Chapitre I: Intégrales simples et multiples

I.1- Rappels sur l'intégrale simple

Soit f(x)une fonction continue sur un intervalle donnée :

$$dF(x) = f(x)dx$$

Ou respectivement :

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Définition 1 Primitive

On appelle primitive d'une fonction $f(x)$, la fonction $F(x)$ dont la dérivée est égale à $f(x)$.

Définition 2 Intégrale définie

Si F est une primitive de f sur un intervalle I contenant a et b, on appelle intégrale définie de f (de a à b) et on note $\int_a^b f(x)dx = F(x)$

Exemple n≗ I.01

L'une des primitives de la fonction $3x^2$ sera $x^3 \Longrightarrow (x^3)' = 3x^2$

ⓘ *Cette primitive n'est pas unique parce que :* $(x^3+1)' = 3x^2$ *et* $(x^3 + c^{te})' = 3x^2$

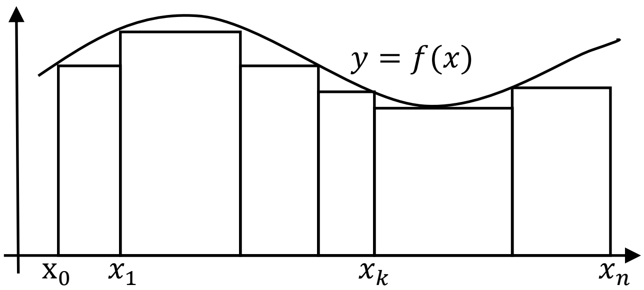
I.1.1- Sommes de Riemann

Soit f : [a , b] → R une fonction partout définie sur le segment [a , b]. On considère un entier n > 0 une subdivision régulière

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad 0 \le k \le n$$

La somme de Riemann associée à f est :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,(x_k - x_{k-1})$$



Ces sommes de Riemann équidistantes sont celles de la méthode des rectangles pour le calcul des intégrales ; leur intérêt principal vient du « théorème » suivant, qui est en réalité un cas particulier de la définition de l'intégrale de Riemann : si f est intégrable au sens de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Définition 3

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,(x_k - x_{k-1})$, $I(f)$ sera appelée intégrale définie de la fonction f continue entre les bornes a et b

I.1.2- Tableau des primitives usuelles

a, C, ω, φ Désignent des constantes

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
a	$ax + C$
a/x	$a\ln\lvert x\rvert + C$
$x^a\ ,\forall\, a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$a^x \quad (a > 0)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$
$\cos(\omega x + \varphi)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + C$
$\sin(\omega x + \varphi)$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x + C$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x + C$
$\frac{1}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

I.1.3- Tableau des primitives composées

Fonction	Primitive
$u' \times u^n\ ,\qquad n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$u^{n+1}/(n+1) + C$
u'/u	$\ln u + C$
$u' \times e^u$	$e^u + C$
$u' \times \cos u$	$\sin u\ + C$
$u' \times \sin u$	$-\cos u + C$

I.1.4- Propriétés des intégrales

Soient f(x)et g(x) deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[0, b]$:

01) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

02) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

03) $\int_a^b A \times f(x)dx = A \times \int_a^b f(x)dx$ où A est une constante

04) $\int_a^a f(x)dx = 0$

05) Si $a \le x \le b$, $f(x) \le g(x)$, $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

06) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

07) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, à condition que $f(x)$ est intégrable sur les deux intervalles.

08) Si $a \le x \le b$, $m \le f(x) \le M$ où m, M sont des constantes, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

I.1.5- Technique d'intégration

I.1.5.1– Changement de variable

Théorème : Soit φ une fonction de $[\alpha, \beta]$ dans R.
Soit f une fonction continue sur $[a, b] = \varphi([\alpha, \beta])$.Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f o\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

Exemple n≗ I.02

Calculer $I_1 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, avec le changement de variable $x = \tan t$.

Solution

$$x = \tan t \Longrightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt \quad \begin{cases} x = 0 , t = 0 \\ x = 1 , t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2} \times \frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} \times \frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t\,dt$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos 2t + 1)dt = \left[\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Devoir

Calculer $I_2 = \int x^2\sqrt{1-x}\,dx$

I.1.5.2– Intégration par parties

Théorème : Soit u et v deux fonctions définies sur [a, b] . Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exemple n≗ I.03

Calculer $I_3 = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx =?$

Solution

Si l'on pose $\begin{cases} u'(x) = 1 & \Longrightarrow\ u(x) = x \\ v(x) = \ln(1+x^2) & \Longrightarrow v'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

D'où

$$I_3 = [x \times \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2})dx$$

$$I_3 = \ln 2 - 2[x - \arctan x]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Devoir

Calculer $I_4 = \int x^2 . \ln x \ dx =?$

I.1.6- Méthodes pratiques

I.1.6.1– Intégrales de fractions

Lorsque f est une fraction rationnelle, il existe un procède dit de décomposition en éléments simples qui permet de trouver ses primitives.

f Est une fraction rationnelle du type $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes.

ⓘ *Si le degré de P est plus grand ou égale à celui de Q, il faut diviser avant de pouvoir faire des fractions.*

ⓘ *Factoriser Q dans la mesure de possible.*

Tableau des fractions

	Facteur de dénominateur	Terme en partielle fraction
Facteurs distincts	$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
	ax^2+bx+c $ax^2+bx+c \neq 0$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
Facteurs répétés	$(ax+b)^n$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
	$(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Exemple n° I.04

Calculer $I_5 = \int \frac{5x^2-3x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$

Solution

Le degré de P est inférieur de Q

On veut décomposer

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 11}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

Sous la forme

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

Méthode 1 : Détermination de A, B et C par identification

On réduit la décomposition au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$f(x) = \frac{(A+B+C)x^2 + (-A-4B+C)x + (-6A+3B-2C)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

Par identification

$$\begin{cases} A+B+C=5 \\ -A-4B+C=-3 \\ -6A+3B-2C=-11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=3/2 \\ B=1 \\ C=5/2 \end{cases}$$

Méthode 2 : Détermination de A, B et C par passage à la limite

$$A = \lim_{x\to 1}\frac{5x^2-3x-11}{(x+2)(x-3)} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

$$B = \lim_{x\to -2}\frac{5x^2-3x-11}{(x-1)(x-3)} = \frac{15}{15} = 1$$

$$C = \lim_{x\to 3}\frac{5x^2-3x-11}{(x-1)(x+2)} = \frac{45-9-11}{2\times 5} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Méthode 3 :

On pose $t = x - 1$

$$f(t) = \frac{5(t+1)^2 - 3(t+1) - 11}{t(t+3)(t-2)} = \frac{5t^2+7t-9}{t(t+3)(t-2)}$$

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{3}{2} + \frac{t}{2}\times\frac{7t+11}{(t+3)(t-2)}\right) = \frac{3/2}{t} + \frac{1}{2}\times\frac{7t+11}{(t+3)(t-2)}$$

$$g(t) = \frac{7t+11}{(t+3)(t-2)}$$

$$\begin{array}{l|l} -9+7t+5t^2 & -6+t+t^2 \\ -9+\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}t^2 & \frac{3}{2} \\ \hline -0+\frac{11}{2}t+\frac{7}{2}t^2 & \end{array}$$

On pose $t + 3 = u$

$$g(u) = \frac{7(u-3)+11}{u(u-5)} = \frac{7u-10}{u(u-5)}$$

$$g(u) = \frac{1}{u}\left(2 - \frac{5u}{u-5}\right) = \frac{2}{u} + \frac{5}{u-5} = \frac{2}{t+3} + \frac{5}{t-2}$$

$$\begin{array}{l|l} -10+7u & -5+u \\ -10+2u & 2 \\ \hline -00+5u & \end{array}$$

d'où $\quad f(t) = \frac{3/2}{t} + \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{t+3} + \frac{5}{t-2}\right) = \frac{3/2}{t} + \frac{1}{t+3} + \frac{5/2}{t-2}$

Donc

$$f(x)=\frac{3/2}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{5/2}{x-3}$$

$$I_5=\int\frac{3/2}{(x-1)}dx+\int\frac{1}{(x+2)}dx+\int\frac{5/2}{(x-3)}dx=\frac{3}{2}\ln(x-1)\frac{3}{2}+\ln(x+2)+\frac{5}{2}\ln(x-3)+C^{te}$$

Devoir

Calculer

$$I_6=\int\frac{x^3+2x-1}{(x^2-x-2)^2}dx=?$$

Solution

Le degré de P est inférieur de Q

$$f(x)=\frac{x^3+2x-1}{(x^2-x-2)^2}=\frac{x^3+2x-1}{(x-2)^2(x+1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

On multiplie par $(x-2)^2(x+1)^2$

$$A(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^2+C(x-2)^2(x+1)+D(x-2)^2=x^3+2x-1$$

Pour $x=2$:

$$A(0)+B(3)^2+C(0)+D(0)=2^3+2\times2-1\ \Longrightarrow B=\frac{11}{9}$$

Pour $x=-1$

$$A(0)+B(0)+C(0)+D(-3)^2=(-1)^3-1\times2-1\ \Longrightarrow D=\frac{-4}{9}$$

$$\begin{cases}x=0\Longrightarrow -2A+\frac{11}{9}+4C-4\times\frac{4}{9}=-1\\ x=1\Longrightarrow -4A+4\times\frac{11}{9}+2C-\frac{4}{9}=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-A+2C=-\frac{2}{9}\\ -2A+C=-\frac{11}{9}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=\frac{20}{27}\\ C=\frac{7}{27}\end{cases}$$

D'où

$$I_6=\int\left(\frac{20/27}{(x-2)}+\frac{11/9}{(x-2)^2}+\frac{7/27}{(x+1)}+\frac{-4/9}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$I_6=\frac{20}{27}\ln|x-2|+\frac{11}{9}\times\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+\frac{7}{27}\ln|x+1|-\frac{4}{9}\times\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C^{te}$$

I.1.6.2– Fonctions trigonométriques.

a- Fonctions trigonométriques comportant des puissances $\int \sin^m(x) \cos^n(x)\, dx$

Technique 1 : Contrôle des puissances

- m impair
  - Mettre de côté un facteur $\sin(x)\, dx$, alors on obtient
  $$\int \sin^{m-1}(x) \cos^n(x) \times \sin(x)dx \quad \text{Où (m-1) pair}$$
  - Utiliser l'identité $[\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1]$ pour transformer $\sin^{m-1}(x)$qui reste, nous obtenons alors une ou plusieurs intégrales de la forme :
  $$\int \cos^p(x) \sin(x)\, dx$$
  - Effectuer un changement de variables en posant $u = \cos(x)$

- n impair
  - Mettre de côté un facteur $\cos(x)\, dx$, alors on obtient
  $$\int \sin^m(x) \cos^{n-1}(x) \times \cos(x)dx \quad \text{Où (n-1) pair}$$
  - Utiliser l'identité $[\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1]$ pour transformer $\cos^{n-1}(x)$qui reste, nous obtenons alors une ou plusieurs intégrales de la forme : $\int \sin^p(x) \cos(x)\, dx$
  - Effectuer un changement de variables en posant $u = \sin(x)$

- m pair et n pair
  - Utiliser l'identité : $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ Pour transformer $\sin^m(x)$ et $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ Pour transformer $\cos^n(x)$
  - Vous obtiendrez alors des intégrales de la forme $\int \cos u\, du$

Technique 2 : Linéarisation

Posons

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Exemple n≗ I.05

Calculer

$$I_7 = \int \sin^3(x) \cos^2(x)\, dx = ?, \quad I_8 = \int \cos^3(x) \sin^2(x)\, dx = ?, \quad I_9 = \int \cos^2(x) \sin^2(x)\, dx$$

Solution

01) $m = 3 \quad impair$

Technique 1

$$I_7 = \int \sin^3(x) \cos^2(x)\, dx = \int \sin^2(x) \cos^2(x) \times \sin(x)dx = \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \times \sin(x)dx$$
$$= \int \cos^2(x) \times \sin(x)dx - \int \cos^4(x) \times \sin(x)dx$$

On pose $u = \cos(x) \Longrightarrow du = -\sin x\, dx$

$$I_7 = -\int u^2 du + \int u^4 du = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C^{te} = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + \frac{1}{5}\cos^5(x) + C^{te}$$

Technique 2

Posons

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$

$\sin^3(x)\cos^2(x)$

$$= -\frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - 3e^{3ix} + 3e^{ix} - e^{-ix} + 2e^{3ix} - 6e^{ix} + 6e^{-ix} - 2e^{-3ix} + e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} - e^{3ix} + e^{-3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{16} \times \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} + \frac{1}{16} \times \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - \frac{1}{8} \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= -\frac{1}{16} \times \sin(5x) + \frac{1}{16} \times \sin(3x) - \frac{1}{8} \times \sin(x)$$

$$I_7 = \int \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{80} \times \cos(5x) - \frac{1}{48} \times \cos(3x) - \frac{1}{8} \times \cos(x) + c_{te}$$

02) n=3 impair

Technique 1

$$I_8 = \int \cos^3(x)\sin^2(x)\,dx = \int \sin^2(x)\cos^2(x) \times \cos(x)dx = \int \left(1 - \sin^2(x)\right)\sin^2(x) \times \cos(x)\,dx$$

$$= \int \sin^2(x) \times \cos(x)\,dx - \int \sin^4(x) \times \cos(x)\,dx$$

On pose $u = \sin(x) \Longrightarrow du = \cos x\,dx$

$$I_8 = \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C^{te} = \frac{1}{3}\sin^3(x) - \frac{1}{5}\sin^5(x) + C^{te}$$

03) m=n=2 pair

Technique 1

$$I_9 = \int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \times \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2(2x))dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx + C^{te} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos(4x))dx + C^{te}$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C^{te} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C^{te}$$

Technique 2

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} \mp e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{-1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) \times \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) = \frac{-1}{16}\left(e^{4ix} + 2 + e^{-4ix} - 4\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}$$

$$I_9 = \int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C_{te}$$

b- Fractions rationnelles en $sin(x)$ et $cos(x)$

On obtient une primitive de cette fonction via le changement de variables :

$$t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan(t) \ \text{ d'où } \ dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Et les deux formules : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

Exemple n° I.06

Calculer

$$I_{10} = \int \frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}dx$$

Solution

$$I_{10} = \int \frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2+2t+1}{2t^2} \times \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\frac{t^2+2t+1}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} = \frac{At(1+t^2) + B(1+t^2) + (Ct+D)t^2}{t^2(1+t^2)}$$

Par identification

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 1 \\ A = 2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = -2 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$I_{10} = \int \frac{2}{t}dt + \int \frac{1}{t^2}dt - \int \frac{2t}{1+t^2}dt = 2\ln|t| - \frac{1}{t} + \ln|1+t^2| + C_{te}$$

$$I_{10} = -\frac{1}{t} + \ln\left|\frac{1+t^2}{t^2}\right| + C_{te} = -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \ln\left|\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{\sin(x)}\right| + C_{te}$$

$$I_{10} = -\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C_{te}$$

I.1.6.3– Exponentielles.

Les fonctions contenant des exponentielles se ramènent en général à des fractions rationnelles par le changement de variable $t = e^x$, en effet on a alors $dt = t dx$.On pourra parfois accélérer les calculs en exploitant les fonctions hyperboliques, qui se traitent de manière analogue (généralement au signe près) aux fonctions trigonométriques usuelles.

Exemple n≗ I.07

Calculer

$$I_{11} = \int \frac{e^{-x}}{e^x + 1} dx = ?$$

Solution

On pose $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx, dx = \frac{1}{t} dt$

$$I_{11} = \int \frac{1/t}{t+1} \times \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t+1} dx = \ln|t+1| + C^{te} = \ln|e^x + 1| + C^{te}$$

I.1.6.4– Radicaux.

Les fonctions contenant des radicaux s'intègrent en prenant le radical comme nouvelle variable. Les radicaux d'expressions plus complexes sont souvent difficiles à intégrer ;

a- Type 1 : si $f(x) = R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ *on pose* $x = \sin t$

Exemple n≗ I.08

Calculer

$$I_{12} = \int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

Solution

On pose $x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t\, dt$

$$I_{12} = \int \frac{3\sin^3 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt = \int 3\sin^3 t\, dt = \int 3\sin^2 t \sin t\, dt$$

On pose $\cos t = u \Longrightarrow -\sin t\, dt = du$

$$I_{12} = -\int 3(1-u^2) du = -u(3-u^2) + C^{te} = -\cos t\,(2 + \sin^2 t) = -\sqrt{1-x^2}(2+x^2) + C^{te}$$

b- Type 2 : si $f(x) = R\left(x, \sqrt{1+x^2}\right)$ *on pose* $x = sh\, t$

Exemple n≗ I.09

Calculer

$$I_{13} = \int \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = ?$$

Solution

On pose $x = sh\, t \Longrightarrow dx = cht\, dt$

$$I_{13} = \int \frac{3sh^3 t}{\sqrt{1+sh^2 t}} cht\, dt = \int 3sh^3 t\, dt = \int 3sh^2 t\, sht dt = \int 3(ch^2 t - 1) sht\, dt$$

On pose $u = cht \Longrightarrow du = sht\, dt$

$$I_{13} = \int 3(u^2-1)\, du = 3u\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right) = cht(ch^2 t - 3) + C^{te} = \sqrt{1+sh^2 t}(sh^2 - 2) + C^{te}$$

$$I_{13} = \sqrt{1+x^2}(x^2-2) + C^{te}$$

c- Type 3 : si $f(x) = R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$ on pose $x = ch\, t$

Exemple n≗ I.10

Calculer : $I_{14} = \int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Solution

On pose $x = \mathrm{ch}\, t \Rightarrow dx = \mathrm{sht}\, dt$

$$I_{14} = \int \frac{3\mathrm{ch}^3 t}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}} \mathrm{sht}\, dt = \int 3\mathrm{ch}^3 t\, dt = \int 3\mathrm{ch}^2 t\, \mathrm{cht} dt = \int 3(\mathrm{sh}^2 t + 1)\mathrm{cht}\, dt$$

On pose $u = \mathrm{sht} \Rightarrow du = \mathrm{cht}\, dt$

$$I_{14} = \int 3(u^2+1)\, du = u(u^2+3) = \mathrm{sht}(\mathrm{sh}^2 t + 3) + C^{te} = \sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}(\mathrm{ch}^2 + 2) + C^{te}$$

$$I_{14} = \sqrt{x^2-1}(x^2+2) + C^{te}$$

I.1.6.5– Intégrales abéliennes

a- Intégrales de la forme : $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$ ou $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ $(avec\ ax^2+bx+c \neq 0)$

- Si $\Delta = 0$ d'intégrale devine simple
- Si $\Delta < 0$transformation $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{t^2+c^{te}}$
- Si $\Delta > 0$ transformation $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{t^2-c^{te}}$

Exemple n≗ I.11

Calculer : $I_{15} = \int \sqrt{x^2+16x+100}\, dx \quad =?$

Solution

$$x^2+16x+100 = (x+8)^2+6^2$$

On pose $x+8 = u \Rightarrow dx = du \Rightarrow \quad I_{15} = \int \sqrt{u^2+6^2}\, du$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{u}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$I_{15} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+6^2} + \frac{6^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+6^2}\right| + C$$

$$= \frac{x+8}{2}\sqrt{(x+8)^2+6^2} + \frac{6^2}{2}\ln\left|(x+8)+\sqrt{(x+8)^2+6^2}\right| + C$$

Exemple n≗ I.12

Calculer

$$I_{16} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}} dx \quad =?$$

Solution

$$I_{16} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$I_{16} = \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}\right| + C$$

b- Intégrales de la forme : $\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

On pose $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ On obtient alors une fraction rationnelle en t.

Exemple n≗ I.13

Calculer: $I_{15} = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx \quad =?$

Solution

On pose $\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Rightarrow x = -\frac{t^2+1}{t^2-1} \Rightarrow dx = -\frac{2t(t^2-1)-2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}dt = \frac{4t}{(t^2-1)^2}dt$

$$I_{17} = -\int \frac{t^2-1}{t^2+1} \times t \times \frac{4t}{(t^2-1)^2}dt = -\int \frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}dt$$

$$I_{17} = -\int \frac{2t^2+2+2t^2-2}{(t^2+1)(t^2-1)}dt = -2\int \frac{1}{(t^2-1)}dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)}dt$$

$$= \ln|1+t| - \ln|1-t| - 2\arctan t + C^{te}$$

$$I_{17} = \ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C^{te}$$

c- Intégrales de la forme : $\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

On pose $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}$ On obtient alors une fraction rationnelle en t.

Exemple n≗ I.14

Calculer : $I_{18} = \int \frac{1}{x-2+\sqrt{x^2-2x+2}}dx =?$

Solution

on pose $t = \sqrt{x^2-2x+2} - x \Rightarrow (t+x)^2 = x^2-2x+2 \Rightarrow x = \frac{2-t^2}{2t+2}$

Alors on a : $dx = \frac{-2t(2t+2)-2(2-t^2)}{(2t+2)^2}dt = \frac{-2t^2-4t-4}{(2t+2)^2}dt = -2\frac{t^2+2t+2}{(2t+2)^2}dt$

$$I_{18} = \int \frac{1}{\frac{2-t^2}{t+1}-2+t} \times \left(-2\frac{t^2+2t+2}{(2t+2)^2}\right)dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+t+t+2}{(t+1)(t)}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\frac{t+2}{(t+1)(t)})dt$$

$\frac{t+2}{(t+1)(t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow t+2 = A(t+1) + B(t) \quad$ pour $\left|\begin{array}{ll} t=0 & A=2 \\ t=-1 & B-1 \end{array}\right.$

$$I_{18} = \frac{1}{2}\int (1+\frac{2}{t}-\frac{1}{t+1})dt = \frac{1}{2}(t+2\ln|t| - \ln|t+1|) + C^{te}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-2x+2} - x + 2\ln\left|\sqrt{x^2-2x+2}-x\right| - \ln\left|\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right|\right) + C^{te}$$

I.1.7- Applications du calcul intégral (Intégrales curvilignes)

I.1.7.1– Valeur moyenne

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;\ b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemple n° I.15

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[-1,3]$

Solution

Par définition :

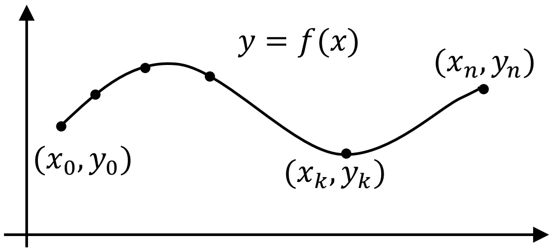
$$\mu = I_{19} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3} x^3 dx = \frac{1}{16}.x^4|_{-1}^{3} = \frac{1}{16}(3^4 - 1^4) = 5$$

I.1.7.2– Longueur d'un arc de courbe

Considérons une courbe donnée par l'équation paramétrique

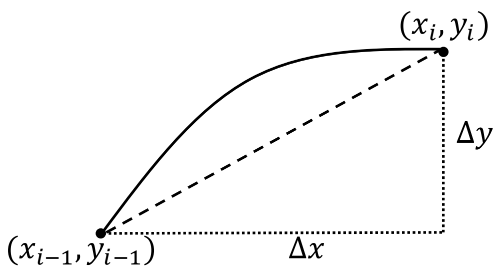
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} pour\ t_a \le t \le t_b$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont supposées dérivables. On peut diviser cette courbe en plusieurs petits segments :



Si on cherche à calculer la longueur d'un segment, on peut l'approcher par

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$



On cherche à réduire la taille de chaque segment afin d'avoir la valeur de la longueur. On s'intéresse donc à

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

La longueur d'une corde est donc donnée par

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Exemple n≗ I.16

Calculer la longueur de la courbe donnée par $y = x^{2/3}\ pour\ 1 \leq x \leq 8$

Solution

Paramétrage 1

Un paramétrage de cette courbe est $\begin{cases} x = t \\ y = t^{2/3} \end{cases}\ pour\ 1 \leq t \leq 8$

On a donc

$$L = I_{20} = \int_1^8 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^8 \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{2}{3}t^{-1/3}\right)^2}\, dt = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3}dt}$$

$$= \int_1^8 t^{-1/3} \sqrt{t^{2/3} + \frac{4}{9}dt}$$

En posant $u = t^{2/3} \Longrightarrow du = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}dt\ pour\ t = 1, u = 1\ et\ t = 8, u = 4$

$$L = \frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{u + \frac{4}{9}du} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3/2}\left[\left(u + \frac{4}{9}\right)^{3/2}\right]_1^4 = \left(\frac{40}{9}\right)^{3/2} - \left(\frac{13}{9}\right)^{3/2} \approx 7.63$$

Paramétrage 2

Un paramétrage de cette courbe est $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}\ \ pour\ 1 \leq t \leq 2$

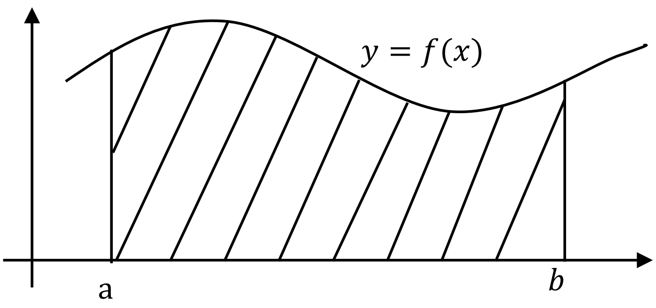
$$\mathrm{L} = I_{20} = \int_1^8 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^2 \sqrt{(3\mathrm{t}^2)^2 + (2t)^2}dt = \int_1^2 t\sqrt{9.t^2 + 4}dt$$

On pose $u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt\ \ pour\ t = 1\,, u = 1\ et\ t = 2\,, u = 4$

$$L = \frac{1}{2}.\int_1^4 \sqrt{9.u + 4}\ du = \frac{1}{3}\left[(9u + 4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right) \approx 7.63$$

I.1.7.3– Calcul d'aires

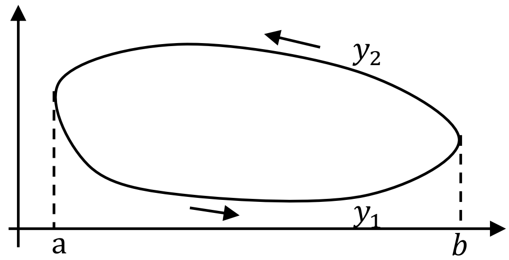
Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, le nombre $\int_a^b f(x)dx$ s'interprète comme l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a\ et\ x = b$.



Plus généralement, si f et g sont continués sur $[a, b]\ et\ f(x) \geq g(x)$ sur cet intervalle, alors l'aire comprise entre les deux courbes est calculée par l'intégrale :

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Considérons par exemple la courbe suivante :



L'aire est donc donnée par

$$S = \int_a^b y_2 dx - \int_a^b y_1 dx$$

Si cette boucle est définie para-métriquement par

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$$On\ a \qquad \begin{cases} \int_a^b y_2 \times dx = -\int_{t_1}^{t_2} g(t) \times f'(t)dt \\ \int_a^b y_1 \times dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t) \times f'(t)dt \end{cases}$$

L'aire de la boucle est donc donnée par

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} g(t) \times f'(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} g(t) \times f'(t)dt = -\int_{t_0}^{t_2} g(t) \times f'(t)dt = -\int_C ydx$$

En utilisant une rotation de

$$S = \int_C xdy$$

En définitive, on a

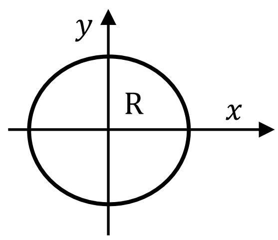
$$S = \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx)$$

Exemple n° I.17

Calculer l'aire d'un cercle de rayon R.

Solution

Méthode 1



$$x^2 + y^2 = R^2 \Longrightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S = I_{21} = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} arcsin \frac{x}{R}\right]_0^R$$

$$= 4\left(\frac{R^2}{2} arcsin\, 1 - \frac{R^2}{2} arcsin\, 0\right) = R^2.\pi$$

Méthode 2

Une équation d'un cercle de rayon R et de centre (0, 0) est

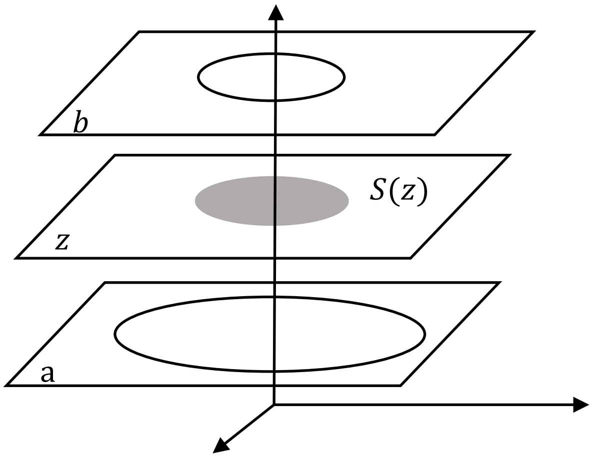
$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \ On\ a\ donc \begin{cases} x'(t) = -R\sin t\, dt \\ y'(t) = R\cos t\ \ dt \end{cases}$$

$$S = I_{21} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R\cos t\, R\cos t\ \ dt + R\sin t\, R\sin t\, dt) = \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi R^2$$

I.1.7.4– Calcul de volumes

On considère un solide limité par les plans : $z = a$ et $z = b$ $(a < b)$. On note $S(z)$ l'aire de la section du solide par le plan de côté z, perpendiculaire à l'axe des z. Lorsque s est une fonction continue de z sur [a, b], le volume du solide est :

$$V = \int_a^b S(z)dz$$



Exemple n° I.18

Calculer le volume d'une sphère de rayon R

Solution

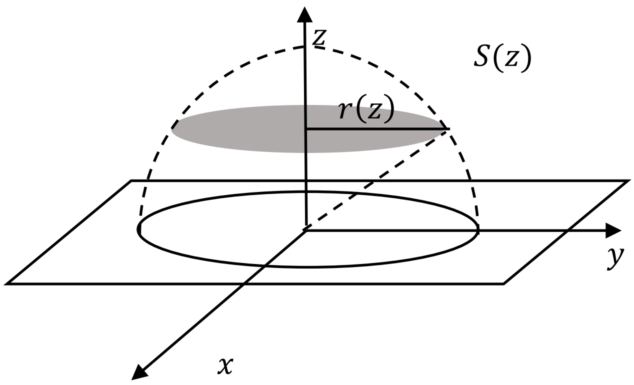
$$S(z) = \pi r^2(z)$$

$$R^2 = z^2 + r^2(z) \Longrightarrow r^2(z) = R^2 - z^2$$

$$\frac{1}{2}V = I_{22} = \pi \int_0^R S(z)dz = \pi \int_0^R (R^2 - z^2)dz$$

$$\frac{1}{2}V = \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

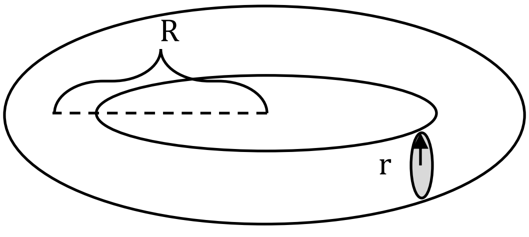
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



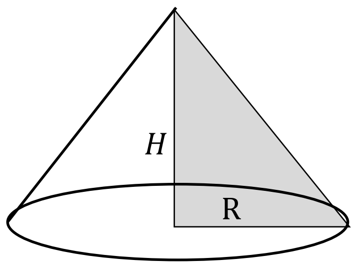
Devoirs

Calculer le volume d'un cône et d'un tore

Solution



$$V_{\text{tore}} = I_{24} = 2\pi^2 R^2 r$$



$$V_{\text{cône}} = I_{23} = \frac{1}{3}\pi R^2.\mathrm{H};$$

I.2- Intégrales multiples

I.2.1- Intégrales doubles

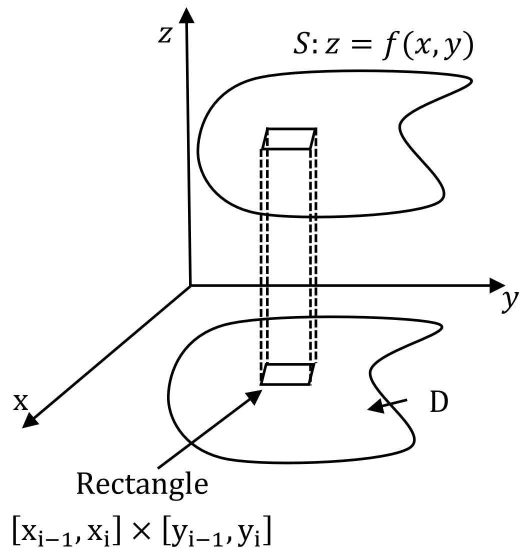
I.2.1.1– Intégrale double sur un rectangle

Soit la fonction réelle des deux variables x et y, continue sur un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. Sa représentation est une surface S dans l'espace muni du repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

ⓘ *Dans le cas des intégrales simples, nous travaillons sur un intervalle ou segment.*

ⓘ *Pour les intégrales doubles nous travaillerons sur une aire d'intégration.*

On partage D en sous-rectangles, dans chaque sous-rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$on choisit un point $M(x, y)$ et on calcule l'image de (x, y) pour la fonction f.



La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur $f(x, y)$ est une approximation du volume compris entre le plan Z=0 et la surface S. Lorsque le quadrillage devient suffisamment « fin » pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Riemann et on le note :

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy$$

I.2.1.2– Propriétés des intégrales doubles

- Intégrales successives (ou itérées)

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \quad pour \left| \begin{array}{c} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{array} \right.$$

On transforme donc une intégrale double sur un rectangle en deux intégrales simples.

- L'intégrale double sur un domaine D est linéaire :

$$\iint_D \big(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\big)dxdy = \alpha \iint_D f(x, y)dxdy + \beta \iint_D g(x, y)dxdy$$

- Additivité des domaines

$$\iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \quad avec\ |D = D_1 \cup D_2\ et\ D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

- Formules de Fubini

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ dx \right) dy$$

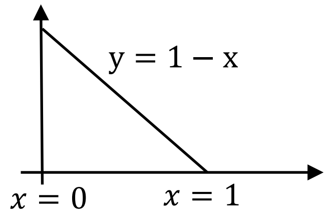
Exemple n° I.19

Intégrons la fonction $f(x,y) = xy$ sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x+y < 1\}$

Solution

La description hiérarchique du domaine.

$$\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,1-x] \end{cases}$$



$$I_{23} = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} y\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx == \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}$$

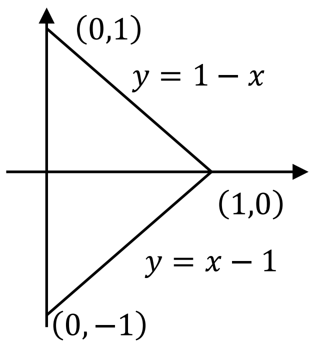
Exemple n° I.20

Intégrons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le domaine D *est le triangle* $(0,1), (0,-1)$ *et* $(1,0)$

Solution

La description hiérarchique du domaine.

$$\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [x-1, 1-x] \end{cases}$$



$$I_{24} = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x-1}^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2 2(1-x) + \frac{2}{3}(1-x)^3 \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4 \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{3}$$

I.2.1.3– Calcul de l'aire du domaine D

On a vu que $\iint_D f(x,y)dxdy$mesure le volume sous Σ et au dessus de D. On a aussi la possibilité pour calculer l'aire, on prendre $f(x,y) = 1$.

- *En coordonnées cartésiennes* : $A = \iint_D dxdy$
- *En coordonnées polaires* : $A = \iint_D r dr d\theta$

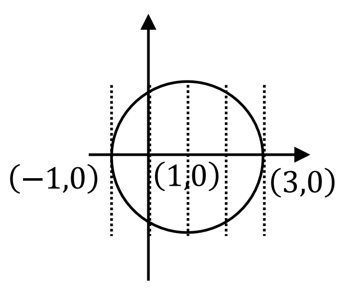
Exemple n° I.21

Calculer la valeur de l'intégrale $I_{25} = \iint_D dxdy$ *avec* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2x \leq 3\}$

Solution

$$x^2 + y^2 - 2x = 3 \Longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$$

On remarque ainsi que D est le disque centré en (1, 0) et de rayon 2.



- En coordonnées cartésiennes

$$\boldsymbol{I_{25} = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{1-\sqrt{4-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} 1\, dx\right)dy = \int_{-2}^{2} 2\left(\sqrt{4-y^2}\right)dy = 4\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}\right)dy}$$

On pose

$$\frac{y}{2} = \sin t \Longrightarrow dy = 2\cos t\, dt$$

$$I_{25} = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t + 1)dt = 4\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

- En coordonnées polaires

$$A = \iint_D r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 1\, dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}(2)d\theta = 2\times 2\pi = 4\pi$$

I.2.1.4– Changement de variables

Rappel : On appelle la matrice jacobéenne de $\varphi: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p$ la matrice à p lignes et n colonnes :

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Exemple n≗ I.22

Calculer la matrice jacobéenne des fonctions suivantes :

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 = x + y \\ \varphi_2 = x - y \end{cases}$$

Solution

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit f une fonction continue définie sur D et un système de coordonnées $T : R \to D$ donné par :

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Le couple de variables (u,v) calculées à partir de (x,y) , c'est à dire que u et v sont des fonctions de (x,y).

Théorème : Si le déterminant de la matrice jacobéenne de l'application de transformation $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ est non nul sur le domaine D alors pour toute fonction continue,

f : D → R, on a la formule suivante dite de changement de variables :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R f o\varphi(u,v)|J(u,v)|dudv$$

Exemple n≗ I.23

Calculer :

$I_{26} = \iint_D f(x-1)^2 dxdy$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \le x+y \le 1; -2 \le x-y \le 2 \}$

Solution

En effectuant le changement de variable

$$u = x+y \; et \; v = x-y \Rightarrow x = \frac{u+v}{2} \;\&\; y = \frac{u-v}{2}$$

Le domaine D en (u,v) est donc le rectangle

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / -1 \le u \le 1; -2 \le v \le 2 \}$$

$$La\ matrice\ jacobienne : J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |J(x,y)| = -\frac{1}{2}$$

$$I_{26} = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} \left(\frac{u+v}{2} - 1 \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \right) dv \right) du$$

$$= -\frac{1}{8} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} (u^2 + v^2 + 1 + 2uv - 2u - 2v)\, dv \right) du$$

$$= -\frac{1}{8} \int_{-1}^{1} \left(\left[u^2 v + \frac{1}{3} v^3 + v + uv^2 - 2uv - v^2 \right]_{v=-2}^{v=2} \right) du$$

$$= -\frac{1}{8} \int_{-1}^{1} \left(2u^2 + \frac{8}{3} + 2 + u4 - 4u - 4 - \left(-2\,u^2 - \frac{8}{3} - 2 + 4u + 4u - 4 \right) \right) du$$

$$= -\frac{1}{8} \int_{-1}^{1} \left(4u^2 - 8u + \frac{28}{3} \right) du = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} u^3 - u^2 + \frac{7}{3} u \right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3} - 1 - \frac{7}{3} \right) \right) = -\frac{8}{3}$$

Calcul en coordonnées polaires

Le domaine D en (u,v) est donc le rectangle

$$f = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Exemple n≗ I.24

Calculer l'aire du disque d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ en utilisant un changement de variables.

Solution

Exemple

On peut paramétrer ce disque :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \qquad J(R,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow |J(R,\theta)| = R$$

$$\iint_D dxdy = \iint_R |J(u,v)|dudv = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} R d\theta \right) dR = \int_0^R R[\theta]_0^{2\pi}\, dR = \pi R^2$$

I.2.1.5– Théorème de Green-Riemann

Certaines intégrales doubles peuvent être transformées en intégrales curvilignes.

Théorème : On considéré un domaine D_1 du plan, entouré par une courbe C de classe C1 sans point double et orientée dans le sens trigonométrique.

Soit $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de classe C1. On a

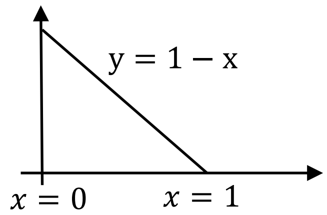
$$\oint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C \; Pdx + Qdy$$

Exemple n≗ I.25

Intégrons la fonction $f(x,y) \;=\; xy$ sur le domaine $D \;= \{(x,y) \in \; \mathbb{R}^2/x \geq 0\,, y \geq 0, x + y < 1\}$

Solution

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = xy \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = \dfrac{1}{2} x^2 y \end{cases}$$



$$I_{27} = \iint_{D_1} xydxdy = \oint_C \; 0dx + \frac{1}{2}x^2ydy$$

La courbe est constituée de trois parties

$x \; de \; 0$ à $1 \;\; on \; a \; y = 0$

$$I_{27-1} = \int_{x=0}^{x=1} 0dx + 0dy = 0$$

$x \; de \; 1$ à 0

$on \; a \; y = 0$ à $y = 1 - x$

$$I_{27-2} = \int_{x=1}^{x=0} 0dx - \frac{1}{2}x^2(1-x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$x = 0 \;\; on \; a \; y = de \; 1$ à 0

$$I_{27-3} = \int_{y=1}^{y=0} 0dx + 0dy = 0$$

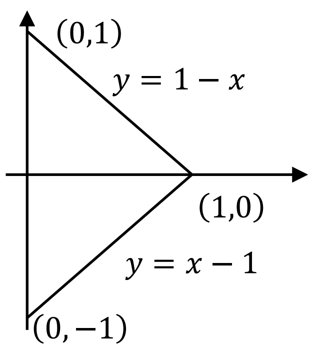
$$I_{27} = I_{27-1} + I_{27-2} + I_{27-3} = \frac{1}{24}$$

Exemple n≗ I.26

Intégrons la fonction $f(x,y) = \; x^2 + y^2$ sur le domaine $D \; est \; le \; triangle \;\; (0,1), (0,-1) \; et \; (1,0)$

Solution

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -y^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(x,y) = -\dfrac{1}{3}y^3 \\ Q(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$



$$I_{28} = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy = \oint_C \; -\frac{1}{3}y^3dx + \frac{1}{3}x^3dy$$

La courbe est constituée de trois parties

x de 0 à 1 on a $y = x-1$

$$I_{28-1} = \int_{x=0}^{x=1} -\frac{1}{3}(x-1)^3dx + \frac{1}{3}x^3dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

x de 1 à 0

on a $y = 0$ à $y = 1-x$

$$I_{28-2} = \int_{x=1}^{x=0} -\frac{1}{3}(1-x)^3dx - \frac{1}{3}x^3dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4 + \frac{1}{4}x^4\right]_1^0 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$x = 0$ on a $y =$ de 1 à 0

$$I_{28-3} = \int_{y=-1}^{y=1} 0 + \frac{1}{3}0dy = 0$$

$$I_{28} = I_{28-1} + I_{28-2} + I_{28-3} = \frac{1}{3}$$

I.2.2- Intégrales triples

Soit f une fonction continue définie sur D et un système de coordonnées $T : R \rightarrow D$ donné par

$$T : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

Le jacobine de cette transformation est défini par :

$$J(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

$$On\ a : \quad \iiint_D f(x,y)dxdydz = \iiint_R f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)|J(u,v,w)|dudv\,dw$$

Exemple n≗ I.27

Calculer:

$$I_{29} = \iiint_D (x^2 + yz)dxdydz \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0, x + y + 2z \leq 1\}$$

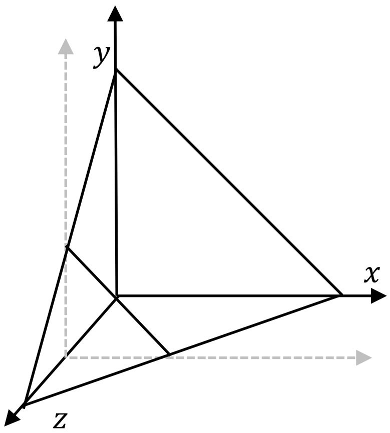
Solution

$$I_{29} = \int_0^{1/2}\int_0^{1-2z}\int_0^{1-2z-y} (x^2 + yz)dxdydz$$

$$= \int_0^{1/2}\int_0^{1-2z} \left[\frac{1}{3}x^3 + yzx\right]_0^{1-2z-y} dydz$$

$$= \int_0^{1/2}\int_0^{1-2z} \left(\frac{1}{3}(1-2z-y) + yz(1-2z-y)\right)dydz$$

$$I_{29} = \int_0^{1/2}\int_0^{1-2z} \left(\frac{1}{3}(1-2z-y)^3 + yz(1-2z-y)\right)dydz = \frac{1}{96}$$



Volume

Le volume d'un corps est donné par tel que D est le domaine $V = \iiint_D dxdydz$ délimité par ce corps.

Exemple n≗ I.28

Calculer le volume de la sphère de R^3 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solution

On peut paramétrer cette sphère :

$$T : \begin{cases} x = l\cos\emptyset\cos\theta \\ y = l\cos\emptyset\sin\theta \\ z = l\sin\emptyset \end{cases} \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} \leq \emptyset \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq l \leq 1 \end{matrix}$$

On en déduit que :

$$J(l,\emptyset,\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial l} & \dfrac{\partial x}{\partial \emptyset} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial l} & \dfrac{\partial z}{\partial \emptyset} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial l} & \dfrac{\partial y}{\partial \emptyset} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\emptyset\ \cos\theta & -l\sin\emptyset\ \cos\theta & -l\cos\emptyset\ \sin\theta \\ \cos\emptyset\ \sin\theta & -l\sin\emptyset\sin\theta & l\cos\emptyset\cos\theta \\ \sin\emptyset & l\cos\emptyset & 0 \end{bmatrix}$$

$$|J(l,\emptyset,\theta)| = -l^2\cos\emptyset$$

$$I_{30} = V\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} -l^2\cos\emptyset\, d\emptyset d\theta dl = \frac{4}{3}\pi$$