TD N°1 *Vibrations libres*

Exercice 1

Soit le système pendule de la figure 1 (tige de longueur L sans masse + masse m + 2 ressorts attachés à la position L/2). Au repos $\theta = 0$ les ressorts sont non déformés.

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système en fonction de θ.

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement pour les petites oscillations ($\theta \approx 0$) et en déduire sa pulsation propre.

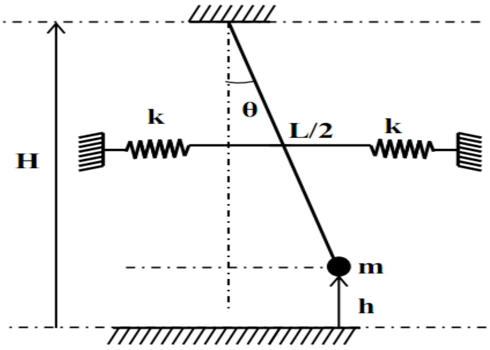


Figure 1

Exercice 2

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure 2. Au repos les ressorts ne sont pas déformés. Le cylindre de masse M de rayon R et de moment d'inertie $J = ½ MR^2$ roule sans glisser, c'est-à-dire que lorsqu'il tourne de θ, son centre de gravité se déplace de x ($x = R\theta$).

1) Déterminer le Lagrangien du système.

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement pour les petites oscillations et la période des oscillations pour $2k_1 = k_2 = k$

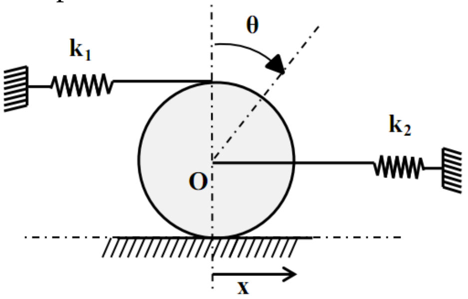


Figure 2

Exercice 3

Soit le système oscillatoire mécanique de la figure 3. Au repos la tige est horizontale et le ressort attaché à la position L/2 est comprimé de x_0 (déformation statique).

1) Déterminer les énergies cinétique et potentiel du système (en fonction de θ).

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement pour les petites oscillations.

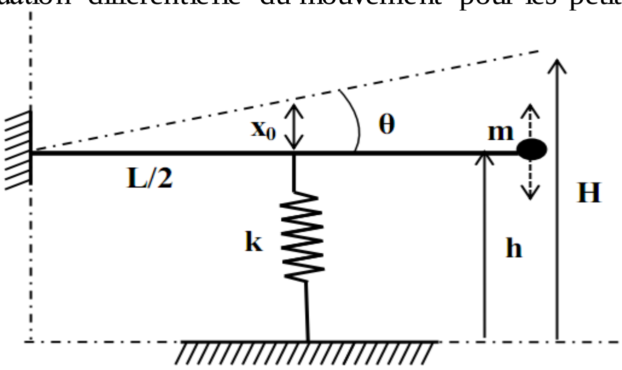


Figure 3

Solution TD N°1

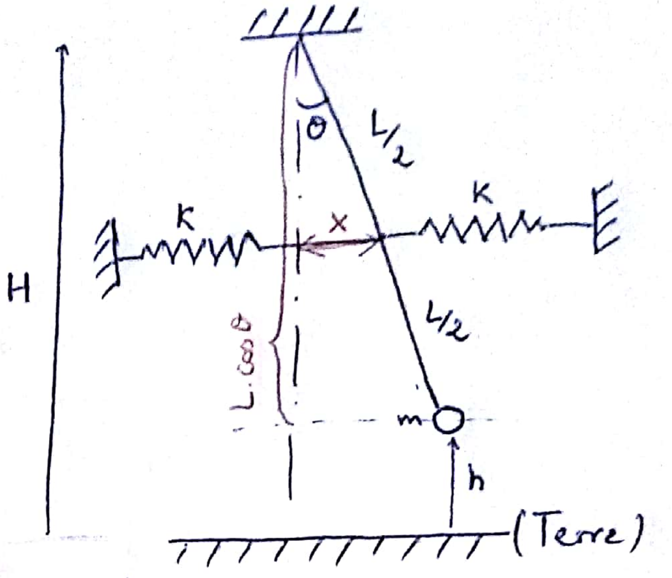
Exo1

1) Détermination des énergies

* Energie Cinétique T

$$T = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m L^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

($J = m \cdot L^2$ cas pendule)



* Energie potentielle V

$$V = \underbrace{\frac{1}{2} k \cdot x^2}_{\text{Energie de déformation du Ressort 1}} + \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}_{\text{Energie de déformation du Ressort 2}} + \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{Energie potentielle de pésanteur}}$$

avec $x = \frac{L}{2} \cdot \sin\theta$ $\quad h = H - L \cdot \cos\theta$

$$V = K \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \sin^2\theta + m \cdot g \cdot H - mg \cdot L \cdot \cos\theta$$

2) Détermination du l'éq du mvt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \cdot L^2 \dot{\theta}^2 - k \cdot \frac{L^2}{4} \sin^2\theta - \underbrace{mgH}_{Cst} + mg \cdot L \cos\theta$$

Rappel

$$\frac{d(\sin^2(x))}{dx} = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \cdot L^2 \cdot \dot{\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -k \cdot \dfrac{L^2}{2} \cos\theta \cdot \sin\theta - m \cdot g \cdot L \sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m \cdot L^2 \ddot{\theta} + k \cdot \frac{L^2}{2} \cos\theta \sin\theta + mg L \sin\theta = 0$$

* Cas des petites oscillations $\theta \approx 0 \rightarrow \cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$

$$m \cdot L^2 \ddot{\theta} + k \cdot \frac{L^2}{2} \theta + mgL\theta = 0 \Rightarrow \boxed{mL^2\ddot{\theta} + \left(k\frac{L^2}{2} + mgL\right)\theta = 0}$$ Eq du mvt

$$\boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{K}{2m} + \frac{g}{L}\right)}_{\omega_0^2} \theta = 0}$$

Donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{2m} + \frac{g}{L}}}$ → pulsation propre.

Ex 02

1) Détermination du Lagrangien "L"

$L = T - V$

$$\begin{cases} x = R.\theta \rightarrow \dot{x} = R.\dot{\theta} \\ J = \frac{1}{2} M R^2 \end{cases}$$

- Energie cinétique T

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M . \dot{x}^2}_{E_c \text{ de déplacement}} + \underbrace{\frac{1}{2} . J . \dot{\theta}^2}_{E_c \text{ de Rotation}}$$

$$T = \frac{1}{2} . M R^2 . \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} M R^2 . \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M R^2 . \dot{\theta}^2$$

- Energie Potentielle de déformation :

$$V = \frac{1}{2} K_1 (x + R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 x^2 = \frac{1}{2} K_1 4 R^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 R^2 \theta^2$$

$$V = \frac{1}{2} (4 K_1 + K_2) R^2 . \theta^2$$

$$L = T - V = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (4 K_1 + K_2) R^2 . \theta^2$$

2) Détermination de l'éq du mvt : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} M R^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2} M . R^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(4 K_1 + K_2) R^2 \theta$$

$$\frac{3}{2} M R^2 \ddot{\theta} + (4 K_1 + K_2) R^2 \theta = 0$$

On a : $2 K_1 = K_2 = K$

Donc on obtient : $\frac{3}{2} M R^2 \ddot{\theta} + (2K + K) R^2 \theta = 0$

$$\frac{3}{2} M R^2 \ddot{\theta} + 3 K R^2 \theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{2K}{M}}_{\omega_0^2} . \theta = 0} \rightarrow \text{Eq du mvt}$$

Pulsation propre $\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}}}$

Période propre $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2K}{M}}} = 2\pi . \sqrt{\frac{M}{2K}} = \pi \sqrt{\frac{2M}{K}} \Rightarrow \boxed{T = \pi \sqrt{\frac{2M}{K}}}$

Exo3 x_0 : déformation statique

1) Détermination de énergies :

- Energie Cinétique T :

$$T = \frac{1}{2} J . \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m L^2 . \dot{\theta}^2$$

- Energie Potentielle V :

$$V = \frac{1}{2} K (x - x_0)^2 + m . g . H = \frac{1}{2} K \left(\frac{L}{2} \sin\theta - x_0 \right)^2 + m g (L \sin\theta + h)$$

2) Détermintion de l'eq des mvt : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m . L^2 . \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \cancel{\quad} \frac{k L^2}{4} \cos\theta \sin\theta + k \frac{L}{2} x_0 \cos\theta - m g . L \cos\theta$$

Cas des petites oscillations

$$m . L^2 . \ddot{\theta} + \frac{K L^2}{4} \theta \underbrace{- k \frac{L}{2} x_0 + m g . L}_{= 0 \text{ (au repos)}} = 0$$

$$m . L^2 \ddot{\theta} + \frac{K L^2}{4} \theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{K}{4m} . \theta = 0}$$