Chapitre II : Intégrales impropres

II.1- Points incertains 2
II.2- Convergence/divergence 2
II.3- Propriétés des intégrales impropres 3
II.3.1- Relation de Chasles 3
II.3.2- Linéarité 4
II.3.3- Positivité 4
II.3.4- Critère de Cauchy 4
II.3.5- La convergence absolue 4
II.4- Intégrales Impropres des fonctions à signe constant 5
II.4.1- Critère de la convergence majorée 5
II.4.2- Critère de comparaison. 5
II.4.3- Critère des équivalents 5
II.5- Intégrales de références 5
II.5.1- Intégrales de Riemann 5
II.5.2- Intégrales de Bertrand 5
II.5.3- Intégrale de Gauss 6
II.5.4- Intégrale de Dirichlet 6
II.5.5- Intégrales de Fresnel 6

2 Semaines

Abderrahmani Abdesselam

Chapitre II: Intégrales impropres

Dans ce chapitre nous allons aborder la notion d'intégrale impropre, il s'agit d'intègre une fonction sur un domaine de longueur un fini ou bien intégrer une fonction qui tend vers l'infini.

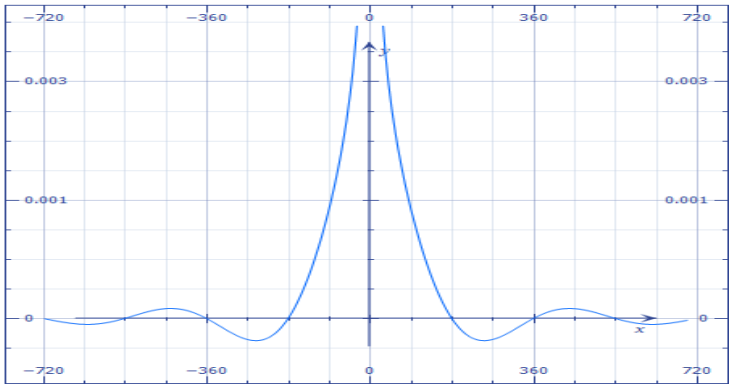
Définition 1

On appelle intégrale impropre toute intégrale du type $\int_a^b f(t)dt$ lorsque $a, b \in \{\pm\infty\}$ et si f est continue sur $]a, b[$ mais peut-être pas en a et/ou b.

II.1- Points incertains

Considérons par exemple la fonction f qui à $t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ associe fonction :

$$f(t) = \frac{\sin|t|}{|t|^{\frac{3}{2}}}$$



Les points incertains ; $+\infty$, $-\infty$ et 0

Pour calcul l'intégrale de la fonction $f(x)$:

- on identifier les points incertains, soit $+\infty$, soit $-\infty$ d'une part, et d'autre part le ou les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée ($t = 0$ dans notre exemple).
- On découpe ensuite chaque intervalle d'intégration en autant d'intervalles qu'il faut pour que chacun d'eux ne contienne qu'un seul point incertain, placé à l'une des deux bornes.

Exemple : (on utiliser la relation de Chasles)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)dt$$

II.2- Convergence/divergence

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ (on peut avoir b = $+\infty$) et localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente en b si la fonction

$$F(t) = \int_a^t f(t)dt \ , \qquad est\ définie\ sur\ [a, b[,$$

Admet une limite finie quand x tend vers b (Cette limite finie est appelée l'intégrale de f sur $[a, b[$ et est notée :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemple n° II.01

Déterminer la convergence des intégrales suivantes :

01) $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ 02) $\int_0^1 \frac{1}{t-1}dt$

03) $\int_0^1 \ln t\, dt$

Solution

01) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-t}|_0^x) = \lim_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1$ (valeur finie) converge

02) $\lim_{x\to1} \int_0^x \frac{1}{t-1}dt = \lim_{x\to1}(\ln|t-1|\,|_0^x) = \lim_{x\to1}(\ln(x-1)-0) = -\infty$ diverge

03) $\lim_{x\to0} \int_x^1 \ln t\, dt = \lim_{x\to0}(t\ln|t|-t|_x^1) = \lim_{x\to0}(-1-x\ln(x)+x) = -1$ converge

II.3- Propriétés des intégrales impropres

II.3.1- Relation de Chasles

Proposition 1

Soit $f : [a,+\infty[\to R$ une fonction continue et soit $a' \in [a,+\infty[$ Alors les intégrales impropres $\int_a^{a'} f(t)dt$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^{+\infty} f(t)dt$$

« Être de même nature » signifie que les deux intégrales sont convergentes en même temps ou bien divergentes en même temps.

La relation de Chasles implique donc que la convergence ne dépend pas du comportement de la fonction sur des intervalles bornés, mais seulement de son comportement au voisinage de $+\infty$.

Exemple n° II.02

Montrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ est convergente.

Solution

La fonction $\frac{1}{t^2+1}$ est définie et continue (donc localement intégrable) sur R.

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{1}{t^2+1}dt = \lim_{x\to-\infty} (\arctan t\,|_x^0) = \lim_{x\to-\infty} (-\arctan x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt = \lim_{x\to+\infty} (\arctan t\,|_0^x) = \lim_{x\to+\infty} (\arctan x) = +\frac{\pi}{2}$$

Les deux intégrales sont convergentes et par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ est convergente et vaut π.

II.3.2- Linéarité

Proposition 2

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$, et λ,μ deux réels. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^{+\infty}\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)dt$ converge et

$$\int_a^{+\infty}\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)dt=\lambda.\int_a^{+\infty} f(t)\,dt+\mu.\int_a^{+\infty} g(t)dt$$

Les mêmes relations sont valables pour les fonctions d'un intervalle $]a,b]$, non bornées en a.

II.3.3- Positivité

Proposition 3

Soient $f, g: [a,+\infty[\to R$ des fonctions continues, ayant une intégrale convergente.

$$Si \quad f\geq 0 \quad alors \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt\geq 0$$

En particulier, l'intégrale (convergente) d'une fonction positive est positive :

$$Si \quad f\leq g \quad alors \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt\leq\int_a^{+\infty} g(t)dt$$

Une nouvelle fois, les mêmes relations sont valables pour les fonctions définies sur un intervalle $]a,b]$, non bornées en a, en prenant bien soin d'avoir $a<b$.

II.3.4- Critère de Cauchy

Rappel : Soit f : $[a,+\infty[\to R$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)dx$ existe et est finie si et seulement si

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists M\geq a \quad (u,v\geq M\Longrightarrow|f(u)-f(v)|<\varepsilon).$$

Théorème 1

Soit $f: [a,+\infty[\to R$ une fonction continue. L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si :

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists M\geq a \quad (u,v\geq M\Longrightarrow|\int_u^v f(t)\,dt|<\varepsilon)$$

II.3.5- La convergence absolue

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente (en b) si l'intégrale $\int_a^b|f(t)|\,dt$ est convergente (en b).

II.4- Intégrales Impropres des fonctions à signe constant

Dans la suite on ne considère que le cas des fonctions positives.

II.4.1- Critère de la convergence majorée

Si f est positive alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente (en b) si et seulement si la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad est\ bornée\ sur\ [a,b[.$$

II.4.2- Critère de comparaison.

Soit f et g deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a,b[$. S'il existe $M \in R$ tel que $f(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in [a,b[$, alors la convergence de l'intégrale

$$\int_a^b g(t)dt \quad entraine\ celle\ de \quad \int_a^b f(t)dt$$

II.4.3- Critère des équivalents

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a,+\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

ⓘ *Attention : il est important que f et g soient positifs !*

II.5- Intégrales de références

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive, l'utilisation des équivalents permet de se ramener à un catalogue d'intégrales dont la nature est connue. Les plus classiques sont les intégrales de Riemann et de Bertrand.

II.5.1- Intégrales de Riemann

Une intégrale de Riemann est :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad où\ \alpha > 0\ \ est\ convergente\ si\ et\ seulement\ si\ \ \alpha > 1$$

II.5.2- Intégrales de Bertrand

Une intégrale de Bertrand est

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t.(\ln t)^\beta}\,dt \quad où\ a > 0\ \ est\ convergente\ si\ et\ seulement\ si\ \beta > 1$$

II.5.3- Intégrale de Gauss

Une intégrale de Gauss est

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \quad est\ convergente\ et\ vaut\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II.5.4- Intégrale de Dirichlet

Une intégrale de Dirichlet est

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \quad est\ convergente\ et\ vaut\ \frac{\pi}{2}$$

II.5.5- Intégrales de Fresnel

Les intégrales de Fresnel sont

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt \ \ et\ \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt\ \ sont\ convergentes\ et\ leurs\ valeurs\ est\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$