} = \bar{\nabla}_X Y = \bar{X}^B(\partial_B\left(\bar{Y}^C\right)+\{^{\,C}_{BA}\}\bar{Y}^A)_{/M}\partial_C
$$

$$
\begin{aligned}
&= B_i^B X^i (\partial_B \left(\bar{Y}^C\right) + \{{}^{C}_{BA}\} B_j^A Y^j)_{/M} \partial_C \\
&= X^i (\partial_i (B_j^C Y^j) + \{{}^{C}_{BA}\} B_i^B B_j^A Y^j) \partial_C
\end{aligned}
$$

Donc $\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}\right)_{/M}$ ne dépend pas des extensions.
De la remaque (2.1.9) , on voit que $\bar{\nabla}_X Y$ peut étre exprimer sous forme

$$
\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h\left(X, Y\right)
$$

:

ou $\nabla_X Y$ est un vecteur tangent a M et $h\left(X, Y\right)$ est un champs vecteur normale. Renplaçant X et Y par αX et βY, respectivement, α et β sont des fonctions sur M, on a

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\alpha X} \beta Y &= \alpha \bar{\nabla}_X \beta Y \\
&= \alpha \left(\beta \bar{\nabla}_X Y + X\left(\beta\right) Y\right) \\
&= \alpha X\left(\beta\right) Y + \alpha\beta \bar{\nabla}_X Y \\
&= \alpha X\left(\beta\right) Y + \alpha\beta \nabla_X Y + \alpha\beta h\left(X, Y\right)
\end{aligned}
$$

et en d'une autr part

$$
\bar{\nabla}_{\alpha X} \beta Y = \nabla_{\alpha X} \beta Y + h\left(\alpha X, \beta Y\right)
$$

Donc $\nabla_{\alpha X} \beta Y = \alpha X\left(\beta\right) Y + \alpha\beta \nabla_X Y$ et $h\left(\alpha X, \beta Y\right) = \alpha\beta h\left(X, Y\right)$
La premiere equation montre que ∇ definie une connexion sur M et la deuxiéme equation montre que h est biliniaire dans X et Y, par consequent l'additive est triviale.
Puisque la connexion $\bar{\nabla}$ est de torsion libre, on a, de la proposition (2.1.11)

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y] \\
&= \nabla_X Y + h\left(X, Y\right) - \nabla_Y X - h\left(Y, X\right) - [X, Y] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] + h\left(X, Y\right) - h\left(Y, X\right)
\end{aligned}
$$

par comparisant les parties tangentielles et normales, on trouve

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \text{ et } h(X,Y) - h(Y,X) = 0$$

Cette equation montre que ∇ est de torsion libre et h est symétrique ■

Remarque 2.1.13 *Comme la connexion $\bar{\nabla}$ est* ***compatible avec*** *$\bar{g}$, on a*

$$\begin{aligned}
\nabla_X (g(Y,Z)) &= X(g(Y,Z)) \\
&= X(\bar{g}(Y,Z)) \\
&= \bar{\nabla}_X(\bar{g}(Y,Z)) \\
&= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X Y, Z\right) + \bar{g}\left(Y, \bar{\nabla}_X Z\right) \\
&= \bar{g}(\nabla_X Y + h(X,Y), Z) + \bar{g}(Y, \nabla_X Z + h(X,Z)) \\
&= \bar{g}(\nabla_X Y, Z) + \bar{g}(h(X,Y), Z) + \bar{g}(Y, h(X,Z)) + \bar{g}(Y, \nabla_X Z) \\
&= \bar{g}(\nabla_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \nabla_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)
\end{aligned}$$

pour tout champs de vecteurs X, Y, et Z sur M.

Ceci on a montré que ∇ est une connexion de la métrique induit g.

Définition 2.1.14 *La connexion ∇ appellé la connexion induit et h appellé* ***la seconde forme fondamental*** *du sous-variété M.*

Proposition 2.1.15 ([7]) *Soient ζ un champ de vecteur normal sur M et X un champ de vecteur sur M.On peut alors décomposer $\bar{\nabla}_X \zeta$ comme*

$$\bar{\nabla}_X \zeta = -(A_\zeta(X)) + \nabla^{\perp}_X \zeta \tag{2.1.6}$$

ou $-A_\zeta(X)$ et $\nabla^{\perp}_X \zeta$ sont, respectivement, la composente tangentielle et la composente normale de $\bar{\nabla}_X \zeta$.

Proposition 2.1.16 *i) $A_\zeta(X)$ est bilinéaire et par conséquent $A_\zeta(X)$ au point $p \in M$ depends seulement de ζ_p et X_p.*

ii) Pour tout champs de vecteurs X, Y et champs normales ζsur M, on a

$$g(A_\zeta(X), Y) = \bar{g}(h(X,Y), \zeta) \tag{2.1.7}$$