Preuve. (i) Pour tout fonction α et β sur M, on a

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\alpha X}\beta\zeta &= \alpha\bar{\nabla}_X\beta\zeta \\ &= \alpha\left(\beta\bar{\nabla}_X\zeta + X(\beta)\zeta\right) \\ &= \alpha X(\beta)\zeta - \alpha\beta A_\zeta(X) + \alpha\beta\nabla_X^\perp\zeta \\ &= -\alpha\beta A_\zeta(X) + \alpha X(\beta)\zeta + \alpha\beta\nabla_X^\perp\zeta\end{aligned}$$

en d'autre part

$$\bar{\nabla}_{\alpha X}\beta\zeta = -\left(A_{\beta\zeta}(\alpha X)\right) + \nabla_{\alpha X}^\perp\beta\zeta$$

Ceci implique que $\begin{cases} \alpha\beta A_\zeta(X) = A_{\beta\zeta}(\alpha X) & (7) \\ \\ \nabla_{\alpha X}^\perp\beta\zeta = \alpha X(\beta)\zeta + \alpha\beta\nabla_X^\perp\zeta & (8)\end{cases}$

d'ou $A_\zeta(X)$ est bilinéaire par rapport ζ et X, l'addition est triviale.

(ii) Soit Y un champ de vecteur arbitraire sur M. Alors on a

$$\begin{aligned}0 &= \bar{\nabla}_X\bar{g}(Y,\zeta) \\ &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_XY,\zeta\right) + \bar{g}\left(Y,\bar{\nabla}_X\zeta\right) \\ &= \bar{g}(\nabla_XY + h(X,Y),\zeta) + \bar{g}\left(Y,-(A_\zeta(X)) + \nabla_X^\perp\zeta\right) \\ &= \bar{g}(\nabla_XY,\zeta) + \bar{g}(h(X,Y),\zeta) + \bar{g}(Y,-(A_\zeta(X))) + \bar{g}\left(Y,\nabla_X^\perp\zeta\right) \\ &= \bar{g}(h(X,Y),\zeta) - \bar{g}(Y,A_\zeta(X)) \\ &= \bar{g}(h(X,Y),\zeta) - g(Y,A_\zeta(X))\end{aligned}$$

car $\bar{g}(\nabla_XY,\zeta) = \bar{g}\left(Y,\nabla_X^\perp\zeta\right) = 0.$ ■

Proposition 2.1.17 $\nabla^\perp$ *est une connexion métrique sur le fibré normal $T^\perp M$ de M dans N par rapport a la metrique induit sur $T^\perp M$.*

Preuve. de la formule (8) on voit que $\nabla^\perp$ une connexion sur le fibré normal $T^\perp M$.

$$\begin{aligned}\nabla^\perp \quad &: \quad \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)^\perp \\ (X,\zeta) \quad &\mapsto \quad \nabla_X^\perp\zeta\end{aligned}$$

De plus, pour chaque champs de vecteurs normal ζ et η dans $T^{\perp}M$, on a
$\bar{\nabla}_X\zeta = -(A_\zeta(X)) + \nabla^{\perp}_X\zeta$, et $\bar{\nabla}_X\eta = -(A_\eta(X)) + \nabla^{\perp}_X\eta$
Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\nabla^{\perp}_X\bar{g}(\zeta,\eta) &= X(\bar{g}(\zeta,\eta)) \\
&= \bar{\nabla}_X\bar{g}(\zeta,\eta) \\
&= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X\zeta,\eta\right) + \bar{g}\left(\zeta,\bar{\nabla}_X\eta\right) \\
&= \bar{g}\left(-(A_\zeta(X)) + \nabla^{\perp}_X\zeta,\eta\right) + \bar{g}\left(\zeta,-(A_\eta(X)) + \nabla^{\perp}_X\eta\right) \\
&= \bar{g}\left(-(A_\zeta(X)),\eta\right) + \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_X\zeta,\eta\right) - \bar{g}\left(\zeta,A_\eta(X)\right) + \bar{g}\left(\zeta,\nabla^{\perp}_X\eta\right) \\
&= \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_X\zeta,\eta\right) + \bar{g}\left(\zeta,\nabla^{\perp}_X\eta\right)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que la connexion $\nabla^{\perp}$ dans le fibré normale est une métrique avec la metric induit de $\bar{g}$. ■

Définition 2.1.18 *Un champ de vecteur normal ζ est dit **parallèle dans le fibre normal,** ou simplement **parallèle,** si on a $\nabla^{\perp}\zeta = 0$.*

Remarque 2.1.19 *Les formules (2.1.5) et (2.1.6) sont appellées la formule de* Gauss *et la formule de* Weingarten

Définition 2.1.20 *Une sous-variété M est dit **totallement géodésique** si la seconde forme fondamentale h est identiquement nulle*

$$h = 0 \tag{2.1.8}$$

Définition 2.1.21 *Soit ζ un champ de vecteur normale, si il existe*

$$A_\zeta = \rho I \tag{2.1.9}$$

*ou ρ , alors ζ s'ppelle une **section ombilicale** sur M, ou M est dit ombilical par rapport a ζ.*
*Si la sous-variété M est ombilical par rapport a toute champ de vecteur normal dans M,alors M est dit **totallement ombilical.***

Définition 2.1.22 *Soient $\zeta_1, ..., \zeta_{n-m}$ une base orthonormale de l'espace normal $T_p^{\perp}M$ au point $p \in M$ et soit $A^i = A_{\zeta_i}$, alors*

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h(e_i, e_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n-m} \left(trace A^i\right) \zeta_i \tag{2.1.10}$$

est un vecteur normale en p qui est independent de la choix de la base orthonormale ζ_i.
H appellé le ***vecteur de courbure moyenne*** *en p.*
Une sous-variété est dite une ***sous variété minimale*** *si le vecteur de courbure moyenne est identiquement null.* ***i.e*** *$H = 0$*
Si il existe une fonction λ sur la sous-variété M telle que

$$\bar{g}(h(X, Y), H) = \lambda g(X, Y) \tag{2.1.11}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M, alors la sous-variété est appellée une ***sous-variété pseudo ombilical.***

Remarque 2.1.23 *Il est claire que tout sous-variété minimale est une sous variété pseudo umbilical, avec (2.1.11) $\lambda = \bar{g}(H, H)$.*

Proposition 2.1.24 *Une sous variété totallement umbilical est totallement géodésique si et seulement si il est minimale.*

2.2 Equations de Gauss, Codazzi, et Ricci

Proposition 2.2.1 *Soient N une variété Riemannienne, M une sous-variété de M et $\bar{R}$, R les tenseur de courbure de$N$, M respectivement. Alors pour tout champs de vecteurs X, Y, Z dans N*

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y) Z &= R(X, Y) Z + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) \\ &\quad + \bar{\nabla}_X h(Y, Z) - \bar{\nabla}_Y h(X, Z) \end{aligned}$$

Preuve. Soient X, Y, Z des champs de vecteur sur M, donc par la formule de Gauss (2.1.5), on trouve