3.4.2 Résolution d'un système linéaire non homogène

On considère dans $\mathbb{R}^n$ le système linéaire non homogène suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

Avec A matrice constante qu'on suppose diagonalisable et $B(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. On utilise la section 3.4.1 précédente pour trouver la résolvante $\exp(tA)$ du systèmes homgène suivant associé au système (3.6)

$$\frac{d}{dt}X = AX.$$

Donc d'après la proposition 33 les solution du systèmes non homogène (3.6) est donné par

$$X(t) = \{\Phi(t - t_0)[X_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s - t_0)^{-1}B(s)ds]\},$$

avec $\Phi(t - t_0) = \exp((t - t_0)A)$.

Exemple 35.

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \textit{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

D'après l'exemple 34 la résolvante du système homgène associé

$$\frac{d}{dt}X = AX,$$

est donnée par

$$\exp(tA) = \exp(2t) \begin{pmatrix} \cosh(4t) & \sinh(4t) \\ \sinh(4t) & \cosh(4t) \end{pmatrix}.$$

Donc les solution du système (3.7) sont données par

$$X(t) = \exp((t-t_0)A)[X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-(s-t_0)A) \begin{pmatrix} \exp(2s) \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= \exp((t-t_0)A)[X(t_0) + \exp(2t_0) \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} \cosh(-4(s-t_0))ds \\ \int_{t_0}^{t} \sinh(-4(s-t_0))]ds \end{pmatrix}]$$

$$= \exp((t-t_0)A)[X(t_0) - \frac{\exp(2t_0)}{4} \begin{pmatrix} \sinh(-4(t-t_0)) \\ \cosh(-4(t-t_0)) - 1 \end{pmatrix}],$$

où

$$\exp((t-t_0)A) = \exp(2(t-t_0)) \begin{pmatrix} \cosh(4(t-t_0)) & \sinh(4(t-t_0)) \\ \sinh(4(t-t_0)) & \cosh(4(t-t_0)) \end{pmatrix}.$$

3.4.3 Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre supérieur

On considère l'équation linéaire scalaire d'ordre n suivante

$$y^{(n)} = a_n y^{(n-1)} + \dots + a_3 y'' + a_2 y' + a_1 y + f(t),$$

avec $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R}$ sont des constantes et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. D'après la section 2.6 du chapitre précédent en posant $x_1(t) = y(t)$ cette équation peut se réduire au système linéaire d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2, \\ \frac{d}{dt}x_2 = x_3, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}x_{n-1} = x_n, \\ \frac{d}{dt}x_n = a_n x_n + \dots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + f(t), \end{cases}$$

qui est sous forme matriciel équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \textbf{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\dots\dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots\dots\dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\dots\dots\dots & a_n \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où A est diagonalisable on utilise la méthode illustrée dans la section 3.4.1 et la section 3.4.2 pour calculer la solution $X(t)$ on déduit donc la solution $y(t) = x_1(t)$.

Exemple 36.

$$y''' = 3y'' + y' + \sin(t).$$

En posant $x_1(t) = y(t)$ *alors le système est équivalent à*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2, \\ \frac{d}{dt}x_2 = x_3, \\ \frac{d}{dt}x_3 = 3x_3 + x_2 + \sin(t), \end{cases}$$

qui est sous forme matricielle équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

$$\text{et où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

On calcul la résolvante du système linéaire homogène

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t).$$

Cela revient donc à chercher les valeurs propres de A.