La résolution des équations différentielles n'est pas toujours triviale. Pour cette raison on s'intéresse à des résultats d'existence et d'unicité.

1.1.1 Problème de Cauchy - Cas scalaire

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une *condition initiale*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ est la condition initiale de la solution $x(t)$ au temps t_0.
Problème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0. Est ce que le problème de Cauchy (P.C) admet une solution définie sur I.

1.1.1.1 Contre exemple

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(R) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

On cherche a savoir si ce problème admet une solution sur l'intervalle $[0,1]$. L'équation différentielle qui définit le problème de Cauchy précédent est une équation autonome. La solution constante nulle de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}x = x^2$ n'est pas une solution au problème de Cauchy (R) précédent car elle ne vérifie pas l'hypothèse de la condition initiale. Pour résoudre le problème, on intègre comme suit

$$\frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = 1 \longleftrightarrow \int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)}dt = \int_0^s 1dt.$$

Sachant que la condition initiale est donnée par $x(0) = 1$ alors

La fonction $X(s)$ est définie pour tout $s \in \mathbb{R}/\{1\}$, elle est continue et dérivable en particulier sur $[0,1[$. Comme $s \to_< 1$ on a $x(s) \to +\infty$ cela implique que $x(s)$ n'est pas définie en 1. Donc la fonction x est définie uniquement sur $[0,1[$ (Voir figure 4.1) et le problème de Cauchy (R) précédent n'admet pas de solution sur $[0,1]$ tout entier.

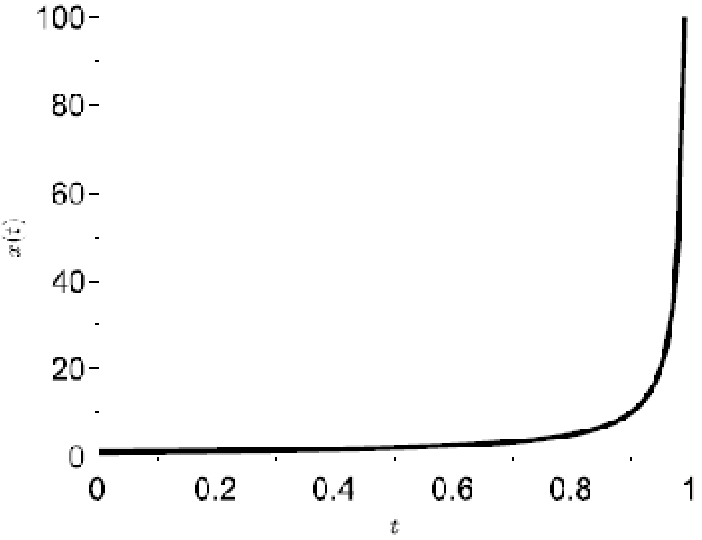

FIGURE 1.1 – On voit dans cette figure le graphe de la solution $x(t)$ du problème de Cauchy (R), la solution est tracée sur $[0,z]$ avec $z \approx 1$.

Dans le contre exemple précédent on a vu un exemple de problème de Cauchy qui n'admet pas de solution. On va voir dans ce qui suit des théorèmes et des propositions qui assurent l'existence de solutions sous certaines conditions. Pour cela on définit dans la définition suivante la notion de fonction lipschitzienne.

Définition 4 (Fonction lipschitzienne- Cas scalaire). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I s'il existe une constante $\kappa > 0$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le \kappa |x - y|, \quad \forall t \in I, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Soient I et D deux intervalles de $\mathbb{R}$, on note dans ce qui suit $C(I \times D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $I \times D$ dans $\mathbb{R}$.

1.1.1.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz cas scalaire

Le théorème suivant est démontré dans le cas général dans la section 2.1

Théorèm 5. *[Théorème de Cauchy-Lipschitz cas scalaire] Soit $f \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

avec $t_0 \in I$. Supposons que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I. Alors pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$ et pour tout t_0 dans I le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur I.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz précédent affirme que lorsque la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I alors le problème de Cauchy admet forcément une solution définie sur I tout entier. Revenant au contre exemple 1.1.1.1, on déduit que la fonction $f(z) = z^2$ n'est pas lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $[0,1]$. Car si elle y était alors pa le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (R) admettra une solution sur $I = [0,1]$ tout entier ce qui n'est pas le cas.

Proposition 6 (Régularité). *Si f est de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ sur un intervalle I alors la solution $x(t)$ si elle existe est de classe C^{k+1} sur I.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que f est de classe C^k sur I et que x n'est pas de classe C^k. Donc il existe $l < k$ tel que x est de classe C^l mais pas de classe C^{l+1}.

La fonction $f(t,x)$ est une composée des deux fonctions f et x et donc est de classe C^l; en effet $f \in C^l$ car $C^k \subset C^l$. La fonction $\frac{d^l}{dt^l}f(t,x)$ est donc continue. Or, $\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}x(t) = \frac{d^l}{dt^l}f(t,x)$ car $\dot{x} = f(t,x)$. On déduit que x est de classe C^{l+1}. Contradiction avec l'hypothse du départ. Donc x est de classe C^{k+1}. $\square$

Théorèm 7. *[Théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire scalaire] Soit l'équation différentielle linéaire scalaire avec second membre*

$$\frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t).$$

Supposons que $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$ et pour tout t_0 dans I le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

admet une solution sur I.

La section 1.1.4 donne une preuve du théorème précèdent.