$$= -\bar{g}\left(h\left(X, A_{\zeta}\left(Y\right)\right), \eta\right) + \bar{g}\left(h\left(Y, A_{\zeta}\left(X\right)\right), \eta\right) + \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\zeta, \eta\right) - \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\zeta, \eta\right)$$
$$-\bar{g}(\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\zeta, \eta)$$

Ainsi, si nous notons par R^N *le tenseur de courbure de la connexion normal*

$\nabla^{\perp}$ *sur le fibre normal* $T^{\perp}M$*, qui'est,*

$$R^N\left(X, Y\right)\zeta = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\zeta - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\zeta - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\zeta \tag{2.2.7}$$

alors nous avons

$$\begin{aligned}\bar{K}\left(X, Y, \zeta, \eta\right) &= K^N\left(X, Y, \zeta, \eta\right) - \bar{g}\left(h\left(X, A_{\zeta}\left(Y\right)\right), \eta\right) + \bar{g}\left(h\left(Y, A_{\zeta}\left(X\right)\right), \eta\right)\\ &= K^N\left(X, Y, \zeta, \eta\right) + \bar{g}\left(A_{\eta}A_{\zeta}\left(X\right), Y\right) - \bar{g}\left(A_{\eta}A_{\zeta}\left(X\right), Y\right)\\ &= K^N\left(X, Y, \zeta, \eta\right) - \bar{g}\left(\left[A_{\zeta}, A_{\eta}\right]\left(X\right), Y\right) \qquad (2.2.8)\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\bar{g}\left(h\left(X, A_{\zeta}\left(Y\right)\right), \eta\right) &= g\left(A_{\eta}\left(X\right), A_{\zeta}\left(Y\right)\right) = g\left(A_{\zeta}\left(X\right), A_{\eta}\left(Y\right)\right)\\ &= \bar{g}\left(h\left(Y, A_{\eta}\left(X\right)\right), \zeta\right) = \bar{g}\left(h\left(A_{\eta}\left(X\right), Y\right), \zeta\right)\\ &= g\left(A_{\zeta}A_{\eta}\left(X\right), Y\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{g}\left(h\left(Y, A_{\zeta}\left(X\right)\right), \eta\right) &= \bar{g}\left(h\left(A_{\zeta}\left(X\right), Y\right), \eta\right)\\ &= g\left(A_{\eta}A_{\zeta}\left(X\right), Y\right)\end{aligned}$$

ou $K^N\left(X, Y, \zeta, \eta\right) = \bar{g}\left(R^N\left(X, Y\right)\zeta, \eta\right)$ *et* $\left[A_{\zeta}, A_{\eta}\right] = A_{\zeta}A_{\eta} - A_{\eta}A_{\zeta}$

L'equation (2.2.8) *s'appelle* ***l'equation de*** RICCI.

Si N *est un espace de courbure constante* k*, alors nous avons*

$$\bar{R}\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)\bar{Z} = k\left(\bar{g}\left(\bar{Z}, \bar{Y}\right)\bar{X} - \bar{g}\left(\bar{Z}, \bar{X}\right)\bar{Y}\right)$$

pour tout champs de vecteurs $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ dans N.

Par conséquent, pour tous champs de vecteurs X, Y et Z dans M, $\bar{R}(X,Y)Z$ est un champ de vecteur dans M car $\left(\bar{R}(X,Y)Z = k\left(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y\right) \in \mathfrak{X}(M)\right)$

Donc, les équations de Gauss, Codazzi et de Ricci réduisent, respectivement

$$\begin{aligned} K(X,Y,Z,W) &= \bar{K}(X,Y,Z,W) + \bar{g}(h(X,W), h(Y,Z)) - \bar{g}(h(Y,W), h(X,Z)) \\ &= -\bar{g}(h(Y,W), h(X,Z)) + \bar{g}(h(X,W), h(Y,Z)) \\ &\quad + k\{g(Z,Y)g(X,W) - g(Z,X)g(Y,W)\} \qquad (2.2.9) \\ \dddot{\nabla}_X h(Y,Z) &= \dddot{\nabla}_Y h(X,Z) \qquad (2.2.10) \\ K^N(X,Y,\zeta,\eta) &= \bar{g}(\nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\zeta - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\zeta - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\zeta, \eta) = \bar{g}([A_\zeta, A_\eta](X), Y) \qquad (2.2.11) \end{aligned}$$

Définition 2.2.4 *Soit M une sous variété d'une variété Riemannienne, alors M est appellé une sous variété invariant de courbure si*

$$\left(\bar{R}(X,Y)Z\right)^N = 0 \qquad (2.2.12)$$

Remarque 2.2.5 *La formule* (2.2.12) *est équivalent à*

$$\dddot{\nabla}_X h(Y,Z) = \dddot{\nabla}_Y h(X,Z)$$

2.3 Sous variétés totallement omblical

Proposition 2.3.1 *Une sous variété totalement ombilic dans un espace de courbure sectionnelle constante k est aussi de la courbure constante $\left(k + |H|^2\right)$.*

Preuve. Soit $\{\zeta_i\}_i$ une base orthonormale dans le fibre normal $T^{\perp}M$. Alors on a

$$g\left(A_{\zeta_i}(X), Y\right) = \bar{g}(h(X,Y), \zeta_i) = \lambda^i g(X,Y) = \bar{g}\left(\lambda^i g(X,Y)\zeta_i, \zeta_i\right)$$

pour les fonctions λ^i dans M. Ceci implique que

$$trace\left(A_{\zeta_i}\right) = m\lambda^i \qquad (2.3.1)$$

et

$$h(X,Y) = g(X,Y)\lambda^i\zeta_i \qquad (2.3.2)$$

Donc nous avons

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \tag{2.3.3}$$

ou H est le vecteur de courbure moyenne.

Substituant ceci dans l'equation (2.2.9), nous trouvons

$$\begin{aligned}
K(X,Y,Z,W) &= k\{g(Z,Y)g(X,W) - g(Z,X)g(Y,W)\} \\
&\quad -\bar{g}(g(Y,W)H, g(X,Z)H) + \bar{g}(g(X,W)H, g(Y,Z)H) \\
&= k\{g(Z,Y)g(X,W) - g(Z,X)g(Y,W)\} \\
&\quad +\{-g(Y,W)g(X,Z) + g(X,W)g(Y,Z)\}\bar{g}(H,H) \\
&= (k + |H|^2)\{g(Z,Y)g(X,W) - g(Z,X)g(Y,W)\}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que la sous-variété M est de la courbure $(k + |H|^2)$ pour $m \geq 3$. ■