1.1.2 Sous et sur-solution

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle scalaire et non-autonome suivante :

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.2}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (5), la différentiabilité de f implique que pour chaque condition initiale $x_a \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $x(t)$ vérifiant $x(a) = x_a$ définit et continue sur $[a,b]$, on définie donc dans la suite la notion de sur et sous-solution :

Définition 8 (Sous et sur-solution). Une fonction ψ de classe C^1 sur $[a,b]$ est dite une sous-solution de l'équation (1.2) sur $[a,b]$ si

$$\dot{\psi}(t) < f(t,\psi(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

elle est dite une **sur-solution** de l'équation (1.2) sur $[a,b]$ si

$$\dot{\psi}(t) > f(t,\psi(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

Théorèm 9 (Sous-solution). *Soit x une solution de l'équation (1.2) sur $[a,b]$ de condition initiale $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une sous-solution ψ de l'équation (1.2) de classe C^1 sur $[a,b]$ vérifiant $\psi(a) < x_a$, Alors :*

$$\psi(t) < x(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Démonstration. Supposons que ψ est une sous-solution de l'équation (1.2) sur $[a,b]$, et que $\psi(a) < x_a$. Par continuité il existe $\epsilon > a$ tel que

$$\psi(t) < x(t), \quad \forall t \in [a, a+\epsilon].$$

Posons

$$T^* = \sup_{t \geq a}\{a \leq s \leq t, \quad \psi(s) < x(s)\}.$$

Pour montrer le théorème on doit montrer que $T^* \geq b$. Par l'absurde supposons que $T^* < b$ alors

$$\dot{\psi}(t) < f(t, \psi(t)), \quad \forall t \in [a, T^*[.$$

Par définition T^* vérifie $\psi(T^*) = x(T^*)$. On a

$$\dot{\psi}(T^*) < f(T^*, \psi(T^*)) = f(T^*, x(T^*)) = \dot{x}(T^*).$$

Donc il existe $a < s < T^*$ avec s assez proche de T^* tel que $\psi(s) > x(s)$. Contradiction avec la définition de T^*. Donc $T^* \geq b$. □

De même on a la théorème suivant concernant les sur-solutions

Théorèm 10 (Sur-solution). *Soit x une solution de l'équation (1.2) de l'équation (1.2) sur $[a, b]$ de condition initiale $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une sur-solution ψ de*

classe C^1 sur $[a, b]$ vérifiant $\psi(a) > x_a$, Alors :

$$\psi(t) > x(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Même méthode de démonstration utilisée dans la preuve du théorème 9. □

Finalement on déduit de l'équation (1.3) la forme générale de la solution $x(t)$ du problème (E.L) de condition initiale $x(t_0) = x_0$ qui est donnée par

$$x(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)[x_0 + \int_{t_0}^{t} b(z)\exp(\int_{t_0}^{z} -a(s)ds)dz].$$