Stabilité des systèmes linèaires

La stabilité est l'étude de la dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales. Physiquement, si on jette deux pierres tout d'un cous on aimerai bien savoir si l'une s'éloigne de l'autre au cours du temps ou non. En terme d'équations différentielles, si on prend deux solutions d'une même équation différentielle est-ce-que ceux deux solutions restent assez proches lorsque leurs conditions initiales sont suffisamment proches. Pour cela on la définition suivante

5.1 Stabilité et stabilité exponentielle- Cas générale

Définition 43 (Stabilité et stabilité exponentielle). Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $\mathbb{R}$. Soi l'équation différentielle suivante

$$\dot{X} = f(t, X), \quad t \geq t_0. \tag{5.1}$$

Soit $X(t)$ solution de l'équation (5.1) de condition initiale $X \in \mathbb{R}^n$. La solution $X(t)$ est stable si

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 : \forall Y \in \mathbb{R}^n, ||X - Y|| < \delta \implies ||\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)|| \leq M||X - Y||, \forall t \geq t_0,$$

Dans le cas contraire la solution $X(t)$ est dite instable.

La solution $X(t)$ est exponentiellement stable si

$$\exists M > 0, \exists c > 0, \exists \delta > 0 : \forall Y \in \mathbb{R}^n, ||X - Y|| < \delta$$
$$\implies ||\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)|| \leq M \exp(-ct)||X - Y||, \forall t \geq t_0,$$

Remarque 44. Une solution exponentiellement stable est stable. La réciproque est en générale fausse ! (Voir l'exemple donné dans la section 5.1.1 ci-dessous).

5.1.1 Étude de stabilité du cas linéaire scalaire

Maintenant on va voir ce que signifie la stabilité dans le cas scalaire. Soit l'équation différentielle linéaire scalaire non-homogène suivante

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \tag{5.2}$$

avec $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. Par définition le flot satisfait l'équation suivante

$$\forall z \in \mathbb{R} : \frac{d}{dt}\Phi^t(z) = a(t)\Phi^t(z) + b(t).$$

Donc pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a

$$\frac{d}{dt}[\Phi^t(x) - \Phi^t(y)] = a(t)[\Phi^t(x) - \Phi^t(y)], \quad t \geq t_0.$$

Posons $\theta(t) = \Phi^t(x) - \Phi^t(y)$ donc

$$\dot{\theta} = a(t)\theta, \quad t \geq t_0,$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire homogène, donc

$$\theta(t) = \theta(t_0) \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds), \quad t \geq t_0.$$

Comme $\theta(t) = \Phi^t(x) - \Phi^t(y)$ alors,

$$\Phi^t(x) - \Phi^t(y) = [\Phi^{t_0}(x) - \Phi^{t_0}(y)] \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds).$$

Par les propriétés du flot citées avant on a donc

$$\Phi^t(x) - \Phi^t(y) = [x - y] \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds).$$

On remarque que si la fonction a est constante et vérifie $a(t) = \alpha < 0$ pour tout $t > 0$ alors

$$|\Phi^t(x) - \Phi^t(y)| = |x - y||\exp(\alpha(t - t_0))| < |x - y|, \forall t > t_0.$$

Dans ce cas toute solution $x(t)$ de l'équation (5.2) est donc stable (ici $M = 1$ relativement à la définition 43), voir la Figure (5.1). On peut vérifier que dans le cas ou $a(t) = \alpha > 0$ pour tout $t \geq 0$ alors toute solution est instable (Voir la Figure (5.2)). Dans le cas ou $\int_{t_0}^{t} a(s)ds$ est bornée (Exemple : périodique par rapport à t) alors la solution $x(t)$ est stable mais non exponentiellement stable (Voir la Figure (5.3)).

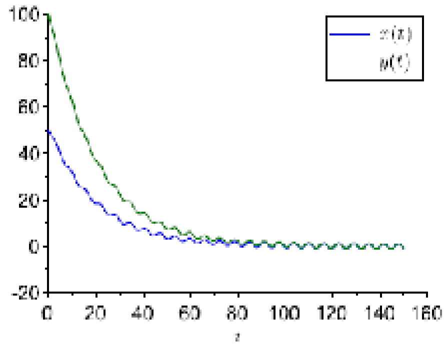

FIGURE 5.1 – On choisis dans l'équation différentielle (5.2) $a(t) = \quad 0.05$ pour tout $t \geq t_0 \quad 0$ et $b(t) \quad \sin(t)$. La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution $x(t)$ de condition initiale $x(0) = 500$ et le graphe en couleur verte de la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 100$ de l'éuqtaion différentielle (5.2). Ici $a(t) = -0.05$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ ce qui correspond à une stabilité exponentielle. La distance entre les deux solution $x(t)$ et $y(t)$ décroit d'une manière exponentielle.

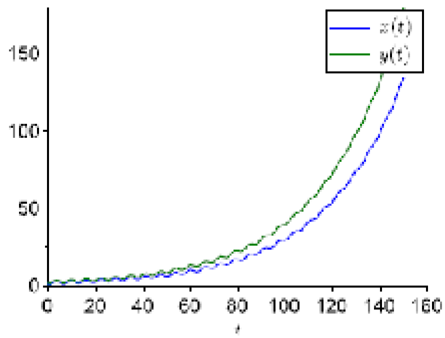

FIGURE 5.2 – On choisis dans l'équation différentielle (5.2) $a(t) = 0.03$ pour tout $t > t_0 = 0$ et $b(t) = \sin(t)$. La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution $x(t)$ de condition initiale $x(0) \quad 0.5$ et le graphe en couleur verte de la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 1$ de l'éuqtaion différentielle (5.2). Ici $a(t) = 0.03$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ ce qui correspond à une instabilité. La distance entre les deux solution $x(t)$ et $y(t)$ n'est pas bornée dans le temps.

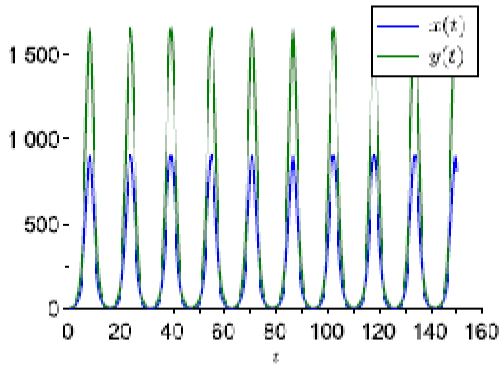

FIGURE 5.3 – On choisis dans l'équation différentielle (5.2) $a(t)$ $\sin(0.4t)$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ et $b(t) = \sin(t)$. La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution $x(t)$ de condition initiale $x(0) = 5$ et le graphe en couleur verte de la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 10$ de l'éuqtaion différentielle (5.2). Ici $a(t) = \sin(0.4t)$ ce qui implique que $\int_{t_0}^{t} a(s)ds$ est périodique par rapport à t ce qui correspond à une stabilité mais pas à une stabilité exponentielle. La distance entre les deux solution $x(t)$ et $y(t)$ est bornée mais ne décroit pas d'une manière exponentielle.