1.1.5 Résolution de quelques équations

On va voir dans la suite quelques exemples de résolution. Cela rentre dans le cadre de la théorie quantitative qui consiste à trouver la forme explicite des solutions d'une équation différentielle

1.1.5.1 Équation à variables séparables

Une équation à variables séparables est une équation de la forme

$$\dot{x} = g(t)f(x). \tag{1.4}$$

avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonction continues. Si f s'annule en un point x_* de $\mathbb{R}$ alors la fonction constante $x(t) = x_*$ est une solution de l'équation (1.4) sur $\mathbb{R}$. En posant F primitive de la fonction $z \to \frac{1}{f(z)}$ et en posant G primitive de la fonction g alors la solution générale de (1.4) satisfait l'équation

$$F(x(t)) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tout dépend de la forme de F on peut dans quelques cas déduire la forme explicite de la solution $x(t)$.

Exemple 12.

$$\dot{x} = g(t)x,$$

avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de primitive G. Cette équation différentielle est une équation différentielle à variables séparables et c'est une équation différentielles linéaire scalaire homogène. Dans ce cas la primitive F de la fonction $z \to \frac{1}{z}$ est

$$F(z) = \ln(|z|).$$

Donc la solution vérifie

$$\ln(|x(t)|) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc

$$x(t) = c' \exp(G(t)), \quad c' \in \mathbb{R}.$$

1.1.5.2 Équation de Riccati à coefficients constants

Une équation de Riccati à coefficients constants est définie par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = a + bx + cx^2,$$

avec a, b et c sont des constantes dans $\mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. Soit $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme du deuxième degré en z

$$a + bz + cz^2, \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.1.5.2.a Cas où $\Delta > 0$

Pour $\Delta > 0$ il existe deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ constantes définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x_1(t) = \lambda_1, \quad \text{et} \quad x_2(t) = \lambda_2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux racines du polynôme $a + bz + cz^2$. Les autres solutions peuvent être calculées par la décomposition suivante

$$\dot{x} = a + bx + cx^2 = c(x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{x}(t)}{(x(t)-\lambda_1)(x(t)-\lambda_2)} = c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{x}(t)}{(x(t)-\lambda_1)} - \frac{\dot{x}(t)}{(x(t)-\lambda_2)} = c(\lambda_1-\lambda_2).$$

En intégrant on obtient

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{(x(t)-\lambda_1)}dt - \int \frac{\dot{x}(t)}{(x(t)-\lambda_2)}dt = \int c(\lambda_1-\lambda_2)dt,$$

$$\ln|(x(t)-\lambda_1)| - \ln|(x(t)-\lambda_2)| = c(\lambda_1-\lambda_2)t+k, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x(t)-\lambda_1}{x(t)-\lambda_2} = k'\exp(c(\lambda_1-\lambda_2)t), \quad k' \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on obtient la forme explicite suivante

$$x(t) = \frac{\lambda_1-\lambda_2 k'\exp(c(\lambda_1-\lambda_2)t)}{1-k'\exp(c(\lambda_1-\lambda_2)t)}.$$

1.1.5.2.b Cas où $\Delta = 0$

Lorsque $\Delta = 0$ il existe une racine double réelle λ, donc il existe une solution $x_*(t)$ constante définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x_*(t) = \lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cela entraine que

$$a+bx+cx^2 = c(x-x_*)^2, \Longleftrightarrow \; \dot{x}(t) = c(x(t)-x_*)^2.$$

Cette dernière équation est une équation à variables séparbles et équivalente à

$$\frac{\dot{x}(t)}{(x(t)-x_*)^2} = c.$$

On utilise donc la méthode de l'équation à variable séparables pour déduire que

$$x(t) = x_* - \frac{1}{ct+k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.1.5.2.c Cas où $\Delta < 0$

Lorsque $\Delta < 0$ on utilise la forme canonique suivante

$$a + bz + cz^2 = c\left[(z + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right].$$

On a

$$\dot{x}(t) = c\left[(x(t) + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right]$$

Donc

$$\frac{\dot{x}(t)}{(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}x(t) + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}})^2 + 1} = \frac{-\Delta}{4c}.$$

Par changement de variable, soit

$$y(t) = \frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}x(t) + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}.$$

On alors

$$\dot{y}(t) = \frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}\dot{x}(t).$$

Cela entraine que

$$\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t) + 1} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Donc

$$\int \frac{\dot{y}(s)}{y^2(s) + 1}ds = \int \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}ds \implies \arctan(y(t)) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(t) = \tan(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + k).$$

Finalement par le changement de variable choisi, on obtient

$$x(t) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2c}\left[\tan(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + k) - \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right], \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.1.5.3 Équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est définie par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et f, g sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation de Bernoulli on considère le changement de variable $x(t) = y(t)z(t)$ alors

$$\dot{y}(t) = f(t)y(t) \quad \text{et} \quad \dot{z}(t) = g(t)y^{n-1}(t)z^n(t).$$

car

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t)z(t) + \dot{z}(t)y(t) = f(t)y(t)z(t) + g(t)y^{n-1}(t)z^n(t)y(t) = f(t)x(t) + g(t)x^n(t).$$

Par intégration on trouve

$$y(t) = \exp(\int f(t)dt), \quad \frac{z^{1-n}(t)}{1-n} = c + \int g(t)y^{n-1}(t)dt, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc

$$x(t) = y(t)z(t) = \exp(\int f(t)dt)\Big[(1-n)(c + \int g(t)(\exp(\int f(t)dt))^{n-1}dt)\Big]^{\frac{1}{1-n}}.$$