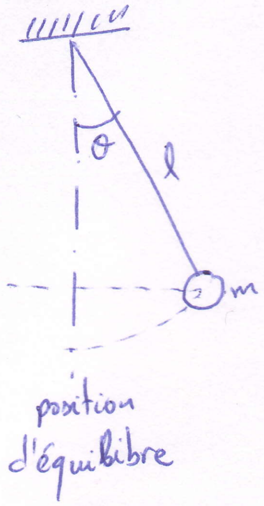
Chapitre 01 : Introduction aux équation de Lagrange

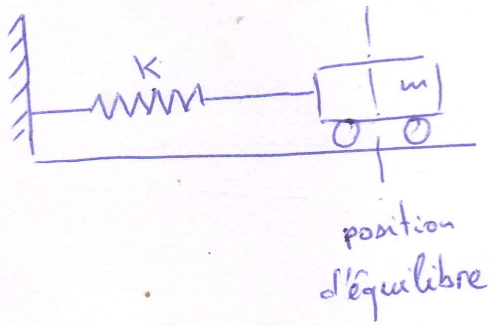
mvt de vibration : mvt d'un corps qui se déplace alternativement de part à autre par rapport à une position d'équilibre dans un intervalle du temps T (période)

Exemple

pendule simple



masse-ressort



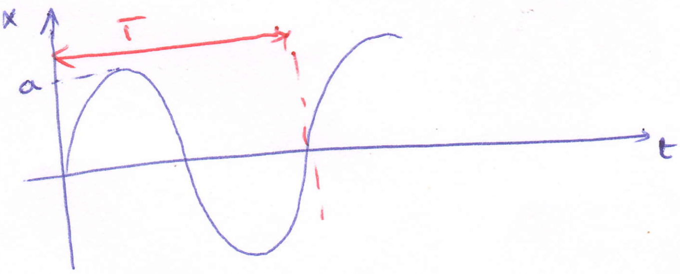
La période T a une relation avec la fréquence du mvt, tel que :

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{avec} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \omega : \text{pulsation } (rd/s)$$

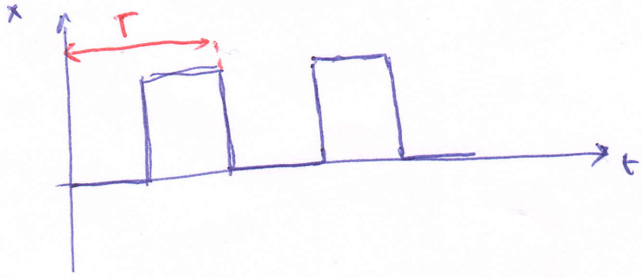
$$\text{donc } T = \frac{1}{\omega/2\pi} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{[rd]}{[rd/s]} = [s]$$

- mvt Harmonique (courbe sous forme sinusoïdale)

$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$



- mvt périodique



Equation du mouvement :

- Le mvt de vibration est caractérisé par l'équation du mvt (éq différentielle) donné par :

$$\boxed{m\ddot{q} + c\dot{q} + Kq = F_{ext}(t)}$$

q : les coordonnées généralisé (nbre de degré de liberté "d")

tel que : $d = N - r$

N : ~~nbre~~ translations et rotations trouvant dans le système
r : relation entre ces translations et rotation (nbre de liaison)

$\dot{q}$: vitesse (m/s) , $\ddot{q}$: accélération (m/s^2)

m : masse (Kg)
c : l'amortissement (N.s/m)
K : régidité (N/m)
F : Forces exterieures (N).

- On peut déterminer l'équation du mvt par plusieurs méthods, ~~on peut~~ comme :
  - principe d'Alembert ($2^{ème}$ loi de Newton).
  - " des travaux virtuels.
  - principe d'Hamilton.
  - Equation de lagrange.

Equation de Lagrange :

- **Système conservatif** : ou l'energie total du système reste constante $\left(\frac{dE_t}{dt} = 0\right.$ avec $\left.E_t = T + V = E_{cinétique} + E_{potentielle}\right)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

q : coordonnées généralisé (déplacement, rotation)

L : lagrangien $L = T - V$

T : Energie cinétique → Translation : $T_{trans} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $\dot{x}$ = vitesse linéaire
→ Rotation : $T_{rotation} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$, $\dot{\theta}$: vitesse angulaire

J : moment d'inertie $[Kg.m^2]$

V : Energie potentielle → Elastique : $V = \frac{1}{2} K x^2$
→ Pésanteur : $V = m g . h$

- **Système non-conservatif** : On a une perte de l'energie total $\left(\frac{dE_t}{dt} \neq 0\right)$

l'equation de lagrange est donnée par :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}}$$

F_{ext} : forces exterieures (N)

D : fonction de dissipation $\longrightarrow$ Forces de dissipation

$$D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$$

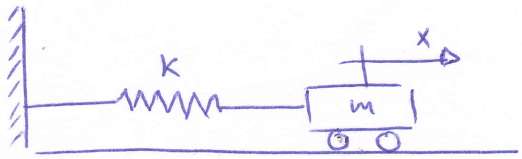
Chapitre 02 : Vibration d'un système à 1 ddl

1- Vibration libre d'un système à 1 ddl non amortis :

$$\begin{cases} \text{libre} \longrightarrow F_{ext} = 0 \\ \text{Non amortis} \longrightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \text{ (pas d'amortisseur)} \end{cases}$$

Exemple - Système masse-ressort
- pendule simple.

Système masse-ressort



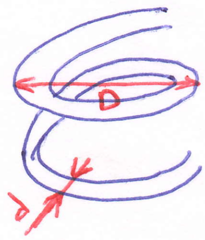
Eq de lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ ou $q = x$ (coordonné généralisé)

Calcul de lagrangien $L = T - V$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ V = \frac{1}{2} k x^2 \end{cases}$$

$\left(k = \frac{G.d^4}{8 n D^3}\right.$ ressort hélicoïdaux (à boudin) $\left.\right)$

$$\begin{cases} G : \text{module de Coulomb} \\ n : \text{nbre de spires} \\ d : \text{diametre} \\ D : \quad " \quad \text{du spire} \end{cases}$$



Donc :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \cancel{\frac{1}{2} k x^2} \right) = m \dot{x}$$

cte

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(m \dot{x}) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} \cancel{m} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right) = -kx$$

cte

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - (-kx) = m\ddot{x} + kx = 0$$

$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \longrightarrow$ Eq de mvt d'un système masse-ressort

En divisant sur m :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

tel que ω_0 : c'est la pulsation propre d'un système masse-ressort

et $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

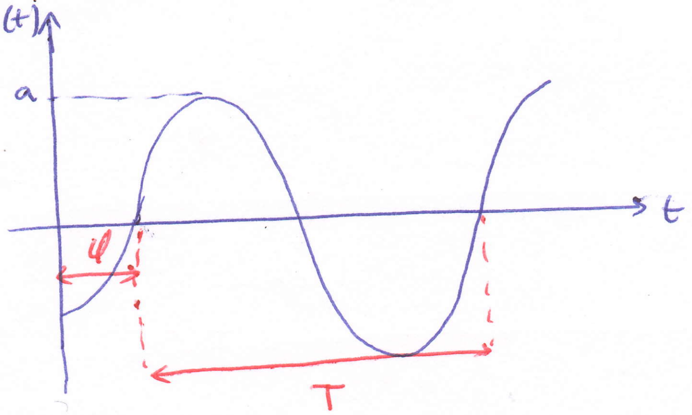
On a : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Donc $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$

* La solution de l'équation du mvt d'un système libre nonamortis à 1ddl est donné sous la forme :

$$\boxed{x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \sin \omega t + B \sin \omega t}$$

tel que
- a : l'amplitude de mvt $a = \sqrt{A^2 + B^2}$
- ω_0 : pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- φ : Phase $tg\,\varphi = \frac{A}{B}$



* A et B sont déterminer à partir des conditions initiales du mvt déplacement initial ($x(t=0)$), et vitesse initial ($\dot{x}(t=0)$)
* Par exemple, si le syst à démaré à partir de la position d'équilibre (au repos) on à : $x(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=0$

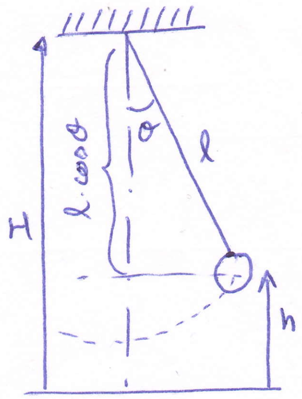
si on a une déformation du ressort (déplacement statique), on trouve :

$$x(t=0)=X_0 \quad , \quad \dot{x}(t=0)=0$$

Pendule simple :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

$q=\theta$, $\dot{q}=\dot{\theta}$ (mvt de rotation)



∘ Calcul de lagrangien $L=T-V$

– Energie Cinétique : $\boxed{T=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}$ $(J=m\ell^2)$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m.\ell^2.\dot{\theta}^2}$$

– Energie potentielle (pésanteur) : $\boxed{V=m.g.h}$

$\begin{cases} h : \text{hauteur à l'état de mvt } [m] \\ g : \text{gravité } [m/s^2] \end{cases}$

avec $h=H-\ell\cos\theta$

Donc $\boxed{V=mgH-mg\ell\cos\theta}$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2-mgH+mg\ell\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=m\ell^2\ddot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta}=-mg\ell\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin\theta = 0$$

Dans le cas de petite oscillation $\theta \approx 0 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

Donc l'eq de mvt d'un pendule simple est donné par

$$\boxed{m l^2 \ddot{\theta} + m g l \theta = 0}$$

En divisant par $m l^2$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$: pulsation propre.

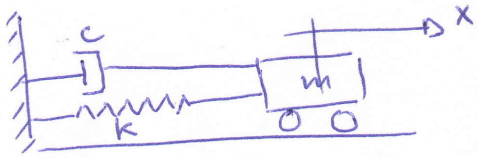
et $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

2- Vibration Libre Amortis d'un système à 1 ddl

$F_{ext} = 0$

$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \neq 0$, $\cancel{\frac{\partial D}{\partial q}}$ $D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$

Système masse-ressort-Amortisseur



Eq de lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{x} + kx$$

$$-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -c\dot{x}$$

$m\ddot{x} + kx = -c\dot{x} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$ Eq du mvt

en divisant par m : $\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} = 0}$

. la solution de l'eq de mvt est donné sous la forme $\boxed{x = Ae^{rt}}$

Donc $\dot{x} = Are^{rt}$ et $\ddot{x} = Ar^2e^{rt}$

Remplaçant $x, \dot{x}, \ddot{x}$ à l'eq de mvt :

$$Ar^2e^{rt}\,\ddot{x} + \frac{c}{m}Are^{rt}\,\dot{x} + \frac{k}{m}Ae^{rt}\,x = \left(r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m}\right)Ae^{rt} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} \quad (b^2 - 4ac)$$

Donc :

$$\boxed{r_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}\right]} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{a}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{a}\right)$$

et

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

<u>Facteur d'amortissement</u> : $\alpha = \dfrac{c}{c_c}$: c_c : c critique (Coef d'amortisement critique)

si $\cancel{k} = c_c \Rightarrow \Delta = 0$

$$\left(\frac{c_c}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{c_c = 2m\omega_0}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{c}{2m\omega_0}}$$

$$c = 2\alpha m\omega_0 \Longrightarrow \boxed{\frac{c}{m} = 2\alpha\omega_0}$$

Eq du mvt : $\boxed{\ddot{x} + \overset{c/m}{2\alpha\omega_0}\,\dot{x} + \overset{k/m}{\omega_0^2}\,x = 0}$ $\qquad \dfrac{4k}{m} = (2\omega_0)^2$

$$\text{Donc } r_{1/2} = \frac{1}{2}\left[-2\alpha\omega_0 \pm \sqrt{(2\alpha\omega_0)^2 - \frac{4k}{m}}\right]$$

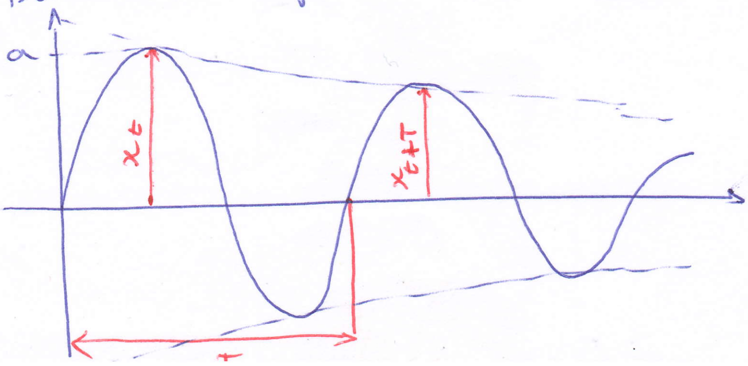
$$= \frac{1}{2}\left[-2\alpha\omega_0 \pm \sqrt{(2\alpha\omega_0)^2 - (2\omega_0)^2}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left[-\cancel{2}\alpha\omega_0 \pm \cancel{2}\omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}\right]$$

$$\boxed{r_{1/2} = -\alpha\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

si $\boxed{\alpha < 1 \rightarrow c < c_c}$ " Amortissement <u>faible</u> ou <u>sous critique</u> "

r_1, r_2 : solution complexes, Avec $\boxed{\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \alpha^2}}$ puls V.L.A

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_a}}$$



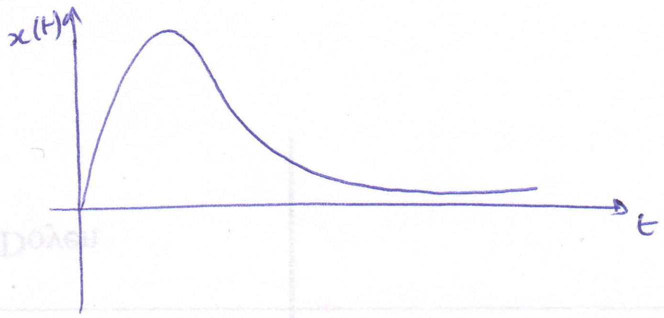
<u>Decrément logarithmique</u>

$$\boxed{\delta = \ln\frac{x_t}{x_{t+T}}}$$

Si $\boxed{\alpha = 1 \quad , \; c = c_c}$ "Amortissement critique" ~~mvt supercritique~~

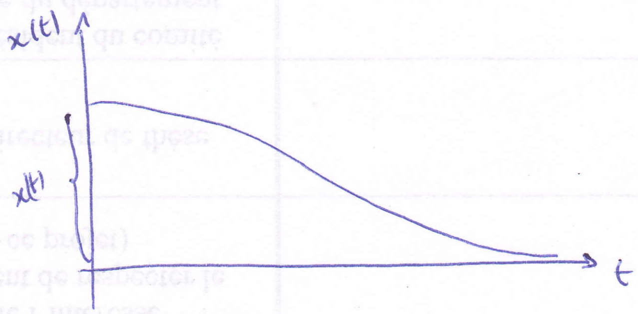
$r_1 = r_2 = \omega$

$x(t) = A_1 e^{-\omega t} + A_2 t . e^{-\omega t}$ (raçines double)



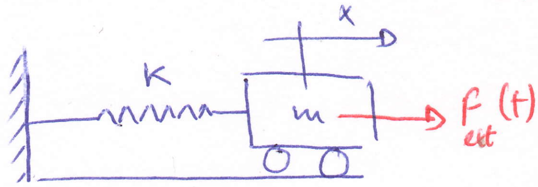
Si $\boxed{\alpha > 1 , \; c > c_c}$ "Amortissement super-critique"

r_1 , r_2 : solution réelles



3- Vibration forcées non amortie d'un système à 1 ddl.

- Vibration des systèmes conservatif soumis à une excitation harmonique



$F_{ext}(t)$: force extérieures (N)

- On dit que $F_{ext}(t)$ est Harmonique, si l'équation $F(t)$ est sous la forme sinusoïdale :

$$F_{ext}(t) = P_0 \sin \Omega t$$

Où P_0 : Amplitude de la force excitatrice.

Ω : pulsation " " " "

- l'équation du mvt de système est sous la forme :

$$\boxed{m\ddot{x} + Kx = F_{ext}(t) = P_0 \sin \Omega t}$$

La solution de cette équation est sous la forme :

$$\boxed{x(t) = x_H + x_p}$$

Où : • x_H : solution Homgène Harmonique d'un système libre non amortie ($m\ddot{x} + Kx = 0$)

$$\boxed{x_H = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t}$$

A, B sont déterminer à partir des conditions initiales ($x(t=0)$, $\dot{x}(t=0)$)

Donc x_H est une solution transitoire

- x_p : solution particulière dépend directement de la force excitatrice

si $F(t) = 0 \longrightarrow x_p = 0$, $F(t)$ dépend de la pulsation Ω de la force excitatrice, x_p ne dépend pas aux condititions initiales (sol permanante)

Où : $\boxed{x_p = G \sin \Omega t}$

G est déterminé à partir de l'équation de mvt :

$x_p = G \sin \Omega t$, $\dot{x}_p = G\Omega \cos \Omega t$, $\ddot{x}_p = -G\Omega^2 \sin \Omega t$

On remplace x_p, $\ddot{x}_p$ à l'équation de mvt :

$$-m\Omega^2 G \sin \Omega t + K G \sin \Omega t = P_0 \sin \Omega t$$

On divise sur "$\sin \Omega t$" :

$$-m\Omega^2 G + K G = P_0$$

On divise sur "K"

$$-\frac{m}{K}\Omega^2 G + G = \frac{P_0}{K} \Longrightarrow -\frac{1}{\omega_0^2}\Omega^2 G + G = \frac{P_0}{K}$$

$$G\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{P_0}{K}$$

$$\boxed{G = \frac{P_0}{K}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = \frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}}$$

où $\boxed{\beta = \frac{\Omega}{\omega_0}} = \frac{\text{pulsation de la force excitatrice}}{\text{pulsation propre de système}}$

β : est le rapport des pulsations (fréquençes)

Donc $\boxed{x_p = \frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\sin \Omega t}$

et $\boxed{x(t) = x_H + x_p = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\sin \Omega t}$

- Système initialement au repos : $x(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=0$

∘ $x(t=0)=0$, $A\cos 0 + B\cancel{\sin 0} + \frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\cancel{\sin 0} = 0$

Donc $\boxed{A = 0}$

∘ $\dot{x}(t=0)=0$, $-\omega_0 A\cancel{\sin 0} + B\omega_0\cos 0 + \Omega\cdot\frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cos 0 = 0$

$$-B\cdot\omega_0 = \frac{P_0}{K}\cdot\frac{\Omega}{1-\beta^2} \Longrightarrow B = -\frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\frac{\Omega}{\omega_0} \Longrightarrow \boxed{B = -\frac{P_0}{K}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2}}$$

Donc pour un système initialement au repos :

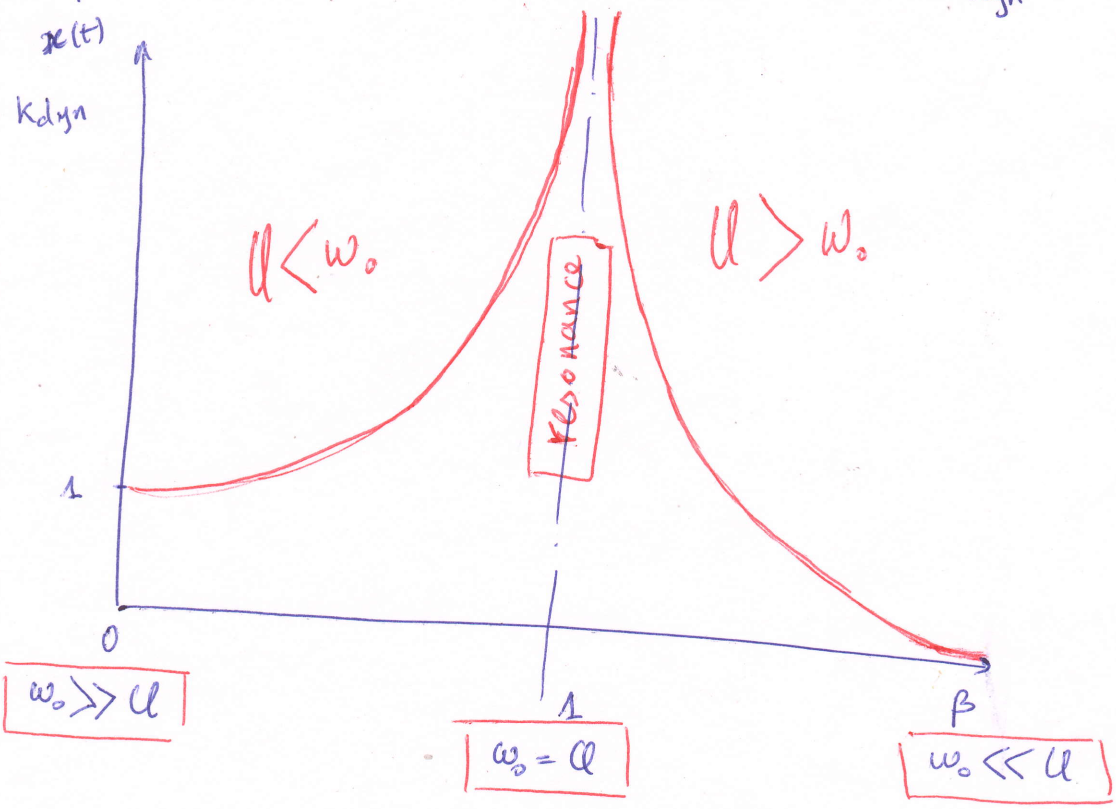
$$\boxed{\begin{aligned} x_H &= -\frac{P_0}{K}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2}\sin\omega_0 t \longrightarrow \text{solution transitoire} \\ x_p &= \frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\sin\Omega t \longrightarrow \text{solution permanente} \end{aligned}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left(-\beta\sin\omega_0 t + \sin\Omega t\right)}$$

$\frac{1}{1-\beta^2}$ c'est le facteur d'amplification dynamique K_{dyn}

$$\boxed{K_{dyn} = \left|\frac{1}{1-\beta^2}\right|} = \left|\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}\right|$$

- si $\beta = 1$ $(\omega_0 = \Omega) \rightarrow x(t) \rightarrow \infty \rightarrow K_{dyn} \rightarrow \infty$



- $\beta = 1 \rightarrow$ si $1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 0 \rightarrow \Omega \ll \omega_0$
- $\beta \rightarrow 0 \rightarrow$ si $1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \infty \rightarrow \Omega \gg \omega_0$

$\frac{P_0}{K}$, On l'appelle deplacement statique produit sous l'effet de la force P_0 appliqué "statiquement" : $\boxed{x_{st} = \frac{P_0}{K}}$

* Facteur de réponse

$$\boxed{R(t) = \frac{\text{réponse dynamique du système}}{\text{deplacement statique}} = \frac{x(t)}{P_0/K}}$$

$$R(t) = \frac{\frac{\cancel{P_0}}{\cancel{K}} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega_0 t)}{\cancel{P_0/K}}$$

$$\boxed{R(t) = \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega_0 t)}$$ ... syst initialement au repos

* Relation entre K_{dyn} et déplacement statique :

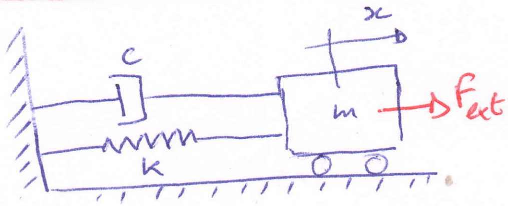
$$\boxed{K_{dyn} = \left| \frac{\text{Amplitue de la réponse permante du syst}}{\text{déplacement statique}} \right|} = \left| \frac{P_0/K \cdot 1/1-\beta^2}{P_0/K} \right|$$

$$\boxed{K_{dyn} = \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right|}$$

4- Vibrations forcées amorties d'un système à 1 ddl :

- Vibrations des systèmes amortis soumis à une excitation harmonique :

Soit le système masse - ressort - Amortisseur soumis à une force F_{ext} . Où :



$$F_{ext}(t) = P_0 \sin \Omega t \quad \text{(forme sinusoïdale)}$$

Donc l'éq du mvt de ce système est sous la forme :

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_0 \sin \Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P_0}{m} \sin \Omega t$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \Omega t} \quad \text{... Eq du mvt}$$

la solution de cette équation est sous la forme :

$$x(t) = x_H + x_p$$

x_H : solution Homogène

x_p : solution particulière

x_H : est la solution d'un système libre amortie (deuxième partie de l'équation du mvt égale à zero) :

on à 3 cas pour un système libre amortie :

$1^{ère}$ cas : $\alpha < 1 \rightsquigarrow c < c_c$: faible amortissement $\rightsquigarrow$ 2 solutions complexes

$2^{ème}$ cas : $\alpha = 1 \rightsquigarrow C = C_c$: Amortissement critique $\rightsquigarrow$ 1 solution double | cas

$3^{ème}$ cas : $\alpha > 1 \rightsquigarrow c > C_c$: Amortissement super-critique $\rightsquigarrow$ 2 solutions réelles | évitée

pour le premier cas (Amortissement faible). la solution homogène x_H est sous la forme :

$$\begin{cases} x_H = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \\ x_H = a\, e^{-\alpha\omega_0 t} \cos(\omega_a t + \phi) \\ \boxed{x_H = e^{-\alpha\omega_0 t}(A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t)} \end{cases}$$

Où r_1 et r_2 : sont des solutions complexes (Voir TD2)

$\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, A, B sont déterminé à partir des C.I (Voir TD2)

Donc x_H c'est une solution transitoire (dépend des C.I $x(t=0)$, $\dot{x}(t=0)$).

- la solution particulière x_p est donné sous la forme :

$$\boxed{x_p = G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t}$$

x_p dépend des paramètre de la force excitatrice (Ω, P_0), donc x_p est une solution permanante.

G_1, G_2 sont déterminés à partir de l'équation du mvt :

$$\begin{cases} x_p = G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t \\ \dot{x}_p = G_1 \Omega \cos \Omega t - G_2 \Omega \sin \Omega t \\ \ddot{x}_p = -G_1 \Omega^2 \sin \Omega t - G_2 \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases}$$

On remplace x_p, $\dot{x}_p$, $\ddot{x}_p$ à l'équation de mvt, On trouve :

$$\boxed{\begin{cases} G_1 = \dfrac{P_0}{K} \dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} \\ G_2 = \dfrac{P_0}{K} \dfrac{-2\alpha\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} \end{cases}} \qquad \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\boxed{x_p = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} \left((1-\beta^2)\sin \Omega t - 2\alpha\beta \cos \Omega t\right)}$$

$$\boxed{x(t) = x_H + x_p = \underbrace{e^{-\alpha\omega_0 t}(A \cos\omega_a t + B \sin \omega_a t)}_{x_H} + \underbrace{\frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin \Omega t - 2\alpha\beta \cos \Omega t\right]}_{x_p}}$$

On peut la écrire sous la forme :

Premièrement on a : $\begin{cases} A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t = a \sin(\omega_a + \phi) \rightsquigarrow x_H \\ G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t = d \sin(\Omega t + \theta) \rightsquigarrow x_p \end{cases}$

tel que :

$a = \sqrt{A^2 + B^2}$: Amplitude de la réponse trasitoire

$tg\,\phi = \dfrac{A}{B}$: phase de la R.t

$d = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}$: Amplitude de la réponse permanante

$tg\,\theta = \dfrac{G_2}{G_1}$: phase de la R.P

Donc on peut $x(t)$ sous la forme

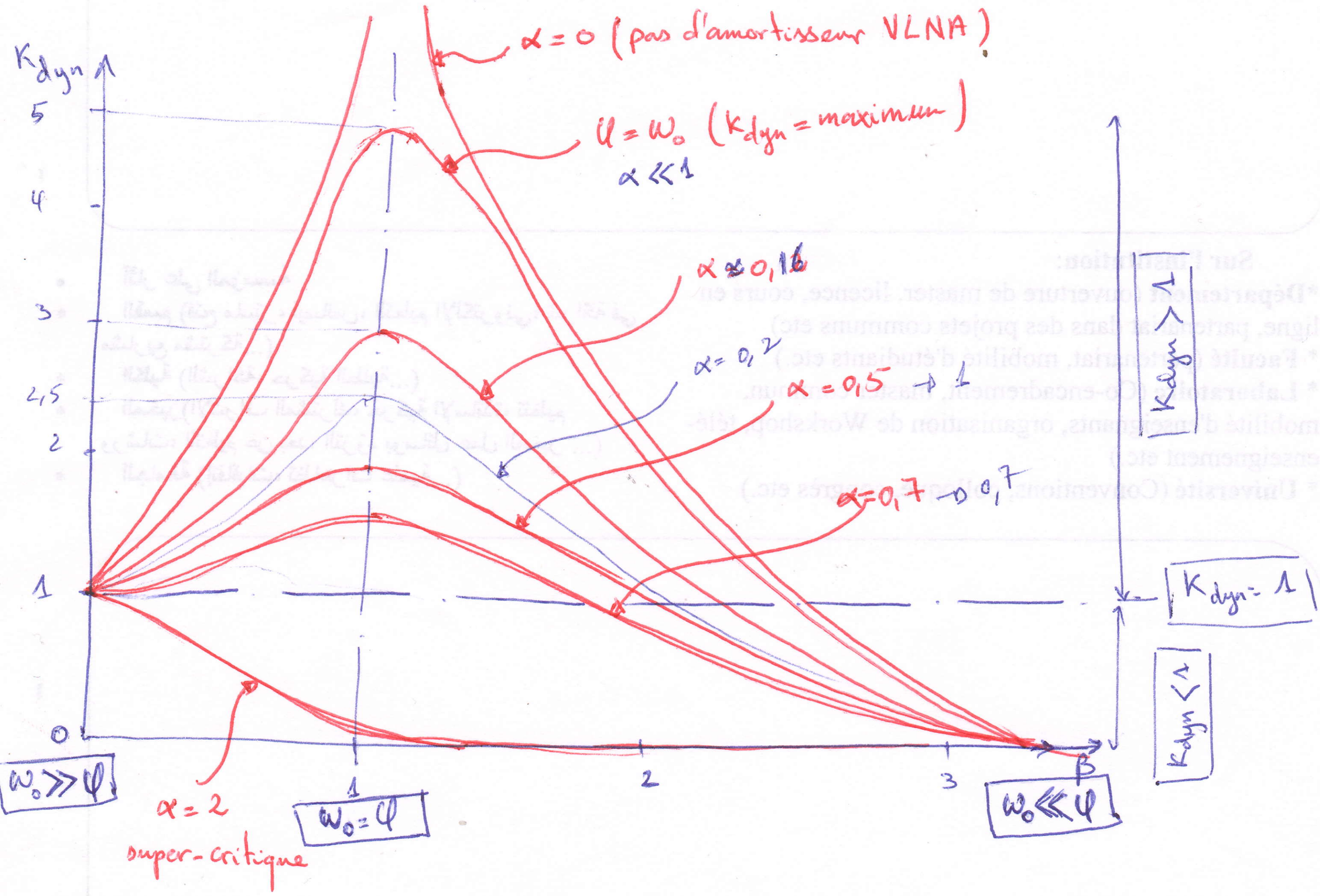
$$\boxed{x(t) = \underbrace{a\, e^{-\alpha \omega_0 t} \sin(\omega_a t + \varphi)}_{x_H} + \underbrace{d \sin(\Omega t + \theta)}_{x_p}}$$

$$\begin{cases} d = \dfrac{P_0/k}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\alpha\beta)^2}} \\[2ex] \operatorname{tg}\theta = \dfrac{G_2}{G_1} = -\dfrac{2\alpha\beta}{1-\beta^2} \end{cases}$$

* **Facteur d'amplification dynamique :**

$$K_{dyn} = \left| \frac{\text{Amplitude de la réponse permanante}}{\text{déplacement statique}} \right| = \left| \frac{d}{P_0/k} \right|$$

$$\boxed{K_{dyn} = \left| \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\alpha\beta)^2}} \right|} \quad , \quad K_{dyn} = f(\beta, \alpha)$$



* **Facteur de Réponse**

$$\boxed{R(t) = \frac{\text{Réponse dynamique du système}}{\text{deplacement statique}}} = \frac{a\, e^{-\alpha\omega_0 t} \sin(\omega_a t + \varphi) + d \sin(\Omega t + \theta)}{P_0/k}$$

Chapitre 03 — Vibration d'un système à 2 ddl

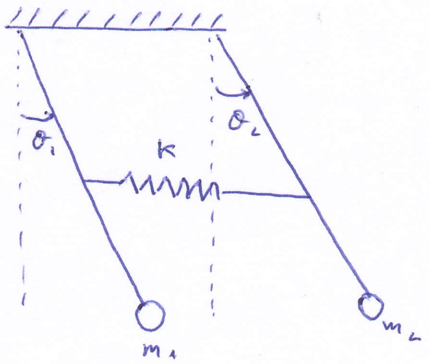
1- Vibrations libres d'un système à 2 ddl :

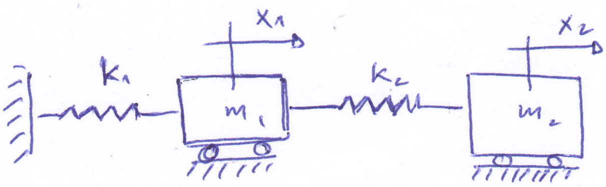
Un système est dit à 2 ddl, si on ne peut le décrire qu'à l'aide de deux coordonnées généralisés q_1 et q_2, où q_1 et q_2 n'ont aucune relations entre eux.

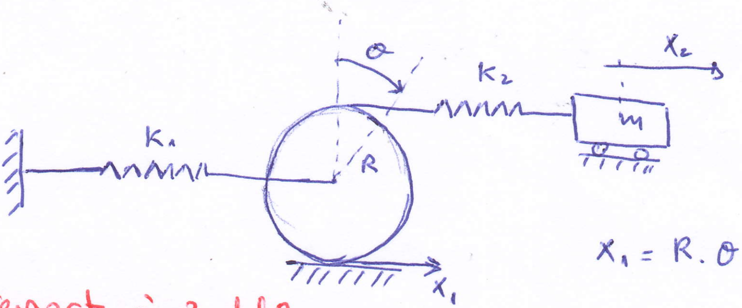
Les équations de lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Exemples



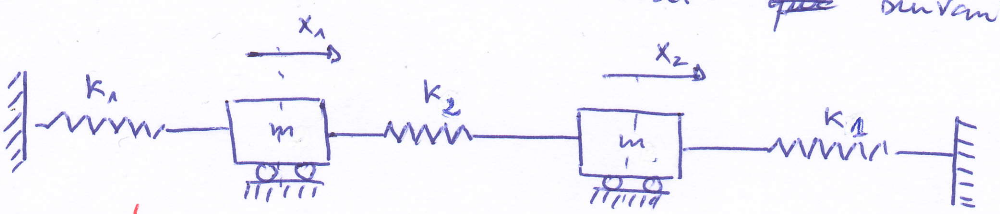




$x_1 = R.\theta$

Système masse-ressort à 2 ddl :

On considère le système masse-ressort ~~que~~ suivant :



Energie cinétique totale :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Energie potentielle totale

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_1 x_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

Eq de Lagrange : on a deux coordonnées généralisé x_1, x_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = m\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = m\ddot{x}_2 + k_1 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Donc on a deux équations de mvt couplées

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k_1 x_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}}$$ Eq de mvt.

On dit que le système est couplé élastiquement.

On peut écrire les équations du mvt sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{[m]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix}}_{[k]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$[m]$ est la matrice masse du système.

$[k]$ est la matrice de rigidité du système, l'inverse de la matrice de rigidité $[k]^{-1}$ est la matrice de souplesse ou de flexibilité

Solutions de l'équation du mvt :

On cherche les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -A_1 \omega \sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}_2(t) = -A_2 \omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -A_1 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}_2(t) = -A_2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

On remplace x_1, $\ddot{x}_1$, x_2, $\ddot{x}_2$ dans les équations du mvt :

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 \cos(\omega t + \varphi) + (K_1 + K_2) A_1 \cos(\omega t + \varphi) - K_2 A_2 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ -m\omega^2 A_2 \cos(\omega t + \varphi) + (K_1 + K_2) A_2 \cos(\omega t + \varphi) - K_2 A_1 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (K_1 + K_2 - m\omega^2) A_1 \cos(\omega t + \varphi) - K_2 A_2 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ (K_1 + K_2 - m\omega^2) A_2 \cos(\omega t + \varphi) - K_2 A_1 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (K_1 + K_2 - m\omega^2) A_1 - K_2 A_2 = 0 \\ (K_1 + K_2 - m\omega^2) A_2 - K_2 A_1 = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_1 + K_2 - m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1 + K_2 - m\omega^2 \end{bmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{[A]} = 0$$

On calcul le déterminant de la matrice $[B]$, pour calculer les pulsations du système

$$\Delta \begin{vmatrix} K_1 + K_2 - m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1 + K_2 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(K_1 + K_2 - m\omega^2)^2 - K_2^2 = 0 \qquad a^2 - b^2 \to (a-b)(a+b)$$

$$(K_1 + K_2 - m\omega^2 - K_2)(K_1 + K_2 - m\omega^2 + K_2) = 0$$

$$\begin{cases} K_1 - m\omega^2 = 0 \\ K_1 + 2K_2 - m\omega^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{K_1}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{K_1 + 2K_2}{m}} \end{cases}}$$

ω_1, ω_2 : pulsations propres du système

On a : $\boxed{\omega_1 < \omega_2}$

ω_1 : pulsation du mode fondamentale

ω_2 : " du mode Harmonique

les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ~~sont~~ sont données par :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}}$$

A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} sont déterminé à partir des condition initiales

$x_1(t=0)$, $\dot{x}_1(t=0)$, $x_2(t=0)$, $\dot{x}_2(t=0)$

Rapport des amplitudes dans les deux modes.

Mode fondamental : $A_{12} = 0$, $A_{22} = 0$

$x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

On remplace x_1 et x_2 dans (1), on trouve : (ou bien on les remplace dans l'équation du mvt) :

$$(K_1 + K_2 - m\omega_1^2) A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - K_2 A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = 0$$

et on a : $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}} \rightarrow \omega_1^2 = \frac{K_1}{m}$

$$K_2 A_{11} = K_2 A_{21}$$

$$A_{11} = A_{21} \Rightarrow \mu_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}} = 1$$

$$\boxed{\mu_1 = 1}$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ ont le même sens de déplacement dans le mode fondamental

Mode Harmonique : $A_{11} = 0$, $A_{21} = 0$

$x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, $x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

On remplace $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans (1), On trouve :

$$(K_1+K_2-m\omega_2^2)A_{21} - K_2 A_{22} = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_1+2K_2}{m}} \longrightarrow \omega_2^2 = \frac{K_1+2K_2}{m}$$

$$(K_1+K_2-K_1-2K_2)A_{21} = K_2 A_{22}$$

$$-K_2 A_{21} = K A_{22}$$

$$\mu_2 = \frac{A_{21}}{A_{22}} = -1 \qquad \boxed{\mu_2 = -1}$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ ont sens opposé dans le mode harmonique.

Donc les formules générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= A_{11}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ x_2(t) &= A_{21}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - A_{22}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned}}$$

Soit x_{10}, x_{20}, $\dot{x}_{10}$ et $\dot{x}_{20}$ sont les valeurs initiales de $x_1(t=0)$, $x_2(t=0)$, $\dot{x}_1(t=0)$, $\dot{x}_2(t=0)$ respectivement.

Donc à $t=0$, On obtient :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = A_{11}\cos\varphi_1 + A_{12}\cos\varphi_2 = x_{10} \\ x_2(t=0) = A_{21}\cos\varphi_1 - A_{22}\cos\varphi_2 = x_{20} \\ \dot{x}_1(t=0) = -\omega_1 A_{11}\sin\varphi_1 - \omega_2 A_{12}\sin\varphi_2 = \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_2(t=0) = -\omega_1 A_{11}\sin\varphi_1 + \omega_2 A_{22}\sin\varphi_2 = \dot{x}_{20} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\boxed{A_{11} = \frac{x_{10}+x_{20}}{2\cos\varphi_1} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{x_{10}-x_{20}}{2\cos\varphi_2}}$$

ou encore :

$$\boxed{A_{11} = \frac{\dot{x}_{10}+\dot{x}_{20}}{2\omega_1\sin\varphi_1} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{\dot{x}_{20}-\dot{x}_{10}}{2\omega_2\sin\varphi_2}}$$

avec $\boxed{A_{11} = A_{21} \quad \text{et} \quad A_{12} = A_{22}}$

Donc les solutions de ce système sont :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_{10}+x_{20}}{2\cos\varphi_1}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + \frac{x_{10}-x_{20}}{2\cos\varphi_2}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ x_2(t) &= \frac{x_{10}+x_{20}}{2\cos\varphi_1}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - \frac{x_{10}-x_{20}}{2\cos\varphi_2}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned}}$$

- Cas particuliers

1/ Premier cas

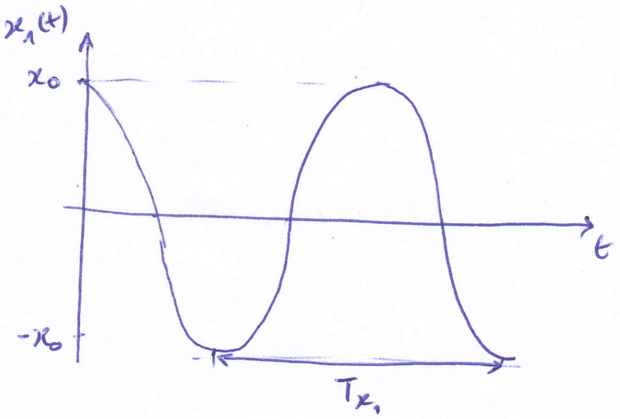
1) Considérons le cas particulier suivant : $x_{10} = x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

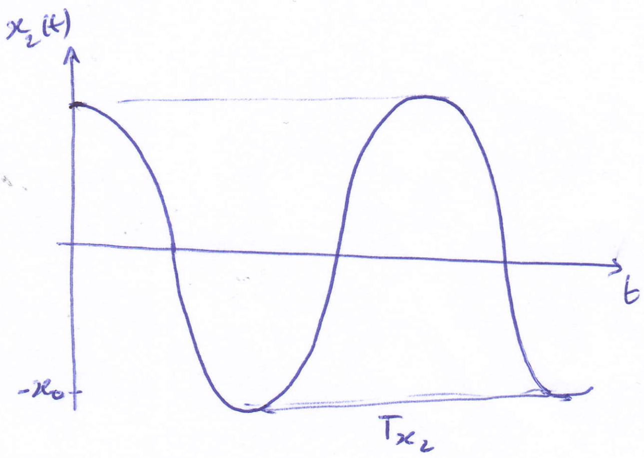
On obtient dans ce cas : $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ et $A_{11} = A_{21} = x_0$ et $A_{12} = -A_{22} = 0$

Donc $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont donnés par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= x_0\cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) &= x_0\cos(\omega_1 t) \end{aligned}}$$

Pour ces conditions initiales particulières, les deux masses oscillent à la même pulsation ω_1 et dans la même direction, On dit que les système oscille dans le mode fondamental





$$\boxed{T_{x_1} = T_{x_2}}$$

2/ Deuxième cas

Dans ce cas, On attire les deux masses dans des sens opposées tel que :

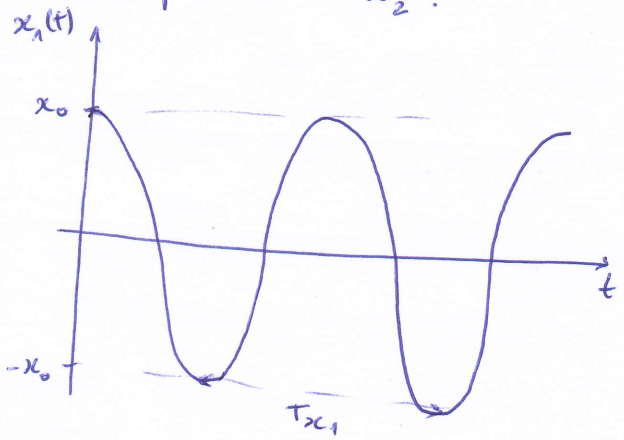
$x_{10} = -x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

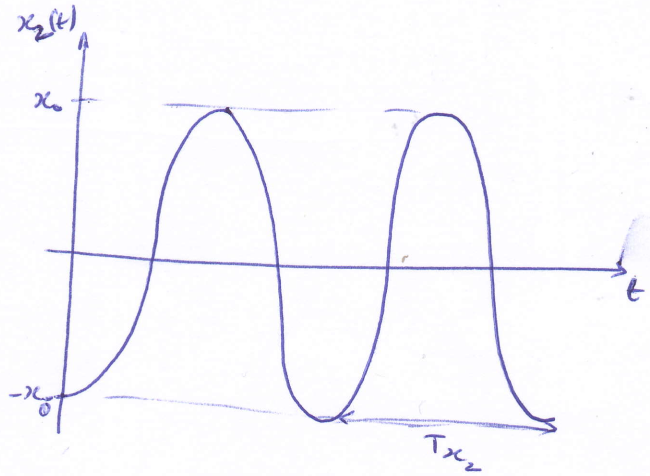
On obtient dans ce cas : $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ et $A_{11} = A_{21} = 0$ et $A_{12} = x_0$, $A_{22} = -x_0$

Donc $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont donnés par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) &= -x_0 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

On dit que le système oscille dans le deuxième mode (Mode harmonique) avec même pulsation ω_2.





3/ Troisième cas.

Considérons le cas particulier $x_{10} = x_0$, $x_{20} = 0$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$, On obtient.

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $A_{11} = A_{21} = \frac{x_0}{2}$, $A_{12} = -A_{22} = \frac{x_0}{2}$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont donnés par:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{x_0}{2}\cos \omega_2 t \\ x_2(t) &= \frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) - \frac{x_0}{2}\cos \omega_2 t \end{aligned}}$$

Rappel

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad , \quad \cos(a) = \cos(-a)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad , \quad \sin(a) = -\sin(-a)$$

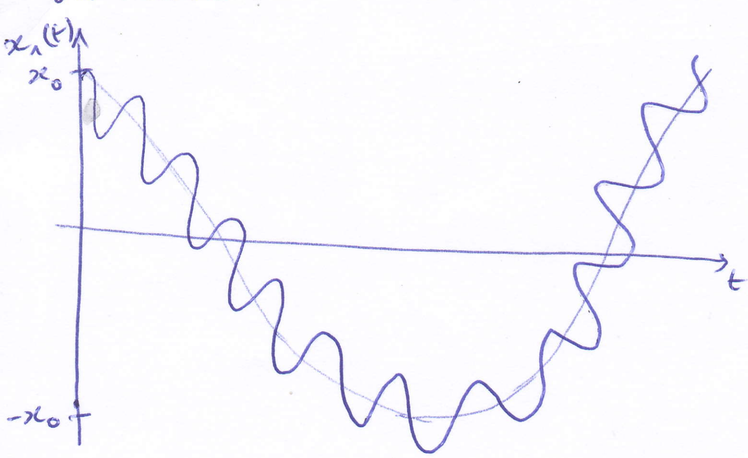
On peut écrire $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous les forme:

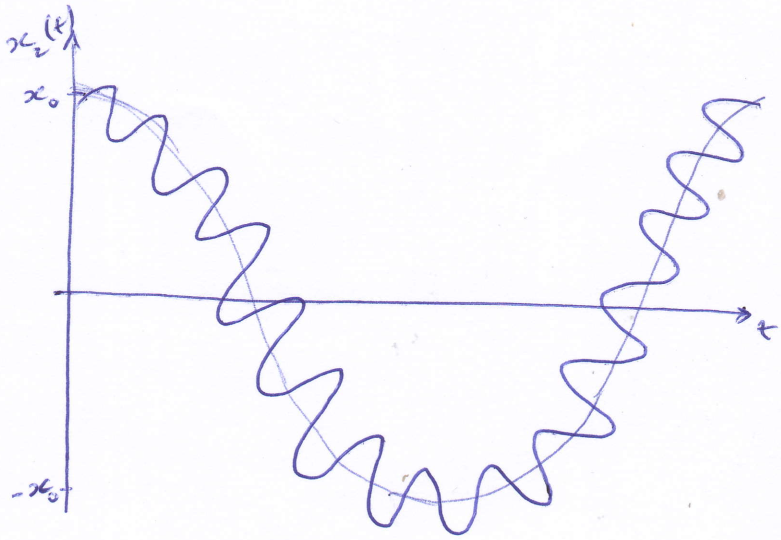
$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ x_2(t) &= x_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{aligned}}$$

les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ont des combinaisons de deux fonctions sinusoïdales des pulsations différentes ω_1 et ω_2

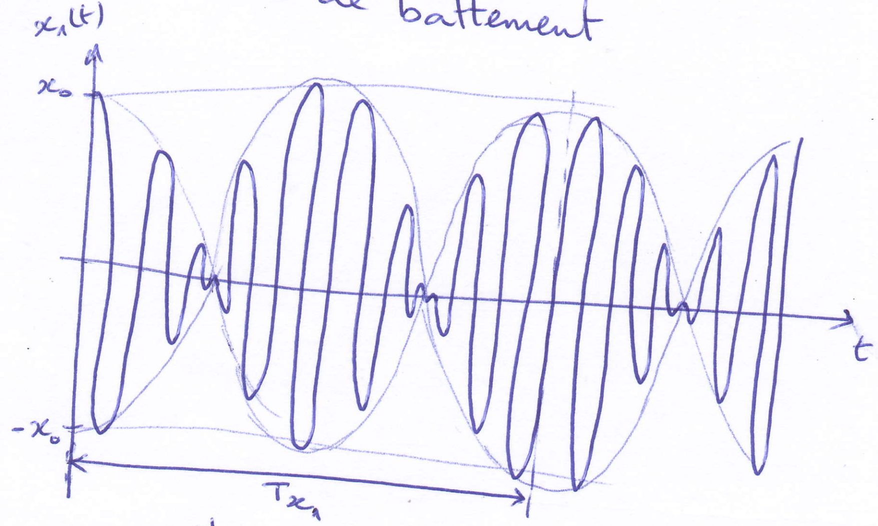
Dans le cas $K_2 >> K_1$ ou $\omega_2 >> \omega_1$ (K_1 est différent de K_2)

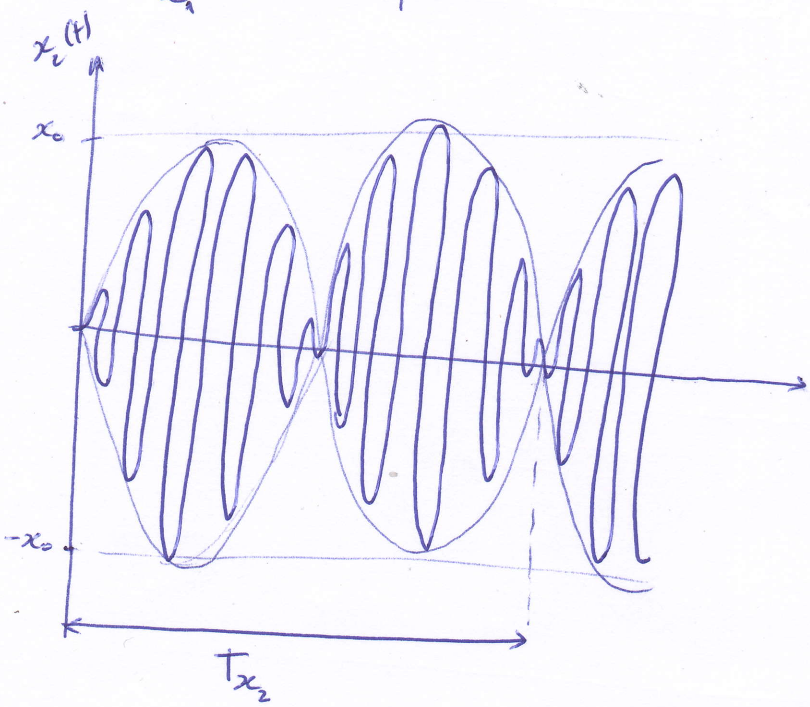
On trouve :





Dans le cas de $\omega_1 \approx \omega_2$ (ω_1 est peu différent de ω_2), On observe un phénomène de battement





2- Vibrations forcées d'un système à 2 ddl :

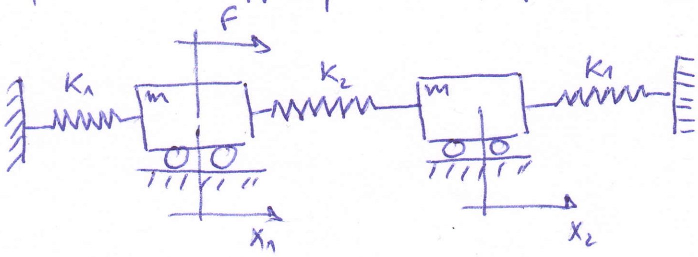
Pour un système à 2ddl en vibration forcés, les équations de Lagrange, s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = F_{q_1} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = F_{q_2} \end{cases}$$

F_{q_1}, F_{q_2} : forces généralisés.

Système masse - ressort :

Soit le système masse - ressort, la force est appliqué sur le premier solide :



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_1 x_2^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2$$

Eq de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} m\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + (K_1 + K_2) x_2 - K_2 x_2 = 0 \end{array}}$$

.. Eqs de mvt

On peut écrire les équations du mvt sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\{\ddot{q}\}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 \\ -K_2 & (K_1 + K_2) \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\{q\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{F\}}$$

Solutions dans le cas d'un force Harmonique (Sinusoïdale)

On suppose : $\boxed{F(t) = f_0 \cos \Omega t = f_0 e^{j\Omega t}}$

Ω : pulsation de la force

f_0 : Amplitude de la force

On cherche des solution sous la forme :

$$x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) = X_1 e^{j\varphi_1} e^{j\Omega t} = \bar{x}_1 e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) = X_2 e^{j\varphi_2} e^{j\Omega t} = \bar{x}_2 e^{j\Omega t}$$

tel que : $\bar{x}_1 = X_1 e^{j\varphi_1}$, $\bar{x}_2 = X_2 e^{j\varphi_2}$: Amplitudes complexes.

On a : $\boxed{\begin{cases} x_1(t) = \bar{x}_1 e^{j\Omega t} \\ x_2(t) = \bar{x}_2 e^{j\Omega t} \\ F(t) = f_0 e^{j\Omega t} \end{cases}}$

$$\begin{cases}(K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_1 e^{j\Omega t} - K_2\bar{x}_2 e^{j\Omega t} = f_0 e^{j\Omega t} \\ -K_2\bar{x}_1 e^{j\Omega t} + (K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_2 e^{j\Omega t} = 0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases}(K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_1 - K_2\bar{x}_2 = f_0 \\ -K_2\bar{x}_1 + (K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_2 = 0\end{cases}} \begin{matrix}\dots\dots(1)\\ \dots\dots(2)\end{matrix}$$

A partir de l'équation (2), on a: $\Downarrow$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{K_2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1$$

On remplace $\bar{x}_2$ dans (1), on trouve:

$$(K_1+K_2-m\Omega^2)\bar{x}_1 - K_2\left(\frac{K_2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = f_0$$

$$\left(\frac{(K_1+K_2-m\Omega^2)^2 - K_2^2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = f_0 \Longrightarrow \left(\frac{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = f_0$$

Donc:

$$\boxed{\bar{x}_1 = \frac{f_0\,(K_1+K_2-m\Omega^2)}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}}$$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{K_2}{K_1+K_2-m\Omega^2}\right)\bar{x}_1 = \frac{K_2}{\cancel{K_1+K_2-m\Omega^2}} \cdot \frac{f_0\,\cancel{(K_1+K_2-m\Omega^2)}}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}$$

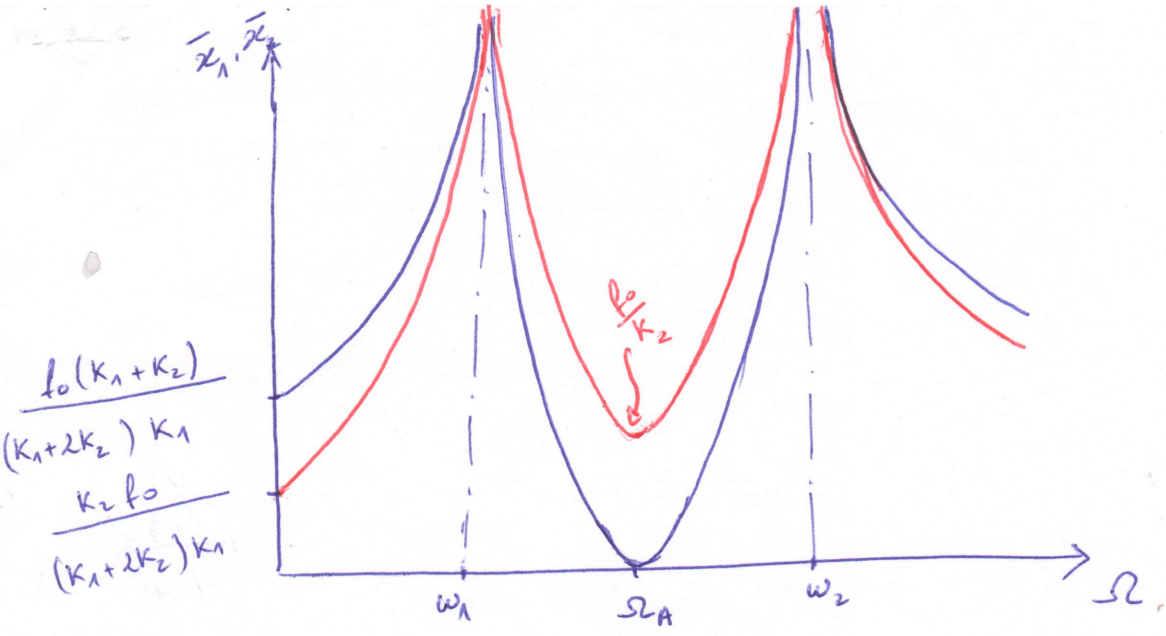
$$\boxed{\bar{x}_2 = \frac{K_2 \cdot f_0}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)}}$$

$(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2) \neq 0$ (phénomène de résonance, Amplitude $\to +\infty$)

$$\boxed{\begin{matrix}\Omega \neq \sqrt{\dfrac{K_1}{m}} = \omega_1 \\ \Omega \neq \sqrt{\dfrac{K_1+2K_2}{m}} = \omega_2\end{matrix}}$$

si $\Omega = \omega_1$ ou $\Omega = \omega_2$ on a un phénomène de résonance.

ω_1 et ω_2 : pulsations fondamentale et harmonique de ce système si $F(t) = 0$



- $\bar{x}_1 = 0$, si $f_0(K_1+K_2-m\Omega^2)=0 \rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\dfrac{K_1+K_2}{m}} = \Omega_A}$ $\boxed{\omega_1 < \Omega_A < \omega_2}$

la pulsation Ω_A est appelée la pulsation "d'antirésonance"

- si $\Omega = \Omega_A \rightarrow \boxed{\bar{x}_2 = \dfrac{f_0}{K_2}}$

Donc les solutions des équations du mvt $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrivent :

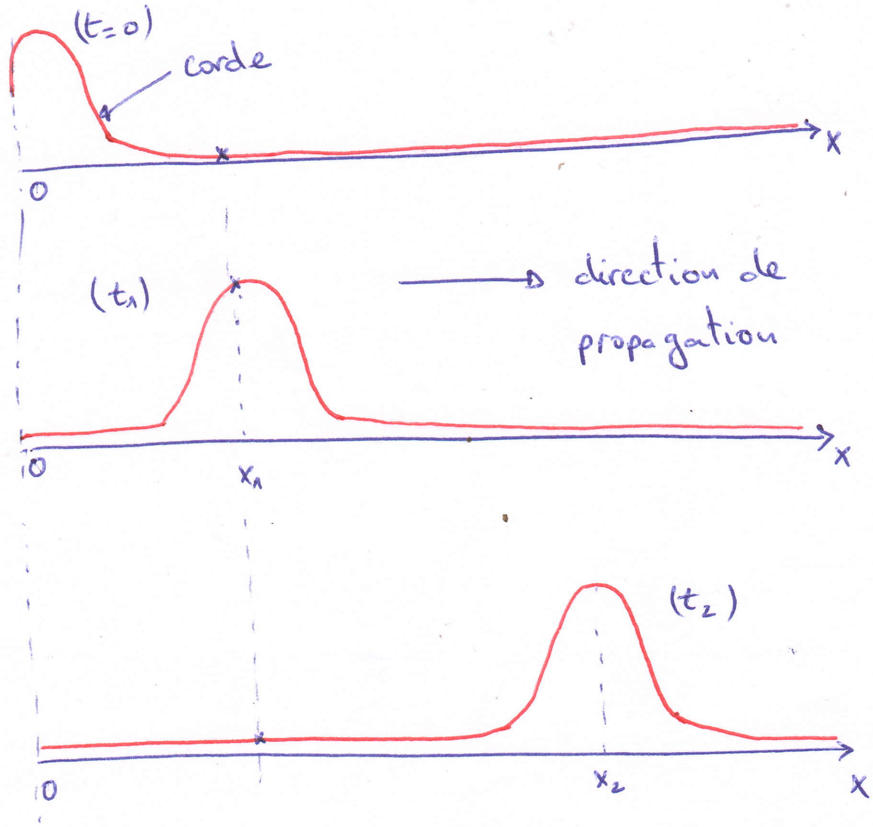
$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{f_0(K_1+K_2-m\Omega^2)}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)} \cdot e^{j\Omega t} \\ x_2(t) &= \frac{K_2 f_0}{(K_1+2K_2-m\Omega^2)(K_1-m\Omega^2)} \cdot e^{j\Omega t} \end{aligned}}$$

Chapitre 04 : Phénomènes de propagation à une dimension

- Généralité sur les Ondes :

1- Propagation d'une perturbation :

On Considère une corde tendue le long de l'axe ox et dont on secoue l'extrimité $x=0$ à l'instant $t=0$.



La perturbation crée va se propage le long de la corde.

A l'instant t_1, elle arrive en x_1 et à l'instant t_2 elle arrive a x_2.

la vitesse de propagation d'onde est :

$$\boxed{v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

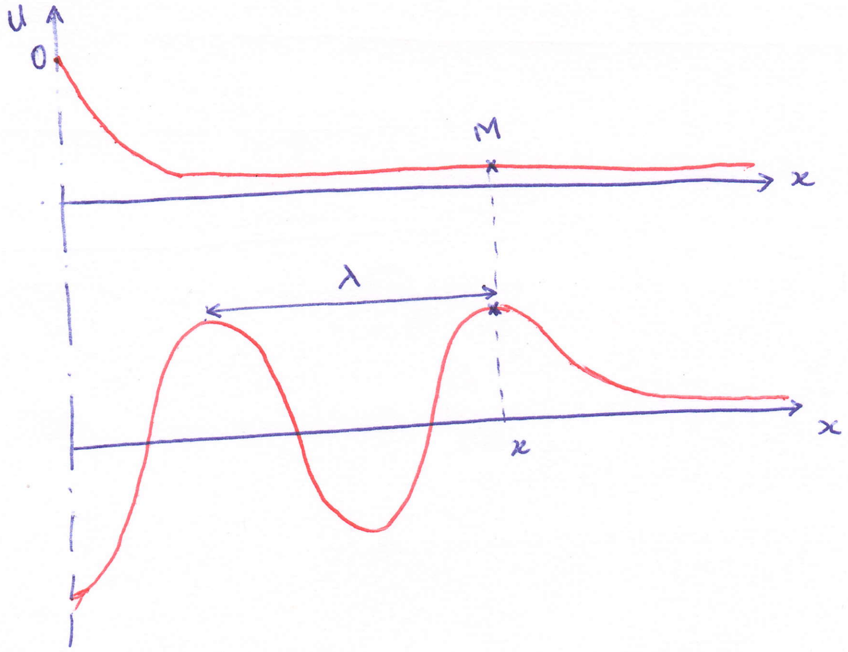
Dans la corde, la matière bouge perpendiculairement à la direction de propagation, On dit qu'on a une "<u>Onde transsversale</u>"

Dans les ressorts, la matière bouge dans la direction de propagation, On dit qu'on a une "<u>onde longitudinale</u>"

2- Propagation d'une onde sinusoïdale dans l'espace à une dimension :

On considère une corde tendue le long de l'axe ox et on impose à l'extrimité $x=0$ de la corde une vibration d'amplitude U_0 et de pulsation ω.

le mvt de l'extrimité de la corde est : $U(0,t) = U_0 \cos \omega t$.



l'onde est propagée à la vitesse $\boxed{v = \frac{x}{\Delta t}}$

$\boxed{\Delta t = \frac{x}{v}}$: le temps pour atteindre le point M.

. Le mvt de pt M est le m̂ que celui qu'avait le pt O à l'instant $-\Delta t$

$$u(M) = u(0, t - \Delta t) = u_0 \cos(\omega(t - \Delta t)) = u_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)}$$

$u(x,t)$: c'est une fct qui à une double périodicité.

* Période dans le temps $\omega t = 2\pi$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$: période
* Période dans l'espace $\omega \frac{x}{v} = 2\pi$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{x = \frac{2\pi v}{\omega}}$: longueur d'onde

$\boxed{\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}}$: longueur d'onde

On écrit aussi : $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$

$\boxed{k = \frac{v}{\omega}}$: vecteur d'onde

3. Equation de propagation à une direction :

Considérons l'équation $u(x,t) = u_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{v^2}\omega^2 u(x,t) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

Eq de propagation à une dimension.
"Eq de d'Alembert 1747"

Définitions : . En physique, une onde peut se définir comme la propagation d'une perturbation, il s'agit donc d'un phénomène qui fait intervenir à la fois l'espace et le temps.

. Une onde est une perturbation qui se propage à travers un milieu d'un endroit à un autre modifiant temporairement ses propriétés (vitesse, position, énergie) après le passage de la perturbation, le milieu reprend ses propriétés initiales.

Types d'ondes : Il existe différents types d'ondes :

1- **Ondes mécaniques :** elles se propagent dans un milieu matériel solide, liquide ou gazeux.

Ex : Ondes sonore, corde, Vagues sur l'eau ....

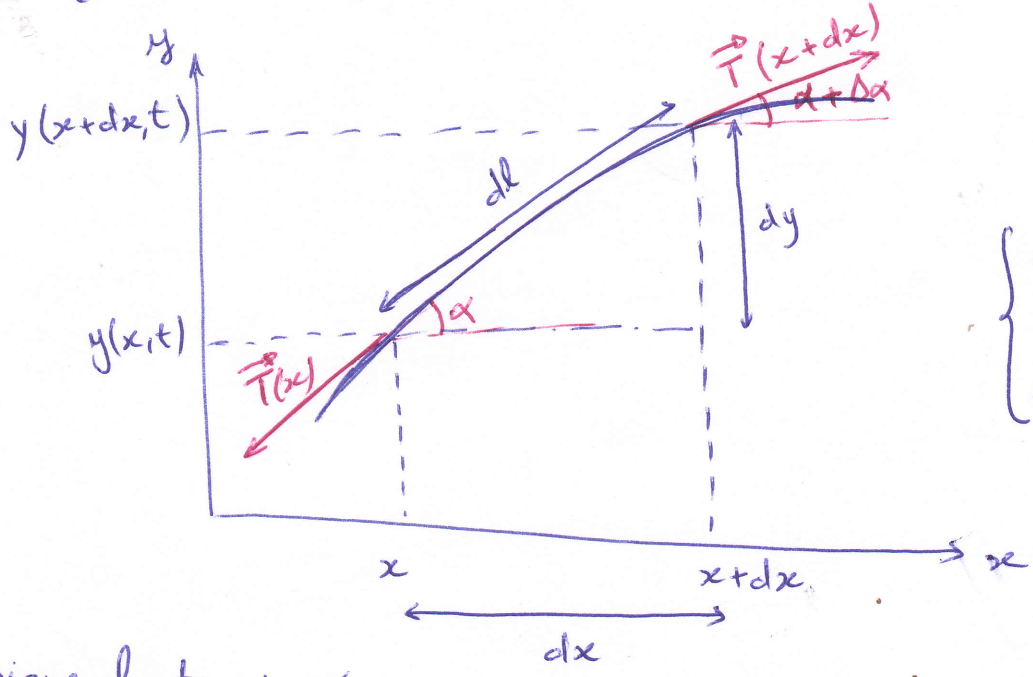
Ondes peuvent se propagent dans une ~~seul~~ dimension, 2D ou 3D.

2- **Ondes électromagnétiques :** C'est une propagation d'un champ électromagnétique variable et ne nécessite pas un milieu matériel pour sa propagation.

Ex : Ondes radios, lumière ...

Chapitre 05 Cordes vibrantes

- On considère une corde tendue sur l'axe ox, la perturbation crée est stationnaire (Onde stationnaire)



$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{dl} \approx 1 \\ \sin\alpha = \dfrac{dy}{dl} \approx \alpha \end{cases}$$

T : désigne la tension éxercée aux niveau des 2 cotée de l'élément de la corde, En négligeant l'action de la pésanteur et on applique la R.F.D (2ème loi de Newton) à un élément de longueur dl, On trouve :

$$\boxed{\mu \cdot dx \cdot \vec{a} = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)}$$

μ : Masse linéique [Kg/m] $\longrightarrow \mu = \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$

a : l'accélération [m/s^2] $\longrightarrow a = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

* Sur l'axe oy :

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t)\sin(\alpha+\Delta\alpha) - T(x,t).\sin\alpha$$

avec α est très petit :

$$\begin{cases} \sin(\alpha) \approx \alpha & \text{avec } \alpha = \dfrac{dy}{dl} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_x \\ \sin(\alpha+\Delta\alpha) \approx \alpha+\Delta\alpha & \rightsquigarrow \alpha+\Delta\alpha = \dfrac{dy}{dl} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x+dx} \end{cases}$$

$$\boxed{\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot dx = T(x+dx,t)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x+dx} - T(x,t).\left.\frac{dy}{dx}\right|_x} \cdots (1)$$

Sur l'axe ox : l'accélération $a = 0$ (pas de déplacement de la matière)

$$0 = T(x+dx) \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) - T(x,t)\cos\alpha$$

α est très petit :

$$\begin{cases} \cos\alpha \simeq 1 \\ \cos(\alpha+\Delta\alpha) \simeq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{T(x+dx,t) = T(x,t) = T_0} \ldots (2)$$

A partir de l'équation 1 et 2, On obtient :

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{dy}{\partial x}\Big|_{x+dx} - T_0 \cdot \frac{dy}{dx}\Big|_x$$

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_x\right] = T_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$ Eq d'onde de la corde

$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$: Vitesse d'onde [m/s]

Dans le cas d'une corde fixée à ses extrémités (Encastré - Encastré). la solution $y(x,t)$ de l'équation de propagation (Eq d'Alembert) est sous la forme :

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(k \cdot x + \varphi_x)\cos(\omega t + \varphi_t)}$$ avec $k = \frac{\omega}{c}$

$\forall t$, l'amplitude de la vibration est nulle aux extrémités :

$$y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L,t) = 0$$

$y(0,t) \rightarrow y(0,t) = y_0 \cos(\varphi_x)\cos(\omega t + \varphi_t) = 0 \rightarrow \boxed{\varphi_x = -\frac{\pi}{2}}$

$$y(L,t) \rightarrow y(L,t) = y_0 \sin(k.L) \cos(\omega t + \varphi_t) = 0$$

$$\sin(kL) = 0 \rightarrow \boxed{k.L = n\pi}$$

Mode propres :

Il existe un ensemble discret de modes d'oscillations libres appelés "modes propres", de la forme :

$$\boxed{y_n(x,t) = y_n \sin(k_n . x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)}$$

avec :

$$\boxed{k_n = \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}}$$

- les pulsations des modes sont donnés par :

$$\boxed{\omega_n = \frac{n\pi . c}{L} = \frac{n.\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

- λ_n : représente la longueur d'onde dans le mode n