5. Changement d'anneau de base

Soient A et B deux anneaux commutatifs et $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

5.1. Pour tout B-module M, on définit un A-module $\varphi_\star(M)$ de la manière suivante : c'est le groupe abélien sous-jacent à M muni de l'opération externe de A définie par $a.x = \varphi(a)x$, pour $a \in A$ et $x \in M$, où $\varphi(a)x$ est défini par la structure de B-module de M.

Pour tout morphisme de B-modules $f : M \longrightarrow N$, l'application

$$\varphi_\star(f) : \varphi_\star(M) \longrightarrow \varphi_\star(N)$$

définie par $x \mapsto f(x)$ est A-linéaire : en effet,

$$\varphi_\star(f)(a.x) = f(\varphi(a)x) = \varphi(a)f(x) = a.f(x) = a.\varphi_\star(f)(x).$$

On appelle $\varphi_\star$ ainsi définie la **restriction des scalaires**.

5.2. On considère le A-module $\varphi_\star(B)$ obtenu par restriction des scalaires. Pour tout A-module M, on munit le groupe abélien $\varphi_\star(B) \otimes_A M$ d'une structure de B-module par (avec les notations évidentes)

$$b.\sum_i b_i \otimes m_i = \sum_i bb_i \otimes m_i.$$

Le lecteur vérifiera que cette opération munit bien $\varphi_\star(B) \otimes_A M$ d'une structure de B-module. On note $\varphi^\star(M)$ ce B-module.

Si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de A-modules, on pose $\varphi^\star(f) = \mathrm{Id}_{\varphi_\star(B)} \otimes f$; c'est un morphisme de B-modules (le vérifier).

On appelle $\varphi^\star$ ainsi définie l'**extension des scalaires**.

Théorème 5.3. *Pour tout A-module M et tout B-module N, les morphismes de groupes abéliens*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_B(\varphi^\star(M), N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \varphi_\star(N))$$

$$\Psi : \mathrm{Hom}_A(M, \varphi_\star(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\varphi^\star(M), N),$$

définis respectivement par $u \mapsto (x \mapsto u(1 \otimes x))$ et $f \mapsto \overline{f}$, où $\overline{f}$ est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_B(\varphi^\star(M), N)$ vérifiant $\overline{f}(1 \otimes x) = f(x)$, sont inverses l'un de l'autre.

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{Hom}_B(\varphi^\star(M), N)$: on définit une application $\Phi(u) : M \longrightarrow \varphi_\star(N)$ définie par $\Phi(u)(x) = u(1 \otimes x)$ est A-linéaire. En effet, elle est clairement additive et

$$\Phi(u)(ax) = u(1 \otimes ax) = u(a.(1 \otimes x)) = u(\varphi(a)(1 \otimes x)) = \varphi(a)u(1 \otimes x) = a.\Phi(u)(x).$$

Dans l'autre sens, soit $f \in \mathrm{Hom}_A(M, \varphi_\star(N))$, l'application $\varphi_\star(B) \times M \longrightarrow N$ définie par $(b, x) \mapsto bf(x)$ est A-bilinéaire. On en déduit une unique application A-linéaire

$$\overline{f} : \varphi_\star(B) \otimes M = \varphi^\star(M) \longrightarrow N$$

telle que $\overline{f}(1 \otimes x) = f(x)$. Cette application est B-linéaire, car

$$\overline{f}(b(b' \otimes x)) = \overline{f}(bb' \otimes x) = bb'f(x) = b(b'f(x)) = b\overline{f}(b' \otimes x).$$

On vérifie que les applications Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre. $\diamondsuit$

6. Produit tensoriel d'algèbres associatives

Théorème 6.1. *Soient K un anneau commutatif et A et B deux K-algèbres associatives. Il existe sur le K-module $A \otimes_K B$ une unique structure de K-algèbre associative telle que*

$$\forall x, x' \in A \ \ \forall y, y' \in B, \quad (x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'.$$

Démonstration. Les applications

$$A \times A \longrightarrow A, \qquad B \times B \longrightarrow B,$$

$$(x, x') \mapsto xx', \qquad (y, y') \mapsto yy'$$

sont K-bilinéaires, d'où des applications K-linéaires

$$u : A \otimes_K A \longrightarrow A, \qquad v : B \otimes_K B \longrightarrow B$$

vérifiant $u(x \otimes x') = xx'$ et $v(y \otimes y') = yy'$. On en déduit donc une application K-linéaire

$$u \otimes v : (A \otimes_K A) \otimes_K (B \otimes_K B) \longrightarrow A \otimes_K B$$

vérifiant $(u \otimes v)((x \otimes x') \otimes (y \otimes y')) = xx' \otimes yy'$. D'autre part, on a un isomorphisme de K-modules

$$(A \otimes_K B) \otimes_K (A \otimes_K B) \longrightarrow (A \otimes_K A) \otimes_K (B \otimes_K B)$$

défini par $(x\otimes y)\otimes(x'\otimes y')\mapsto(x\otimes x')\otimes(y\otimes y')$. En composant cet isomorphisme avec $u\otimes v$, on obtient une application K-linéaire

$$(A\otimes_K B)\otimes_K(A\otimes_K B)\longrightarrow A\otimes_K B$$

vérifiant $(x\otimes y)\otimes(x'\otimes y')\mapsto xx'\otimes yy'$. Elle provient de l'application K-bilinéaire

$$(A\otimes_K B)\times(A\otimes_K B)\longrightarrow A\otimes_K B$$

définie par $(x\otimes y)\times(x'\otimes y')\mapsto xx'\otimes yy'$ qui munit $A\otimes_K B$ d'un produit. On vérifie aisément, par linéarité, que ce produit munit le K-module $A\otimes_K B$ d'une structure de K-algèbre. $\diamondsuit$

Si les K-algèbres associatives A et B sont unitaires, il en est de même de $A\otimes_K B$, l'unité étant $1_A\otimes 1_B$.

Exemple. Si A est un anneau commutatif, $A[X]\otimes_A A[Y]$ est isomorphe à $A[X,Y]$.

7. Produit tensoriel et dualité

Soient M et N deux A-modules et $M^\star=\mathrm{Hom}_A(M,A)$ le dual de M. On considère l'application

$$\psi: M^\star\times N\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N)$$

définie par $(f,y)\mapsto(\psi(f,y): x\mapsto f(x)y)$. Montrons que cette application est A-bilinéaire. Pour tout $f,g\in M^\star$, $y,y'\in N$, $\lambda\in A$ et pour tout $x\in M$, on a

$$\psi(f+g,y)(x)=(f+g)(x)y=(f(x)+g(x))y=f(x)y+g(x)y=\psi(f,y)(x)+\psi(g,y)(x)$$

$$\psi(f,y+y')(x)=f(x)(y+y')=f(x)y+f(x)y'=\psi(f,y)(x)+\psi(f,y')(x)$$
$$\psi(\lambda f,y)(x)=\lambda f(x)y=\lambda\psi(f,y)(x)$$
$$\psi(f,\lambda y)(x)=f(x)\lambda y=\lambda f(x)y=\lambda\psi(f,y)(x).$$

On en déduit donc une application A-linéaire

$$\varphi: M^\star\otimes_A N\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N)$$

définie par $(f\otimes y)\mapsto(x\mapsto f(x)y)$.

Proposition 7.1. *Si l'un des A-modules M ou N est libre de rang fini, alors l'application φ est un isomorphisme.*

Démonstration. Supposons que M soit libre de type fini et notons $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base. On sait que le A-module $M^\star$ est libre et possède une base $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ définie par $\epsilon_i(e_j) = \delta_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. D'après le corollaire 3.2, on sait que tout élément de $M^\star \otimes_A N$ s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes y_i$. On a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi(\epsilon_i \otimes y_i)$$

et chaque $\varphi(\epsilon_i \otimes y_i)$, qui appartient à $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, est entièrement déterminé par ses valeurs sur la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. On a

$$\varphi(\epsilon_i \otimes y_i)(e_j) = \epsilon_i(e_j) y_i.$$

Ce dernier élément est égal à y_j si $i = j$ et 0 sinon. Par conséquent,

$$\left(\sum_{i=1}^n \varphi(\epsilon_i \otimes y_i)\right)(e_j) = y_j.$$

Montrons que φ est surjective. Soit $u \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ déterminé par les $u(e_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. En posant $u(e_j) = u_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, on a alors $u = \varphi(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes u_i)$.

Montrons que φ est injective. On a $\varphi(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes y_i) = 0$ si et seulement si, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\varphi(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes y_i)(e_j) = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $y_j = 0$, donc si et seulement si $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes y_i = 0$.

Supposons que N soit libre de type fini et notons $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base. Tout élément de $M^\star \otimes_A N$ s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i$.

Montrons que φ est injective. $\varphi(\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i) = 0$ si et seulement si, pour tout $x \in M$, $\sum_{i=1}^n \mu_i(x) e_i = 0$, *i.e.* $\mu_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Cela étant valable pour tout $x \in M$, on a $\mu_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où $\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i = 0$.

Montrons que φ est surjective. Soit $v \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. On cherche $\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i$ tel que

$$\forall\, x \in M, \quad v(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i\right)(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) e_i.$$

Cela signifie que le morphisme de A-modules $\varphi(\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i)$ doit être tel que, pour tout $x \in M$, $\varphi(\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i)(x)$ ait pour composantes dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ les valeurs $\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)$. On considère donc les μ_i définies par : pour tout x dans M, $\mu_i(x)$ est la i-ième composante de $v(x)$ dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. On a bien alors, pour tout x de M, $v(x) = \varphi(\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i)(x)$, *i.e.* $v = \varphi(\sum_{i=1}^n \mu_i \otimes e_i)$. $\diamondsuit$

***Remarques* 7.2.**

a) On sait que si M est un A-module libre de rang fini, les A-modules M et $M^\star$ sont isomorphes non canoniquement, alors qu'ici φ est canonique (*i.e.* défini indépendamment du choix d'une base).

b) Les hypothèses sont nécessaires. En effet, considérons le cas $A = \mathbb{Z}$, $M = N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a $M^\star = 0$, d'où $M^\star \otimes_A N = 0$, alors que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est non nul car il contient l'identité.

c) Si M est un A-module libre de rang fini, on a l'isomorphisme

$$M^\star \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{End}_A(M).$$

Nous allons donner, grâce à l'isomorphisme φ explicité ci-dessus, une expression intrinsèque de la trace d'un endomorphisme.

Soit M un A-module libre de rang fini. L'application

$$M^\star \times M \longrightarrow A$$

$$(f, x) \mapsto f(x)$$

est A-bilinéaire et induit une application A-linéaire

$$\gamma : M^\star \otimes_A M \longrightarrow A$$

vérifiant $\gamma(f \otimes x) = f(x)$. Puisque

$$\varphi : M^\star \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$$

est un isomorphisme de A-modules, pour tout endomorphisme u de M, on peut considérer l'élément $\gamma(\varphi^{-1}(u))$ qui appartient à A.

Proposition 7.3. *Avec les notations ci-dessus, pour tout A-module libre de rang fini M et tout endomorphisme u de M, la trace de u est égale à $\gamma(\varphi^{-1}(u))$.*

Démonstration. Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de M et $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ la base duale. D'après la démonstration de (7.1), on sait que $u = \varphi(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes u(e_i))$, d'où $\gamma \circ \varphi^{-1}(u) = \gamma(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \otimes u(e_i))$. D'après la définition de γ, on a donc $\gamma \circ \varphi^{-1}(u) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i(u(e_i))$. En posant $u(e_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_j$, on a $\epsilon_i(u(e_i)) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}\epsilon_i(e_j) = \lambda_{ii}$. D'où $\gamma \circ \varphi^{-1}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ii}$ qui est bien la trace de la matrice de u relativement à la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. $\diamondsuit$

Ce résultat donne une démonstration conceptuelle du fait que la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base relativement à laquelle on le représente par une matrice (cf. VI.2).

8. Algèbre tensorielle

***Définition* 8.1.** Soit M un A-module. On appelle **algèbre tensorielle** de M la donnée d'une A-algèbre associative unitaire $T(M)$ et d'une application A-linéaire i_M de M dans le A-module sous-jacent à $T(M)$ satisfaisant la propriété suivante :

pour toute A-algèbre associative unitaire R et pour toute application A-linéaire f de M dans le A-module sous-jacent à R, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\overline{f}$ de $T(M)$ dans R tel que $f = \overline{f} \circ i_M$.

S'il existe, le couple $(T(M), i_M)$ est solution d'un problème universel, donc est unique à un unique isomorphisme près.

8.2. Existence du couple $(T(M), i_M)$

On pose $T^0(M) = A$, $T^1(M) = M$ et, pour tout $n \geqslant 2$, on définit $T^n(M)$ par $T^n(M) = M \otimes_A \cdots \otimes_A M$ (n facteurs M), qu'on note $M^{\otimes n}$, puis on pose $T(M) = \bigoplus_{n\geqslant 0} T^n(M)$.

On munit $T(M)$ d'une structure de A-algèbre de la façon suivante : pour tout p et q dans $\mathbb{N}$, on définit une application A-bilinéaire

$$\varphi_{p,q} : T^p(M) \times T^q(M) \longrightarrow T^{p+q}(M)$$

par : pour tous a et b dans A, pour tout x dans $T^p(M)$, pour tout y dans $T^q(M)$,

$$\varphi_{0,0}(a,b) = ab, \quad \varphi_{0,q}(a,y) = ay, \quad \varphi_{p,0}(x,a) = ax,$$

et pour tout x_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, y_j, $1 \leqslant j \leqslant q$, dans M,

$$\varphi_{p,q}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p, y_1 \otimes \cdots \otimes y_j \otimes \cdots \otimes y_q) =$$

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_j \otimes \cdots \otimes y_q.$$

On note

$$\varphi : T(M) \times T(M) \longrightarrow T(M)$$

l'unique application A-bilinéaire dont la restriction à $T^p(M) \times T^q(M)$ est $\varphi_{p,q}$, pour tout p et q dans $\mathbb{N}$. Cette application munit le A-module $T(M)$ d'un produit.

L'associativité de ce produit, *i.e.* pour tout $p, q, r \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{p+q,r}(\varphi_{p,q}(\ldots), id_r) = \varphi_{p,q+r}(id_p, \varphi_{q,r}(\ldots)),$$

provient de l'associativité du produit tensoriel.

L'élément unité est l'élément unité de A et l'application $i_M : M \longrightarrow T(M)$ est l'inclusion $M = T^1(M) \hookrightarrow T(M)$.

***Remarques* 8.3.**

a) Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de M, le produit $i_M(x_1)\cdots i_M(x_n)$ dans $T(M)$ est $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.

b) L'algèbre $T(M)$ est **non commutative**.

Théorème 8.4. *Le coupe $(T(M), i_M)$ ainsi construit est l'algèbre tensorielle de M.*

Démonstration. Pour toute A-algèbre associative unitaire R et pour toute application A-linéaire f de M dans le A-module sous-jacent à R, il faut prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme de A-algèbres $\overline{f}$ de $T(M)$ dans R tel que $f = \overline{f} \circ i_M$.

Unicité. si $\overline{f}$ existe, on doit avoir

$$\forall a \in A = T^0(M), \quad \overline{f}(a) = \overline{f}(a.1) = a\overline{f}(1) = a.1 \in R$$

et

$$\forall p \geqslant 1,\ \forall x_i \in M,\ \overline{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \overline{f}(i_M(x_1)\cdots i_M(x_p)) = f(x_1)\cdots f(x_p).$$

Tout élément de $T(M)$ s'écrivant comme somme finie d'éléments de A ou d'éléments de la forme $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$, $p \geqslant 1$, l'expression ci-dessus détermine entièrement $\overline{f}$.

Existence. Pour tout entier p et tout élément x_i de M, $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $\overline{f}_p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = f(x_1)\cdots f(x_p)$ et $f_0 : T^0(M) = A \longrightarrow R$ le morphisme structural de la A-algèbre R. Les f_p, $p \geqslant 0$, définissent $\overline{f} : T(M) = \oplus_{p \geqslant 0} T^p(M) \longrightarrow R$ et l'on a $f = \overline{f} \circ i_M$. Il reste à montrer que $\overline{f}$ est un morphisme de A-algèbres. Pour montrer que $\overline{f}(\alpha\beta) = \overline{f}(\alpha)\overline{f}(\beta)$, avec α et β dans $T(M)$, il suffit, par linéarité, de le faire pour $\alpha = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ et $\beta = y_1 \otimes \cdots \otimes y_q$:

$$\begin{aligned}\overline{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)\overline{f}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) &= f(x_1)\cdots f(x_p) f(y_1)\cdots f(y_p)\\ &= \overline{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = \overline{f}((x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_q)). \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Souvent, par abus de langage, on dit que l'algèbre tensorielle de M est $T(M)$, le morphisme i_M étant sous-entendu.

Exercice E4.

1. *Soient A un anneau commutatif et $X_1, \dots, X_n$ des variables. On note $A\{X_1, \dots, X_n\}$ l'ensemble des expressions de la forme $\sum_{\text{finie}} a_{i_1,\dots,i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$, avec $a_{i_1,\dots,i_n} \in A$, dans lesquelles les éléments de A commutent avec les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, mais les variables X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne commutent pas entre elles.*

Montrer que la somme, définie de manière évidente, et le produit, défini par concaténation, i.e.

$$a_{i_1,\dots,i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} b_{j_1,\dots,j_n} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n} = a_{i_1,\dots,i_n} b_{j_1,\dots,j_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$$

étendu linéairement, munissent $A\{X_1, \dots, X_n\}$ d'une structure de A-algèbre.

On appelle cette A-algèbre l'algèbre des **polynômes non commutatifs** *à coefficient dans A.*

2. *Étendre cette construction pour un ensemble quelconque de variables $(X_i)_{i \in I}$. On note $A\{X_i\}_{i \in I}$ la A-algèbre ainsi obtenue.*

3. *Soit M un A-module libre de base $(x_i)_{i \in I}$. Montrer que la A-algèbre $T(M)$ est isomorphe à la A-algèbre $A\{X_i\}_{i \in I}$* (montrer que $A\{X_i\}_{i \in I}$ est solution du problème universel d'algèbre tensorielle de M).

Proposition 8.5. *Soient M et N des A-modules. Alors toute application A-linéaire $u : M \longrightarrow N$ se prolonge en un unique morphisme d'algèbres $\overline{u} : T(M) \longrightarrow T(N)$.*

Démonstration. Si un tel prolongement $\overline{u}$ existe, on doit avoir

$$\overline{u}(1) = 1, \quad \forall\, a \in A,\ \overline{u}(a) = \overline{u}(a.1) = a\overline{u}(1) = a$$

$$\forall\, x_1, \dots, x_p \in M,\ \overline{u}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = u(x_1) \otimes \cdots \otimes u(x_p).$$

Par définition du produit tensoriel d'applications linéaires, ce dernier élément est $u^{\otimes p}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$. Tout élément z de $T(E)$ est une somme finie d'éléments du type $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$, d'où $\overline{u}(z) = \sum_p u^{\otimes p}(z_p)$, avec $z_p = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$, d'où l'unicité de $\overline{u}$.

Réciproquement, l'application $\overline{u}$ ainsi définie est un morphisme de A-algèbres qui prolonge u. ◇

Remarque 8.6. Le lecteur vérifiera facilement que ces prolongements sont compatibles à la composition, *i.e.* $\overline{v \circ u} = \overline{v} \circ \overline{u}$.

Exercice E5. *Soient A un anneau commutatif, M un A-module, $(T(M), i_M)$ son algèbre tensorielle et N un sous-A-module de M. Montrer que l'algèbre $T(M/N)$ est isomorphe au quotient de l'algèbre $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par $i_M(N)$.*