1.1.3 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall suivant permet d'avoir une estimation du compretement d'une solution du problème de Cauchy qui satisfait une certaine condition.

Lemme 11. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un point t_0 et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I. Supposons qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que*

$$|f(z, y)| \leq a|y| + b, \quad \forall (z, y) \in I \times \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ toute solution $x : I \subset \to \mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

vérifie

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp(a|t - t_0|) + \frac{b}{a}\left(\exp(a|t - t_0|) - 1\right), \quad \forall t \in I.$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

1.1.4 Résolution explicite d'une équation différentielle linéaire scalaire

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(E.L)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz 7 pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$ le problème précédent admet une solution définie sur $\mathbb{R}$. On va donc résoudre explicitement le problème précédent et déterminer la forme de la solution générale. On considère le changement de variable suivant

$$y(t) = \exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds)x(t). \tag{1.3}$$

Donc

$$x(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)y(t) \text{ et } \frac{d}{dt}x(t) = a(t)\exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)y(t) + \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)\frac{d}{dt}y(t)$$

En remplaçant ces valeurs dans le problème (E.L) on obtient le nouveau problème de Cauchy suivant

$$(E.L.N)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = b(t)\exp(\int_{t_0}^{t} -a(s)ds), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Par une simple intégration on obtient

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} b(z)\exp(\int_{t_0}^{z} -a(s)ds)dz.$$

D'où

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(z)\exp(\int_{t_0}^{z} -a(s)ds)dz.$$

Created with
nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional