Chapitre 1

Généralités

1.1 Équations différentielles scalaires du 1er ordre

On appelle équation différentielle scalaire du 1er ordre toute équation de la forme

$$\frac{d}{dt}x = f(t,x), \tag{1.1}$$

avec $t \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est une fonction où $\mathbb{K}$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$. La fonction $x(t)$ est la fonction inconnue à déterminer.

Cette dernière équation est dite "scalaire" car l'image de la fonction f est dans $\mathbb{K}$. Rappelons à ce titre qu'en algèbre l'espace vectoriel défini par le produit cartésien $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ; ses éléments sont appelés "vecteurs" et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés "scalaires". On renvoie donc au cours d'algèbre pour la terminologie du mot "scalaire". On va se réduire dans la suite à l'ensemble des scalaires réels, c'est à dire : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. On dit que la fonction $x(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (1.1) sur I si elle est dérivable sur I et si elle vérifie

$$\forall t \in I \ : \ \frac{d}{dt}x = f(t,x).$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

L'équation différentielle (1.1) est dite du premier ordre car on dérive une fois par rapport à la variable t ; $(\frac{d}{dt}x(t))$.

Exemple 2. *L'équation suivante*

$$\dot{x} = \sin(t + x)$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre et dans ce cas

$$f(t, x) = \sin(t + x).$$

L'équation différentielle (1.1) est dite **autonome** si lorsque on remplace $x(t)$ par la variable z dans la fonction f alors f ne dépend plus de la variable t.

Exemple 3. *L'équation suivante*

$$\dot{x} = \sin(t + x),$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre non autonome, par contre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \sin(x),$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre autonome.

L'équation différentielle (1.1) est dite **linéaire scalaire avec second membre** ou **linéaire scalaire non-homogène** si elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son deux fonctions. L'équation différentielle (1.1) est donc dite **linéaire scalaire sans second membre** ou **linéaire scalaire homogène** si elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = a(t)x.$$

Une équation différentielle linéaire scalaire autonome avec ou sans second membre s'appelle en général *équation différentielle linéaire à coefficients constants.*

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional