Chapitre 2

Équations différentielles du 1^{er} ordre

On a vu dans les sections précédentes la définition d'une équation différentielle scalaire ainsi quelques théorèmes d'existence de solutions concernant ces équations. On va voir maintenant la forme d'une équation différentielle du premier ordre qui n'est pas nécessairement scalaire. On considère dans ce qui suit un espace de Banach E sur le corps $\mathbb{R}$ (exemple : $E = \mathbb{R}^n$). On note la norme d'un élément X de E par $||X||$. Rappelons qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme ; c'est-à-dire : toute suite d'éléments de E qui est de Cauchy converge. On note dans ce qui suit $C(I \times D, E)$ l'ensemble des fonctions continues de $I \times D$ dans E où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E$.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E$. On appelle une équation différentielle du premier ordre sur $I \times D$ toute équation de la forme

$$\frac{d}{dt}X = f(t, X), \tag{2.1}$$

où $f : I \times D \to E$ est une fonction définie de $I \times D$ dans E. La fonction $X : I \to E$ est la fonction inconnue à déterminer de I dans E.

On voit que les équations différentielles scalaires du premier ordre est un cas particulier de ces derniers; en effet il suffit de prendre $E = \mathbb{R}$ qui est un espace de Banach.

Définition 13. On dit que la fonction $X(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E est solution de l'équation différentielle (2.1) sur I si elle est dérivable sur I et si elle vérifie

$$\forall t \in I \ : \ \frac{d}{dt}X = f(t, X).$$

Le problème de Cauchy sera donc la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

où $X_0 \in E$ est la condition initiale de la solution $X(t)$ au temps t_0.

2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre l'existence d'une unique solution sur I. Avant d'énoncer le théorème, on définit une fonction lipschitzienne dans un espace de Banach

Définition 14. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, ||.||)$ un espace de Banach. Soit $D \subset E$. Une fonction $f : I \times D \to E$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$ si pour tout $(t, X) \in I \times D$ il existe un voisinage $V \subset I \times D$ de (t, X) et il existe une constante $\kappa(t, x) > 0$ tels que

$$||f(s, Y) - f(s, Z)|| < \kappa(t, X)||Z - Y||, \quad \forall (s, Y) \in V \quad \text{et} \quad \forall (s, Z) \in V.$$

Elle est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I si $\kappa(t, X)$ ne dépend pas de (t, X). La constante $\kappa(t, x)$ est appelée la constante de Lipschitz.

Remarque 15. On utilise le théorème d'accroissement finis pour montrer que :

1) Si $f : I \times D \to E$ est de classe C^1 sur $I \times D$ alors elle est localement lipschitzienne

par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$.

1) Si $f : I \times D \to E$ est de classe C^1 et sa différentielle est bornée sur $I \times D$ alors elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I par rapport à la deuxième variable.

Pour montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz dans la suite on a besoin de la proposition suivante

Proposition 16. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in [a, b]$. Soit $f \in C(I \times E, E)$ lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I de constante de Lipschitz κ. Alors pour tout $X_0 \in E$ la suite de fonctions récurrente $(X_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par*

$$\begin{cases} X_1(t) = X_0, \quad \forall t \in [a, b], \\ X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X_{n-1}(s))ds, \quad \forall t \in [a, b], \end{cases}$$

converge uniformément vers une fonction $X(t)$ dans l'espace de Banach $C(I, E)$ muni de la norme $||.||_\infty$. De plus $X(t)$ est l'unique fonction dérivable vérifiant

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Soit la suite de fonctions récurrente $(X_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X_{n-1}(s))ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

avec $X_1(t) = X_0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Comme l'espace $C(I, E)$ des fonctions continues de I dans E muni de la norme $||X||_\infty = \sup_{s \in I} ||X(s)||$ pour tout $X \in C(I, E)$ est de Banach, alors pour montrer que $(X_n)_n$ converge il suffit donc de montrer qu'elle est de Cauchy.

On remarque par récurrence que $X_n(t)$ est dérivable et continue sur $[a, b]$. On définit la quantité suivante

$$||X_{n+1} - X_n||_* = \max_{s \in I} [\exp(-\kappa|s - t_0|)||X_{n+1}(s) - X_n(s)||],$$

qui est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'un autre coté posons $J = [t, t_0]$ si $t \leq t_0$ et $J = [t_0, t]$ si $t_0 \leq t$, alors on a

$$\begin{aligned}
||X_{n+1}(t) - X_n(t)|| &= ||\int_{t_0}^{t} f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))ds|| \\
&\leq \int_J ||f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))||ds \\
&\leq \int_J \kappa||X_n(s) - X_{n-1}(s)||ds \\
&= \int_J \exp(\kappa|s - t_0|)\exp(-\kappa|s - t_0|)\kappa||X_n(s) - X_{n-1}(s)||ds \\
&\leq \kappa||X_n - X_{n-1}||_* \int_J \exp(\kappa|s - t_0|)ds \\
&= \kappa||X_n - X_{n-1}||_* \frac{1}{\kappa}(\exp(\kappa|t - t_0|) - 1).
\end{aligned}$$

Ce qui implique donc pour tout $t \in [a, b]$:

$$\exp(-\kappa|t - t_0|)||X_{n+1}(t) - X_n(t)|| \leq ||X_n - X_{n-1}||_*(1 - \exp(-\kappa|t - t_0|)).$$

Par passage au maximum et par définition de la quantité $||.||_*$ on obtient

$$||X_{n+1} - X_n||_* \leq ||X_n - X_{n-1}||_*(1 - \exp(-\kappa(b - a))), \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors par récurrence et en posant $L = 1 - \exp(-\kappa(b - a))$ on déduit que

$$||X_{n+1} - X_n||_* \leq L^{n-1}||X_2 - X_1||_*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$X \neq Y$ sur $[a, b]$ implique que $\max_{s\in[a,b]} ||X(s) - Y(s)|| \neq 0$. On a

$$X(t) - Y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, X(s)) - f(s, Y(s))ds,$$

$$\longrightarrow ||X(t) - Y(t)|| \leq \int_{t_0}^{t} \kappa ||X(s) - Y(s)||ds \leq \kappa \max_{s\in[a,b]} ||X(s) - Y(s)||(b-a),$$

Par passage au maximum dans le membre droit, on obtient

$$\Longrightarrow \max_{t\in[a,b]} ||X(t) - Y(t)|| \leq \kappa(b-a) \max_{s\in[a,b]} ||X(s) - Y(s)||.$$

Comme $\max_{s\in ab,b]} ||X(s) - Y(s)|| \neq 0$ alors

$$1 \leq (b-a)\kappa.$$

Contradiction, car par hypothèse $(b-a)\kappa < 1$. □

Théorèm 17. *[Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C(I \times E, E)$. Soit le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times E$. Supposons que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I. Alors pour tout t_0 dans I et pour tout X_0 dans E le problème de Cauchy (P.C) admet une solution unique définie sur I.

Démonstration. Comme f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et d'après la proposition 16 il existe une unique fonction $X : I \to E$ dérivable sur I telle que

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t)), \quad \forall t \in I \qquad \text{et} \quad X(t_0) = X_0,$$

Par conséquent $X(t)$ est solution du problème de Cauchy $(P.C)$ sur I. ∎

Définition 18. On appelle la solution $X(t)$ définie sur tout I, du problème de Cauch $(P.C)$ précédent, une "solution globale".

D'où

$$\exp(-\kappa(b-a))||X_p - X_q||_\infty \leq ||X_p - X_q||_* = ||\sum_{k=q}^{p-1} X_{k+1} - X_k||_*$$

$$\leq ||X_2 - X_1||_* \sum_{k=q}^{p-1} L^{k-1} = ||X_2 - X_1||_* \frac{L^{q-1} - L^{p-1}}{1-L} \rightarrow_{p,q\to+\infty} 0 \qquad (2.2)$$

Comme

$$\exp(-\kappa(b-a)) \leq \exp(-\kappa|s-t_0|) \leq 1, \quad \forall s \in I,$$

alors

$$\exp(-\kappa(b-a))||X_p - X_q||_\infty \leq ||X_p - X_q||_* \quad \text{et} \quad ||X_2 - X_1||_* \leq ||X_2 - X_1||_\infty.$$

Par conséquent la formule (2.2) implique que

$$\Longrightarrow \; ||X_p - X_q||_\infty \leq \exp(\kappa(b-a))||X_2 - X_1||_\infty \frac{L^{q-1} - L^{p-1}}{1-L} \rightarrow_{p,q\to+\infty} 0$$

donc (X_n) est de Cauchy dans l'espace de Banach des fonctions continues de $[a,b]$ dans E muni de la norme $||.||_\infty$ (topologie de la convergence uniforme). Donc X_n converge uniformément vers une fonction dérivable $X(t)$ définie sur $[a,b]$ de plus

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(t) = X_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, X_{n-1}(s))ds \iff X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds$$

Montrons qu'elle est unique : Supposons qu'il existe deux fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ telles $Y \neq X$ et telles que pour tout $t \in I$ on a

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds \quad \text{et} \quad Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, Y(s))ds.$$