2.6 Équations différentielles d'ordre supérieur

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Une équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{R}^m$ est une équation de la forme

$$X^{(n)} = F(t, X, X', \ldots, X^{(n-1)}) \tag{2.4}$$

où $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}^m$ et $X : I \to \mathbb{R}^m$ est la fonction inconnue à déterminer. On va voir que cette équation peut se réduire à une équation du premier ordre. On considère le changement de variable $Y_0(t) = X(t)$ alors l'équation différentielle du première ordre suivante

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}Y_0(t) = Y_1(t), \\ \frac{d}{dt}Y_1(t) = Y_2(t), \\ \frac{d}{dt}Y_2(t) = Y_3(t), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}Y_{n-2}(t) = Y_{n-1}(t), \\ \frac{d}{dt}Y_{n-1}(t) = F(t, Y_0(t), Y_1(t), \ldots, Y_{n-1}(t)) \end{cases}$$

est équivalente à l'équation (2.4). Donc toute équation différentielle d'ordre n est équivalente à une équation d'ordre 1. Par conséquent tous les théorèmes d'existence et d'unicité vus dans les équations différentielles du 1^{er} ordre s'appliquent au équations différentielles d'ordre n.

Exemple 26. *Soit l'équation différentielle d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$ suivante (ici $n = 2$ et $m = 1$)*

$$x'' = x + \sin(t) \tag{2.5}$$

Dans cet exemple $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t, x) = x + \sin(t)$. Posons $y_0(t) = x(t)$ alors l'équation différentielle d'ordre 2 (2.5) est équivalente à l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$(E) \quad \begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_0 + \sin(t). \end{cases}$$

Cette équation du premier ordre est de la forme $Y'(t) = G(t, Y(t))$ avec $Y(t) = (y_0(t), y_1(t))$ et $G(t, Y(t)) = (y_1(t), y_0(t) + \sin(t))$. Donc G est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $\mathbb{R}$; l'équation (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$ pour toute condition initiale. On intègre (E) : Posons $u(t) = y_0(t) + y_1(t)$ par addition on a

$$u'(t) = y_0'(t) + y_1'(t) = y_1(t) + y_0(t) + \sin(t) = u(t) + \sin(t),$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$u(t) = \exp(t)[c + \int \sin(s)\exp(-s)ds], \quad c \in \mathbb{R}.$$

Posons $w(t) = y_0(t) - y_1(t)$*, de* (E) *on a*

$$w'(t) = -w(t) - \sin(t),$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$w(t) = \exp(-t)[c' - \int \sin(s)\exp(s)ds], \quad c' \in \mathbb{R}.$$

On déduit que

$$x(t) = y_0(t) = \frac{u(t) + w(t)}{2}.$$