

Chapitre 3

Systèmes linéaires

On va étudier dans ce chapitre un cas particulier d'équations différentielles. Plus précisément on va s'intéresser à des équations différentielles sur $\mathbb{R}$ linéaires qui sont de la forme

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X + B(t) \quad (3.1)$$

où A est une matrice $n \times n$ et $B(t)$ est un vecteur de taille n qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$. $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est la fonction inconnue à déterminer. L'équation (3.1) s'appelle aussi "système linéaire".

On appelle "équation homogène associée" à l'équation (3.1) l'équation sans second membre suivante

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X.$$

On va s'intéresser dans la suite au cas lorsque la matrice $A(t)$ ne dépend pas de t . Pour résoudre le système (3.1) on doit définir l'exponentiel d'une matrice.

3.1 Exponentiel d'une matrice

La fonction exponentielle scalaire $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne permet pas de calculer l'exponentiel d'une matrice. Par contre on connaît le développement de cette fonction qui est sous

la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

On donne donc une définition analogue à ce développement pour définir l'exponentiel d'une matrice.

Définition 27 (Exponentiel d'une matrice). Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice d'ordre $n \times n$. On appelle "exponentiel de M " et on note $\exp(M)$ la quantité suivante

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k,$$

où M^k est k fois le produit de la matrice M et où M^0 est la matrice identité d'ordre n .

Le calcul de l'exponentiel d'une matrice n'est pas toujours trivial, car on doit calculer à chaque fois le produit matriciel M^k . On va voir quelques exemples où on peut calculer cet exponentiel.

Exemple 28. Si

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Donc pour tout $k \geq 3$

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On déduit que

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Proposition 29. Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice d'ordre $n \times n$, alors la série entière de somme partielle $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} M^k,$$

converge vers une matrice d'ordre $n \times n$ dans l'espace des matrices d'ordre $n \times n$ muni de la norme $\|\cdot\|$ usuelle.

Démonstration. Comme pour toute matrice A et B d'ordre $n \times n$ on a $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ donc $\|M^k\| \leq \|M\|^k$. On a donc

$$\|S_N\| \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \|M\|^k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \exp(\|M\|).$$

Donc S_N converge absolument d'où S_N converge. □

Il existe des cas particuliers où on peut calculer l'exponentiel d'une matrice. On a donc les propriétés suivantes

Proposition 30. Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice d'ordre $n \times n$.

(3.2). Une base de S s'appelle "ensemble fondamental" du système (3.2).

Démonstration. Montrons que les éléments de S sont des solutions. On a

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

D'après la proposition 29 sur tout compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ la série converge uniformément, donc

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A \exp(tA).$$

Donc pour tout vecteur constant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ la fonction $X(t) = \exp(tA)X_0$ vérifie

$$\frac{d}{dt} X = AX,$$

qui est une solution de (3.2). On remarque par linéarité du système que S est un espace vectoriel. Montrons qu'il est de dimension n :

Soit $X_1(t), \dots, X_n(t)$ des solutions de conditions initiales vérifiant $X_1(t_0) = e_1, \dots, X_n(t_0) = e_n$ où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrons qu'elle est génératrice :

On a pour tout $Y(t) \in S$ il existe $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Y(t) = \exp(tA)Y = y_1 \exp(tA)e_1 + \dots + y_n \exp(tA)e_n = y_1 X_1(t) + \dots + y_n X_n(t).$$

donc $X_1(t), \dots, X_n(t)$ est une famille génératrice de S .

Montrons que c'est une famille linéairement indépendante. Par l'absurde, supposons qu'elle n'est pas libre donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i(t) = 0.$$

- Si M est une matrice triangulaire avec des 0 dans la diagonale alors

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} M^k.$$

- Si M est une matrice diagonale ($M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$) alors

$$\exp(M) = \text{diag}(\exp(m_1), \dots, \exp(m_n)).$$

- Si A et B sont deux matrices $n \times n$ qui commutent (i.e, $AB = BA$) alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

- La matrice $\exp(M)$ est une matrice inversible de plus $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$.

3.2 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

On considère dans $\mathbb{R}$ le système linéaire à coefficients constants suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX \tag{3.2}$$

où A est une matrice à coefficients constants d'ordre $n \times n$ et $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue à déterminer. Dans la suite on considère un temps initial $t_0 \in \mathbb{R}$

Proposition 31. On note S l'ensemble de solutions du système (3.2). Alors S est un espace vectoriel de dimension n et est donné par

$$S = \{\exp(tA)Z, \quad Z \in \mathbb{R}^n\},$$

et on appelle la matrice $\exp(tA)$ qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$ la “résolvante” du système

Donc il existe aussi $t_* \in \mathbb{R}$ et tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i X(t_*) = 0.$$

Sans perte de généralité supposons que $\lambda_1 \neq 0$. On a alors

$$X_1(t_*) = - \sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t_*).$$

Mais $-\sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t) \in S$ donc c'est une solution de (3.2). Par unicité de solution

$$X_1(t) = - \sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier

$$X_1(t_0) = - \sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t_0).$$

Contradiction avec le fait que $X_1(t_0), \dots, X_n(t_0) = e_0$ ou $e_1, \dots, e_n$ qui est une base (famille libre). $\square$

Remarque 32. Si $X_1(t), \dots, X_n(t)$ est un ensemble fondamental de S . On appelle la matrice

$$\begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \dots & X_n(t) \end{pmatrix},$$

matrice fondamentale et on a

$$\begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \dots & X_n(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} X_1(t_0) & X_2(t_0) & \dots & X_n(t_0) \end{pmatrix},$$

car $X_i(t) = \exp(tA)X_i(t_0)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.