PRODUIT TENSORIEL
ALGÈBRE TENSORIELLE
ALGÈBRE SYMÉTRIQUE

Dans tout ce chapitre, A désignera un anneau commutatif.

1. Applications bilinéaires

Définition 1.1. Soient M, N et P des A-modules. Une application $f : M \times N \longrightarrow P$ est A-**bilinéaire** si pour tous x, x_1, x_2 dans M, pour tous y, y_1, y_2 dans N et tout a dans A, on a

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

$$f(ax, y) = af(x, y) = f(x, ay).$$

Notation. L'ensemble des applications A-bilinéaires de $M \times N$ dans P est noté $\mathrm{Hom}_A(M, N; P)$. Dans toute la suite, pour x fixé dans M, on notera f_x l'application $N \longrightarrow P$ définie par

$$\forall\, y \in N,\ \ f_x(y) = f(x, y)$$

et pour tout y fixé dans N, on notera f_y l'application $M \longrightarrow P$ définie par

$$\forall\, x \in M,\ \ f_y(x) = f(x, y).$$

Avec ces notations, l'application f est A-bilinéaire si et seulement si, pour tout $x \in M$ et tout $y \in N$, les applications f_x et f_y sont A-linéaires.

On définit sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_A(M, N; P)$ une addition et une multiplication par les scalaires de la manière suivante : pour tous f, f_1, f_2 dans $\mathrm{Hom}_A(M, N; P)$, pour tout a dans A et pour tout (x, y) dans $M \times N$, on pose

$$(f_1 + f_2)(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$$

$$(af)(x, y) = af(x, y).$$

Proposition 1.2. *Muni de ces deux opérations,* $\mathrm{Hom}_A(M, N; P)$ *est un A-module.* ◊

Proposition 1.3. *Soient M, N et P des A-modules, l'application*

$$\Phi_{M,N,P} : \mathrm{Hom}_A(M, N; P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$$

définie par

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_A(M, N; P),\ \forall x \in M, \quad \Phi_{M,N,P}(f)(x) = f_x$$

est un isomorphisme de A-modules.

Démonstration. La linéarité de l'application $\Phi_{M,N,P}$ est évidente. Pour tout $x \in M$, pour tout $y \in N$ et pour tout $\theta \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$, on pose $f(x, y) = \theta(x)(y)$. On vérifie facilement que f est une application bilinéaire de $M \times N$ dans P, que l'application

$$\Psi_{M,N,P} : \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N; P)$$

définie par

$$\forall \theta \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)), \quad \Psi_{M,N,P}(\theta) = f$$

est A-linéaire et que

$$\Psi_{M,N,P} \circ \Phi_{M,N,P} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_A(M,N;P)}, \quad \Phi_{M,N,P} \circ \Psi_{M,N,P} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P))}.$$

Cela prouve que $\Phi_{M,N,P}$ et $\Psi_{M,N,P}$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. ◊

Exercice E1. *Soient M' un A-module et $u \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$. On considère l'application*

$$\mathrm{Hom}_A(u, N; P) : \mathrm{Hom}_A(M', N; P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N; P)$$

définie par $\mathrm{Hom}_A(u,N;P)(f') = f$*, avec* f *définie par* $f(x,y) = f'(u(x),y)$*. On rappelle que l'on a une application* A*-linéaire*

$$\overline{u} : \mathrm{Hom}_A(M', \mathrm{Hom}_A(N,P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P))$$

définie par $\overline{u}(\varphi') = \varphi' \circ u$ *(cf. remarque VII.1.2).*

Montrer que l'application $\mathrm{Hom}_A(u,N;P)$ *est* A*-linéaire et que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M',N;P) & \xrightarrow{\Phi_{M',N,P}} & \mathrm{Hom}_A(M',\mathrm{Hom}_A(N,P)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(u,N;P)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{u}} \\ \mathrm{Hom}_A(M,N;P) & \xrightarrow[\Phi_{M,N,P}]{} & \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P)) \end{array}$$

Montrer que l'on obtient des carrés commutatifs analogues si l'on considère des applications linéaires $v \in \mathrm{Hom}_A(N,N')$ *et* $w \in \mathrm{Hom}_A(P,P')$*.*

Ces commutativités expriment que le morphisme $\Phi_{M,N,P}$ *est* ***fonctoriel****.*

2. Produit tensoriel

Soient M, N, P des A-modules et le module libre $L = A^{(M\times N)}$. On note $(e_{(x,y)})$, avec $(x,y) \in M \times N$, une base de L et i l'application de $M \times N$ dans L qui à $(x,y) \in M \times N$ associe $e_{(x,y)}$. D'après la propriété universelle de module libre (théorème IV.7.3), une application $f : M \times N \longrightarrow P$ induit une application A-linéaire $\overline{f} : L \longrightarrow P$ telle que $f = \overline{f} \circ i$. L'application f est A-bilinéaire si et seulement si l'application $\overline{f}$ s'annule sur le sous-module Q de L engendré par les éléments

$$\begin{array}{l} e_{(x_1+x_2,y)} - e_{(x_1,y)} - e_{(x_2,y)} \\ e_{(x,y_1+y_2)} - e_{(x,y_1)} - e_{(x,y_2)} \\ e_{(ax,y)} - ae_{(x,y)} \\ e_{(x,ay)} - ae_{(x,y)} \end{array}$$

où x, x_1, x_2 parcourent M, y, y_1, y_2 parcourent N et a parcourt A. Autrement dit, l'application f est A-bilinéaire si et seulement si il existe une application A-linéaire $\tilde{f} : L/Q \longrightarrow P$ telle que $\overline{f} = \tilde{f} \circ q$, où $q : L \longrightarrow L/Q$ est la projection canonique. On pose $\alpha_{M,N} = q \circ i$.

Définition 2.1. Le A-module L/Q est noté $M \otimes_A N$ et est appelé le **produit tensoriel** des A-modules M et N.

Ce qui précède montre le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Soient M, N et P des A-modules. Pour toute application A-bilinéaire $f : M \times N \longrightarrow P$, il existe une application A-linéaire $\bar{f} : M \otimes_A N \longrightarrow P$ unique telle que $f = \bar{f} \circ \alpha_{M,N}$.* $\diamondsuit$

Autrement dit :

Théorème 2.3 (propriété universelle du produit tensoriel). *Pour tous A-modules M et N, le couple $(M \otimes_A N, \alpha_{M,N})$ est la solution du problème universel suivant :*

il existe un A-module $\Gamma(M,N)$ et une application A-bilinéaire $j : M \times N \longrightarrow \Gamma(M,N)$ tels que, pour tout A-module P et toute application A-bilinéaire $f : M \times N \longrightarrow P$, il existe une unique application A-linéaire $\bar{f} : \Gamma(M,N) \longrightarrow P$ telle que $f = \bar{f} \circ j$. $\diamondsuit$

Notation. Pour tout $x \in M$ et tout $y \in N$, on pose $\alpha_{M,N}(x,y) = x \otimes y$.

Donc $x \otimes y$ est la classe dans $M \otimes N = L/Q$ de l'élément $e_{(x,y)}$. Puisque tout élément de L s'écrit de manière unique $\sum_{\text{finie}} a_{(x,y)} e_{(x,y)}$, tout élément de $M \otimes N$ s'écrit de manière **non unique** $\sum_{\text{finie}} a_{(x,y)} x \otimes y$, avec $a_{(x,y)} \in A$.

Ce qui précède se résume en la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Le A-module $M \otimes_A N$ est engendré par les éléments $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$, soumis aux relations suivantes :*

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

$$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$$

pour tous $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$ et $a \in A$. $\diamondsuit$

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition 2.5.

(i) *Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x \otimes y = 0$.*

(ii) *Les A-modules $M \otimes_A N$ et $N \otimes_A M$ sont isomorphes.*

(iii) *Les A-modules $A \otimes_A M$, $M \otimes_A A$ et M sont isomorphes.*

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence immédiate de l'une quelconque des relations de la proposition 2.4. L'application A-linéaire $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ est un isomorphisme, ce qui entraîne (ii). Les applications A-linéaires $a \otimes x \mapsto ax$ et $x \mapsto 1 \otimes x$ sont réciproques l'une de l'autre, d'où (iii). $\diamondsuit$

Exemple 2.6. Soient $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Alors, pour tout $x \in M$ et tout $y \in N$, on a

$$m(x \otimes y) = mx \otimes y = 0$$

$$n(x \otimes y) = x \otimes ny = 0$$

donc l'ordre de l'élément $x \otimes y$ dans le groupe abélien $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ divise m et n. Par conséquent, tout élément de ce groupe est d'ordre 1, *i.e.* est nul. Donc $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$.

Proposition 2.7. *Pour tous A-modules M, N et P, on a les isomorphismes de A-modules suivants :*

$$\mathrm{Hom}_A(M, N; P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.3 et du théorème 2.2. $\diamondsuit$

Proposition – Définition 2.8. *Soient $u : M \longrightarrow M'$ et $v : N \longrightarrow N'$ deux applications A-linéaires. Il existe une unique application A-linéaire*

$$u \otimes v : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$$

appelée produit tensoriel des applications u et v, définie par

$$(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y),$$

telle que $\alpha_{M',N'} \circ (u, v) = (u \otimes v) \circ \alpha_{M,N}$.

Démonstration. L'application composée

$$\alpha_{M',N'} \circ (u, v) : M \times N \longrightarrow M' \times N' \longrightarrow M' \otimes_A N'$$

est A-bilinéaire. Elle se factorise donc de manière unique par $M \otimes_A N$, i.e. il existe une unique application A-linéaire $u \otimes v : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "(u,v)"] \arrow[d, "\alpha_{M,N}"'] & M' \times N' \arrow[d, "\alpha_{M',N'}"] \\ M \otimes_A N \arrow[r, "u \otimes v"'] & M' \otimes_A N' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. $\diamondsuit$

Exercice E2. *Montrer que, avec des notations évidentes,*

$$(u \otimes v) \circ (u' \otimes v') = (u \circ u') \otimes (v \circ v').$$

Théorème 2.9. *La suite de A-modules*

$$N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si, pour tout A-module M, la suite de A-modules

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes u} M \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes v} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Soient

$$N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte et P un A-module. En appliquant deux fois le théorème VII.1.3, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N'', P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N', P)$$

est exacte, donc aussi la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N'', P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N', P)).$$

D'après la proposition 2.7, il en est de même de la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N'', P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N', P).$$

Cela étant vrai pour tout A-module P, d'après le théorème VII.1.3, la suite

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes u} M \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes v} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

Le même raisonnement appliqué dans l'autre sens montre que, si cette dernière suite est exacte pour tout A-module M, c'est en particulier le cas pour $M = A$ et la suite

$$N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \longrightarrow 0$$

est exacte. ◇

Remarque 2.10. Ce qui précède montre que si v est un morphisme surjectif, pour tout A-module M, le morphisme $\mathrm{Id}_M \otimes v$ est aussi surjectif.

Attention. *Cette propriété est fausse pour l'injectivité, comme le montre l'exemple ci-dessous* (cf. aussi TR.VIII.A).

Exemple 2.11. Soient $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z} \xrightarrow{v} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où u est la multiplication par 2 et v est la projection canonique. D'après la proposition-définition 2.8, tout élément de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \otimes u)$ est de la forme $\sum x \otimes y$, avec $y \in \mathrm{Im}(u)$, donc

$$x \otimes y = x \otimes 2z = 2x \otimes z = 0$$

et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \otimes u) = 0$. Or, on vérifie facilement que les groupes abéliens $Z/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}$ et $Z/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ sont isomorphes par le morphisme $x \otimes 2 \mapsto x \otimes 1$. D'après la proposition 2.5, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$, donc $Z/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z} \neq 0$. On en déduit que $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \otimes u$ n'est pas injective.

Corollaire 2.12. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Pour tout A-module M, le A-module $A/\mathfrak{a}A \otimes_A M$ est isomorphe au A-module $M/\mathfrak{a}M$.*

Démonstration. La suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$$

est exacte. Par conséquent, pour tout A-module M, la suite

$$\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M \longrightarrow A/\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow 0$$

est exacte. Mais $A \otimes_A M$ est isomorphe à M et le morphisme $\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M$ s'identifie à $\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow M$ défini par $a \otimes m \mapsto am$. D'autre part, de l'égalité $a \otimes m = 1 \otimes am$, on déduit que l'image de $\mathfrak{a} \otimes_A M$ dans M est isomorphe à $\mathfrak{a}M$. D'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}M \longrightarrow M \longrightarrow A/\mathfrak{a} \otimes M \longrightarrow 0$$

et $A/\mathfrak{a} \otimes M$ est isomorphe à $M/\mathfrak{a}M$. ◇

3. Commutation du produit tensoriel aux sommes directes

Théorème 3.1. *Soient I un ensemble d'indices, $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules et N un A-module. On a un isomorphisme naturel de A-modules*

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_A N \simeq \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N).$$

Démonstration. Tout élément de $(\bigoplus_{i\in I} M_i) \times N$ s'écrit de manière unique $(\Sigma_{i\in S} x_i, y)$, où S est un sous-ensemble fini de I. On considère l'application

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \times N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$$

définie par $(\Sigma_{i\in S} x_i, y) \mapsto \Sigma_{i\in S}(x_i \otimes y)$. On vérifie facilement que c'est une application A-bilinéaire, d'où une application A-linéaire

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N).$$

On définit de manière analogue une application A-linéaire

$$\bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N) \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes N$$

qui est inverse de la précédente. ◊

Corollaire 3.2. *Soient M un A-module et N un A-module libre de base $\{y_i\}_{i\in I}$. Tout élément de $M \otimes_A N$ s'écrit, de manière unique, $\Sigma_{i\in I} x_i \otimes y_i$, $x_i \in M$ nul sauf pour un nombre fini de $i \in I$.*

Démonstration. La base $\{y_i\}_{i\in I}$ permet de définir un isomorphisme de A-modules

$$N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} Ay_i.$$

D'après le théorème précédent, on a un isomorphisme

$$M \otimes_A N \simeq \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_A Ay_i)$$

d'où le résultat. ◊

Corollaire 3.3. *Si M et N sont des A-modules libres de bases respectives $\{x_i\}_{i\in I}$ et $\{y_j\}_{j\in J}$, le A-module $M \otimes_A N$ est libre de base $\{x_i \otimes y_j\}_{i\in I, j\in J}$.*

Démonstration. Il est clair que $\{x_i \otimes y_j\}_{i\in I, j\in J}$ est une famille génératrice du A-module $M \otimes_A N$. Si $\Sigma_{i,j} a_{i,j}(x_i \otimes y_j) = 0$ (somme finie), alors $\Sigma_j(\Sigma_i a_{i,j} x_i) \otimes y_j = 0$. D'après l'unicité de l'écriture démontrée au corollaire 3.2, cela implique $\Sigma_i a_{i,j} x_i = 0$ pour tout j de J, d'où $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. La famille $\{x_i \otimes y_j\}_{i\in I, j\in J}$ est donc libre. ◊

Corollaire 3.4. *Si M et N sont des A-modules libres de rangs respectifs m et n, alors le A-module $M \otimes_A N$ est libre de rang mn.* $\diamondsuit$

Exercice E3. *Soient A un anneau commutatif, M et N deux A-modules.*

1. *On suppose que N est libre de base $(n_i)_{i\in I}$. Montrer que tout élément $\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i$ de $M \otimes_A N$ (écriture unique) est nul si et seulement si tous les m_i, $i \in I$, sont nuls.*

2. *On suppose N quelconque. Montrer que $\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i = 0$ si et seulement si il existe une famille $(m'_j)_{j\in J}$ d'éléments de M et une famille finie (a_{ij}) d'éléments de A telles que :*

$$\sum_{j\in J} a_{ij} m'_j = m_i \quad \text{pour tout } i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} a_{ij} n_i = 0 \quad \text{pour tout } j$$

(on pourra utiliser une présentation de N par un module libre).

Proposition 3.5. *Soient M et N des A-modules libres de rang fini. Il existe un isomorphisme de A-modules*

$$\mathrm{End}_A(M) \otimes_A \mathrm{End}_A(N) \longrightarrow \mathrm{End}_A(M \otimes_A N)$$

défini par $f \otimes g \mapsto f \tilde{\otimes} g$, où $f \tilde{\otimes} g$ est l'application A-linéaire produit tensoriel des applications f et g.

Démonstration. Soient $\{v_i\}_{i\in I}$ une base de M et $\{w_j\}_{j\in J}$ une base de N (I et J ensembles finis), alors $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ est une base du A-module $M \otimes_A N$. Pour tout (i,j) et (i',j') de $I \times J$, il existe un unique $f_{i,i'} \in \mathrm{End}_A(M)$ et un unique $g_{j,j'} \in \mathrm{End}_A(N)$ tels que

$$f(v_i) = v_{i'} \quad \text{et} \quad f(v_k) = 0 \quad \text{si } k \neq i$$

$$g(w_j) = w_{j'} \quad \text{et} \quad g(w_l) = 0 \quad \text{si } l \neq j.$$

Il est facile de vérifier que les familles $\{f_{i,i'}\}_{(i,i')\in I\times I}$ et $\{g_{j,j'}\}_{(j,j')\in J\times J}$ sont des bases respectives des A-modules $\mathrm{End}_A(M)$ et $\mathrm{End}_A(N)$. On a

$$(f_{i,i'} \tilde{\otimes} g_{j,j'})(v_k \otimes w_l) = v_{i'} \otimes w_{j'} \quad \text{si } (k,l) = (i,j)$$

$$(f_{i,i'} \tilde{\otimes} g_{j,j'})(v_k \otimes w_l) = 0 \quad \text{sinon}$$

donc $\{f_{i,i'} \tilde{\otimes} g_{j,j'}\}_{(i,i')\in I\times I,(j,j')\in J\times J}$ est une base du A-module $\mathrm{End}_A(M \otimes_A N)$. Puisque $\{f_{i,i'} \otimes g_{j,j'}\}_{(i,i')\in I\times I,(j,j')\in J\times J}$ est une base du A-module $\mathrm{End}_A(M) \otimes_A \mathrm{End}_A(N)$, on a le résultat. $\diamondsuit$

Remarque 3.6. D'après cet isomorphisme, on peut identifier $f \tilde{\otimes} g$ et $f \otimes g$.

4. Associativité du produit tensoriel

Théorème 4.1. *Soient M, N et P des A-modules. Il existe un unique isomorphisme de A-modules*

$$M \otimes_A (N \otimes_A P) \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

défini par

$$\forall (x, y, z) \in M \times N \times P, \quad x \otimes (y \otimes z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z.$$

Démonstration. L'unicité est évidente, puisque les éléments $(x \otimes y) \otimes z$ (resp. $x \otimes (y \otimes z)$) engendrent le A-module $(M \otimes_A N) \otimes_A P$ (resp. $M \otimes_A (N \otimes_A P)$).

Montrons l'existence. On vérifie aisément que, pour tout x dans M, l'application

$$f_x : N \times P \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

définie par $(y, z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$ est A-bilinéaire. On en déduit l'application A-linéaire

$$\tilde{f}_x : N \otimes_A P \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

qui à $y \otimes z$ associe $(x \otimes y) \otimes z$. L'application

$$f : M \times (N \otimes_A P) \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

définie par $(x, t) \mapsto \tilde{f}_x(t)$ est A-bilinéaire, d'où l'application A-linéaire

$$\tilde{f} : M \otimes_A (N \otimes_A P) \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

définie par $x \otimes (y \otimes z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$.

En faisant le même raisonnement dans l'autre sens, on obtient une application A-linéaire

$$\tilde{g} : (M \otimes_A N) \otimes_A P \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_A P)$$

définie par $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ et l'on vérifie que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont inverses l'une de l'autre. $\diamondsuit$

Notation. Pour trois A-modules M, N et P, on note $M \otimes_A N \otimes_A P$ l'un des modules $M \otimes_A (N \otimes_A P)$ ou $(M \otimes_A N) \otimes_A P$. Plus généralement, on définit de la même manière $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$, pour tout entier $n \geqslant 3$.

Nous allons donner ici une version plus conceptuelle du produit tensoriel de $n \geqslant 3$ modules, sous forme de solution d'un problème universel analogue au théorème 2.2.

***Définition* 4.2.** Soient $M_1, \dots, M_n, P$ des A-modules. Une application n-**multilinéaire** définie sur $M_1, \dots, M_n$ est une application $M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow P$ qui est A-linéaire en chaque variable. Si $M_1 = \cdots = M_n = M$, on dit que f est une application n-multilinéaire définie sur M. Lorsque $P = A$, on parle de **forme** n-multilinéaire.

On note $L = A^{M_1 \times \cdots \times M_n}$ le A-module libre engendré par $M_1 \times \cdots \times M_n$, dont on notera $\{e_{(x_1,\dots,x_n)}\}$, $(x_1, \dots, x_n)$ parcourant $M_1 \times \cdots \times M_n$, une base. On note Q le sous-A-module de L engendré par les éléments

$e_{(x_1,\dots,x_i+x_i',\dots,x_n)} - e_{(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)} - e_{(x_1,\dots,x_i',\dots,x_n)}$

$e_{(x_1,\dots,ax_i,\dots,x_n)} - ae_{(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}$

pour $x_i, x_i' \in M_i$, $x_j \in M_j$, $1 \leqslant j \neq i \leqslant n$, i parcourant l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, $a \in A$.

On note $\alpha_{M_1,\dots,M_n}$ la composition

$$M_1 \times \cdots \times M_n \hookrightarrow L \longrightarrow L/Q$$

où les deux applications sont, respectivement, l'inclusion et la projection canoniques. Il est clair, par construction, que φ est multilinéaire.

***Définition* 4.3.** Le A-module L/Q est appelé **produit tensoriel** des A-modules $M_1, \dots, M_n$ et est noté $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$.

Pour des raisons analogues à celles mentionnées au début du paragraphe 2, on a le résultat suivant.

Théorème 4.4. *Soient $M_1, \dots, M_n$ et P des A-modules. Pour toute application n-multilinéaire $f : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow P$, il existe une unique application A-linéaire $\bar{f} : M_1 \otimes_A \cdots \otimes M_n \longrightarrow P$ telle que $f = \bar{f} \circ \alpha_{M_1,\dots,M_n}$.* $\diamondsuit$

Le lecteur vérifiera que le A-module $M_1 \otimes_A \cdots \otimes M_n$ est canoniquement isomorphe aux modules obtenus en utilisant l'associativité du produit tensoriel de deux modules.