Chapitre III: Équations différentielles

Définitions générales

Une équation différentielle (ED) d'ordre n est une équation faisant intervenir une fonction y ainsi que ses dérivées y(k) jusqu'a` l'ordre n. Par exemple, une telle équation pourrait être :

Équation d'ordre 1 : $y' = 5x \times y$

Équation d'ordre 2 : $y'' = \frac{1}{x}y' - y + 5x$

Définition 1

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

III.1- Équation différentielle du premier ordre

Définition 2

Une ED est du 1er ordre si elle ne fait intervenir que la première dérivée y'.

III.1.1- ED à variables séparées $g(y)dy = f(x)dx$

Définition 3

Une différentielle du premier de 1er ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Une telle ED peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$, puis, symboliquement :

$$g(y)dy = f(x)dx \Leftrightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

Exemple n≗ III.01

Résoudre sur $I =]1, \infty[$ l'ED

$$xy' \ln x = 3(\ln x + 1)y$$

Solution

$$\frac{y'}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x \ln x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right)dx$$

D'où: $\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right)dx + C \Leftrightarrow \ln|y| = 3\ln x + \ln|\ln x| + \ln C_1$

Donc: $y = C_1 x^3 \ln x$

ⓘ *La constante d'intégration C est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donnée, on ait une valeur donnée de $y(x_0) = y_0$. (On parle des valeurs initiales)*

III.1.2- E.D. homogène $y' = f(y/x)$

Ces d'équation de la forme $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pour résoudre cette équation on pose $y = ux \Longrightarrow dy = udx + xdu$

L'équation devient

$$\frac{udx + xdu}{dx} = f(u) \Longrightarrow u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

C'est une ED à variable séparées

Exemple n≗ III.02

Résoudre $x^2ydx - (x^3 - y^3)dy = 0$

Solution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3 - y^3} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^3}{x^3}}$$

On pose $y = ux \Longrightarrow dy = udx + xdu$

$$u + \frac{xdu}{dx} = \frac{u}{1 - u^3} \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1 - u^3}{u^4}du \Longrightarrow \ln x = -\frac{1}{3}u^{-3} - \ln u + C$$

$$\ln x = -\frac{1}{3}\frac{x^3}{y^3} - \ln\frac{y}{x} + C$$

III.1.3- ED exacte (totale)

Définition 4

Si ED mise sous la forme :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Et les fonctions P et Q sont telles que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Il existe une fonction $U(x, y)$telle que :

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

La fonction $U(x, y) = C^{te}$sera la solution de l'équation $$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Exemple n≗ III.03

$$Résoudre : \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}dy = 0$$

Solution

$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ Q(x, y) = -\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x} \end{cases} \quad donc\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} \Longrightarrow U = -\sin\frac{y}{x} + \varphi(x) \end{cases} \quad d'où$$

$$D'où \quad : \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x^2} cos\frac{y}{x} = \frac{y}{x^2} cos\frac{y}{x} + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = C$$

$$-\sin\frac{y}{x} + \varphi(x) = C^{te} \Rightarrow -\sin\frac{y}{x} = C_1$$

III.1.4- ED linéaire

Définition 5

une équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre est une équation de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

ou a, b, c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset R$ et $a(x) \neq 0$.

Cette équation différentielle on peut associer la même équation avec c = 0 :

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

C'est l'équation homogène associée à (EDL), ou équation sans second membre.

III.1.4.1– Structure de la solution EDL

Solution générale de (EDL) = solution homogène (y_h)+solution particulière (y_p)

ⓘ *Principe de superposition : Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y_p = y_1 + y_2$.*

a- Solution homogène

Les solutions non nulles de cette équation doivent vérifier :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)} \quad \textit{Dans tout intervalle où } a(x) \textit{ ne s'annule pas.}$$

$$\ln y = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx + C$$

On en déduit que les solutions sont de la forme :

$$y_h = Ke^{\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

Où K est une constante réelle

b- Solutions particulières par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y_P = K(x)e^{F(x)}$, avec K une fonction à déterminer

$y_P' = K'(x) \times e^{F(x)} + K(x)F'(x) \times e^{F(x)}$

On remplace à l'équation

$$a(x)\left(K'(x) \times e^{F(x)} + K(x)F'(x) \times e^{F(x)}\right) + b(x)K(x)e^{F(x)} = c(x)$$

$$a(x)K'(x) \times e^{F(x)} + \underbrace{\left(a(x)F'(x) + b(x)\right)K(x)e^{F(x)}}_{0} = c(x)$$

D'où

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx$$

Une solution particulière est donc

$$y_P = e^{F(x)} \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx$$

Exemple n≗ III.04

Résoudre sur $I\ =]\,0,\frac{\pi}{2}\,[$ l'équation différentielle

$$\sin x \times y' - \cos x \times y = x$$

Solution

S.H : $$\sin x \times y' - \cos x \times y = 0 \Leftrightarrow \ln y = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx + C \Leftrightarrow y_h = K\sin x \quad K \in \mathbb{R}$$

S.P : $$y_p = K(x) \times \sin x \Longrightarrow y_p' = K'(x) \times \sin x + K(x) \times \cos x$$

$$\sin x \times (K'(x) \times \sin x + K(x) \times \cos x) - \cos x \times K(x) \times \sin x = x$$

$$\sin^2 x \times K'(x) = x \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx$$

On intègre par partie, en posant $\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{\sin^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\frac{1}{\tan x} \end{cases}$

$$K(x) = -\frac{x}{\tan x} + \int -\frac{1}{\tan x}dx = -\frac{x}{\tan x} + \ln|\sin x|$$

$$y_p = \left(-\frac{x}{\tan x} + \ln|\sin x|\right) \times \sin x = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

Et la solution générale de

$$y = y_h + y_p = K\sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

$$y = y_h + y_p = K\sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

III.1.5- Équation de Bernoulli

Définition 6

C'est l'équation différentielle de la forme :

$$y' + yf(x) = y^n g(x)$$

Cette équation se ramène au cas EDL en posant $z = y^{1-n}$

Exemple n≗ III.05

Résoudre $xy' + y = y^2 \ln x$

Solution

$$y' + y\frac{1}{x} = y^2\frac{\ln x}{x}$$

$On\ pose\ z = y^{1-2} = \frac{1}{y} \qquad ; \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y^2} \Longrightarrow dy = -\frac{dz}{z^2}$

On remplace

$$-\frac{dz}{z^2 dx} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{z^2}\frac{\ln x}{x} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x}$$

Solution homogène

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow z_h = Cx$$

La solution particulaire

$$z_p = C(x)x \Longrightarrow z_p' = C'(x)x + C(x)$$

On remplace sur E

$$C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow C'(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow C(x) = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

On intègre par partie $\begin{cases} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$C(x) = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

D'où
$$z_p = C(x)x = \ln x + 1$$

Alors
$$z = z_h + z_p = Cx + \ln x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$$

III.1.6- Équation de Riccati

Définition 7

C'est l'équation différentielle de la forme :

$$y' + p_1(x)y^2 + p_2(x)y + p_3(x) = 0$$

Si l'on connait une intégrale particulière y_1, cette équation se ramène à une équation de Bernoulli, en posant $z = y - y_1$

Exemple n≗ III.06

Résoudre $x^3y' + y^2 + x^2y + 2x^4 = 0$ *la solution particulaire* $y_1 = -x^2$

Solution

On pose $z = y + x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2x$

$$x^3\left(\frac{dz}{dx} - 2x\right) + (z - x^2)^2 + x^2(z - x^2) + 2x^4 = 0$$

$$x^3\frac{dz}{dx} + z^2 - 2zx^2 + x^2z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^3}z^2$$

On pose $u = z^{1-2} = \frac{1}{z} \quad ; \frac{du}{dz} = -\frac{1}{z^2} \Rightarrow dz = -\frac{du}{u^2}$

On remplace

$$-\frac{du}{u^2dx} - \frac{1}{x} \times \frac{1}{u} = \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{x} \times u = \frac{1}{x^3}$$

S.H :
$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} \times u = 0 \Rightarrow u_h = \frac{C}{x}$$

S.P :
$$u_p = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow u_p' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

On remplace :

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x^3} \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C(x) = -\frac{1}{x}$$

$$u_p = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow u = \frac{C}{x} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow z = \frac{1}{u} = \frac{x^2}{Cx - 1} \Rightarrow y = z - x^2 = \frac{x^2}{Cx - 1} - x^2$$

III.1.7- Méthode 2 Changement de variable

De façon générale, pour résoudre une équation différentielle du 1er ordre, il faut trouver un moyen d'arriver à une équation différentielle à variables séparées.

III.2- Équations différentielles du 2ème ordre

Définition 8

Une équation différentielle du deuxième ordre est une expression de la forme :

$$F(x,y,y',y'')=0$$

Si l'équation est incomplète en y c'est-à dire du type $F(x,y',y'')=0$ en posant $z=y'$ on obtient une équation du premier ordre en z dont il suffira d'intégrer les solutions.

III.2.1- ED linéaires du 2ème ordre à coefficients constants

Définition 9

Une équation différentielle linaire du deuxième ordre à coefficient constants est une équation de la forme :

$$ay''+by'+cy=f(x)$$

ou $a,b,c\ \in \mathbb{R}\ \ et\ \ a\ \neq 0, f(x)$est une fonction continue.

L'équation homogène associée est :

$$ay''+by'+cy=0$$

III.2.1.1– Résolution de l'équation homogène associée

Par analogie avec le résultat d'ED du 1er ordre, on va d'abord chercher les solutions de $ay''+by'+cy=0$ qui sont de la forme $y(x)\ =\ e^{kx}$. Un calcul d'identification montre que k doit vérifier l'équation caractéristique : $ak^2\ +bk\ +c\ =\ 0$.

Suivant le signe de $\Delta = b^2-4ac$, on a les résultats suivants :

- $\Delta>0$: (EC) admet 2 racines réelles distinctes $k_1\neq k_2$, et $y_1(x)=e^{k_1x}$; $y_2(x)=e^{k_2x}$
- $\Delta=0$: (EC) admet 1 racine double k, et $y_1(x)=e^{kx}$; $y_2(x)=xe^{kx}$
- $\Delta<0$:(EC) admet 2 racines complexes conjuguées $k_1=\alpha+i\beta, k_2=\alpha-i\beta$, et $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Dans chacun des cas, la solution générale à (E.H.) est donc $y=C_1y_1+C_2y_2$

Exemple n° III.07

Résoudre les équations différentielles suivantes :

01) $y''-2y'-8y=0$
02) $y''-4y'+4y=0$
03) $y''+4y=0$

Solution

01) Cas 1 : EC : $k^2-2k-8=0 \Longrightarrow (k-4)(k+2)=0$; $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}$

02) Cas 2 : EC : $k^2-4k+4=0 \Longrightarrow (k-2)^2=0$; $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

03) Cas 3 : EC : $k^2+4=0 \Longrightarrow (k-2i)(k+2i)=0$; $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

EC : l'équation caractéristique

ⓘ *Si y_1, y_2 sont deux solutions d'EH, on définit le wronskien $\omega : I\rightarrow R$,*

$$\omega\ (x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1\times y_2'-y_2\times y_1'$$

Si $\omega\ (x)\neq 0$ pour tout $x\ \in\ I$, on dit que $\{y_1,y_2\}$ soit linéairement indépendant.

III.2.1.2– Solution particulière selon la forme de second membre

On distingue encore 2 cas particuliers et une méthode générale :

a- Second membre exponentielle polynôme

$f(x) = e^{\alpha x} \times P(x) \qquad avec\ P\ est\ un\ polynôme$

On cherche la solution sous la forme $y = e^{\alpha x} \times Q(x)$ ou Q est un polynôme.

$y_p = e^{\alpha x} Q$

$y_p' = \alpha e^{\alpha x} Q + e^{\alpha x} Q'$

$y_p'' = \alpha^2 e^{\alpha x} Q + 2\alpha e^{\alpha x} Q' + e^{\alpha x} Q''$

On remplace EDL

$$a(\alpha^2 e^{\alpha x} Q + 2\alpha e^{\alpha x} Q' + e^{\alpha x} Q'') + b(\alpha e^{\alpha x} Q + e^{\alpha x} Q') + c(e^{\alpha x} Q) = P(x) e^{\alpha x}$$
$$aQ'' + (b + 2\alpha) Q' + (a\alpha^2 + b\alpha + c) Q = P(x)$$

On peut calcul Q (on précise que P et Q sont des polynômes).

Dont on peut préciser le degré :

- si α n'est pas racine de (EC) $\alpha \neq k_1 et\ \alpha \neq k_2$, alors deg Q = deg P ;
- si α est l'une des deux racines de (EC) $\alpha = k_1 ou\ \alpha = k_2$, alors deg Q = deg P + 1 ;
- Si α est racine double de (EC) $\alpha = k$, alors deg Q = deg P + 2.

Exemple n≗ III.08

Résoudre

$$y'' - 2y' - 8y = (x - 1)e^{3x}$$

Solution

S.H : $(EC) k^2 - 2k - 8 = 0 \Longrightarrow k_1 = 4\ et\ k_2 = -2\ \ d'où \quad y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$

S.P : $\alpha = 3 \neq k_1 et\ \alpha \neq k_2 \Longrightarrow deg(y_p) = deg(x - 1) = 1$

$y_p = (Ax + B)e^{3x}$;

$y_p' = (3Ax + 3B + A)e^{3x}$;

$y_p'' = (9Ax + 9B + 6A)e^{3x}$

On remplace EDL

$(9Ax + 9B + 6A)e^{3x} - 2(3Ax + 3B + A)e^{3x} - 8(Ax + B)e^{3x} = (x - 1)e^{3x}$

$\Longrightarrow -5Ax - 5B + 4A = x - 1 \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = \frac{1}{25} \end{cases}$

$D'où \quad y_p = \left(-\frac{1}{5}x + \frac{1}{25}\right)e^{3x}$

S.G $\quad y = y_h + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{1}{9}x + 1\right)e^{3x}$

Exemple n° III.09

Résoudre

$$y'' - 2y' - 8y = xe^{-2x}$$

Solution

S.H : $(EC) k^2 - 2k - 8 = 0 \Longrightarrow k_1 = 4 \; et \; k_2 = -2 \;\; d'où \quad y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$

S.P : $\alpha = -2 = k_2 Est\ une\ racine \Longrightarrow deg(y_p) = deg(x) + 1 = 2$

$y_p = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}$;

$y_p' = (-2Ax^2 + (-2B + 2A)x + B)e^{-2x}$;

$y_p'' = (4Ax^2 + (4B - 8A)x - 4B + 2A)e^{-2x}$

On remplace EDL

$(4Ax^2 + (4B - 8A)x - 4B + 2A) - 2(-2Ax^2 + (-2B + 2A)x + B) - 8(Ax^2 + Bx) = x$

$$\begin{cases} (4B - 8A) - 2(-2B + 2A) - 8B = 1 \\ -4B + 2A - 2B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -12A = 1 \\ A - 3B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{12} \\ B = \dfrac{1}{48} \end{cases}$$

$d'où\ y_p = \left(-\dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{48}x\right)e^{-2x}$

S.G $y = y_h + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{48}x\right)e^{-2x}$

Exemple n° III.10

Résoudre

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

Solution

S.H : $(EC) k^2 - 4k + 4 = 0 \Longrightarrow k = 2 \;\; d'où \quad y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

S.P : $\alpha = 2$ Est racine double $\Longrightarrow deg(y_p) = deg(x) + 2 = 3$

$y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$;

$y_p' = (2Ax^3 + (2B + 3A)x^2 + 2Bx)e^{2x}$

$y_p'' = (4Ax^3 + (4B + 12A)x^2 + (8B + 6A)x + 2B)e^{2x}$

On remplace à EDL

$(4Ax^3 + (4B + 12A)x^2 + (8B + 6A)x + 2B) - 4(2Ax^3 + (2B + 3A)x^2 + 2Bx)$
$\qquad + 4(Ax^3 + Bx^2) = x$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (8B + 6A) - 8B = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = 0 \end{cases}$$

$d'où \;\; y_p = \dfrac{1}{6}x^3 e^{2x}$

S.G $y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \dfrac{1}{6}x^3 e^{2x}$

b- Second membre trigonométrique

$f(x) = M \times \sin \omega x + N \times \cos \omega x \qquad M, N \in \mathbb{R}$

On distingue encore une fois deux cas :

- ω n'est pas la partie imaginaire de la racine de (EC) $\omega \neq \beta \; et \; \omega \neq -\beta$, Une solution particulière de (E) sera de la forme $y_p = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, où les constantes $A, B \in R$ se déterminent par identification.
- ω est la partie imaginaire de la racine de (EC) $\omega = \beta \; ou \; \omega = -\beta$, Une solution particulière de (E) sera de la forme $y_p = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$, où les constantes $A, B \in R$ se déterminent par identification.

Exemple n≗ III.11

Résoudre

$$y'' - 4y' + 4y = \cos 2x$$

Solution

S.H : ÉC : $k^2 - 4k + 4 = 0 \implies k = 2 \; donc \quad y_h = (C_1 + xC_2)e^{2x}$

S.P : $k = 2 \implies \alpha = 2; \beta = 0$

$\omega = 2 \neq \beta$

$y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$

$y_p' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$

$y_p'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$

On remplace à l'EDL :

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + 4(A \cos 2x + B \sin 2x) = \cos 2x$$

$(-8B) \cos 2x + (8A) \sin 2x = \cos 2x \; ; Donc \quad B = -\dfrac{1}{8}$

$d'où \quad y_p = -\dfrac{1}{8} \sin 2x$

S.G $\quad y = y_h + y_p = (C_1 + xC_2)e^{2x} - \dfrac{1}{8} \sin 2x$

Exemple n≗ III.12

Résoudre

$$y'' + 4y = x \sin 2x$$

Solution

S.H : ÉC : $k^2 + 4 = 0 \implies k = \pm 2i \; donc \quad y_h = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$

S.P : $k = \pm 2i \implies \alpha = 0; \beta = 2$

$f(x) = x \sin 2x \implies \omega = 2 = \beta \quad Donc: \quad deg\big(Q(x)\big) = deg\big(P(x)\big) + 1$

$y_p = (ax^2 + bx) \cos 2x + (cx^2 + dx) \sin 2x$

$y_p' = (2ax + b) \cos 2x + (2cx + d) \sin 2x - 2(ax^2 + bx) \sin 2x + 2(cx^2 + dx) \cos 2x$

$y_p' = (2cx^2 + (2a + 2d)x + b) \cos 2x + (-2ax^2 + (2c - 2b)x + d) \sin 2x$

$$y_p'' = \big(4cx + (2a + 2d)\big) \cos 2x + \big(-4ax + (2c - 2b)\big) \sin 2x - 2(2cx^2 + (2a + 2d)x + b) \sin 2x + 2(-2ax^2 + (2c - 2b)x + d) \cos 2x$$

$y_p'' = (-4ax^2 + (8c - 4b)x + 2a + 4d) \cos 2x - (4cx^2 + (8a + 4d)x + 4b - 2c) \sin 2x$

On remplace à l'EDL :

$$(-4ax^2+(8c-4b)x+2a+4d)\cos 2x-(4cx^2+(8a+4d)x+4b-2c)\sin 2x$$
$$+4\left((ax^2+bx)\cos 2x+(cx^2+dx)\sin 2x\right)=x\sin x$$

$$\begin{cases}-4ax^2+(8c-4b)x+2a+4d+4(ax^2+bx)=0\\-(4cx^2+(8a+4d)x+4b-2c)+4(cx^2+dx)=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8c=0\\2a+4d=0\\-8a=1\\4b-2c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{8}\\b=0\\c=0\\d=\dfrac{1}{16}\end{cases}$$

$d'où \quad y_p=-\dfrac{x^2}{8}\cos 2x+\dfrac{x}{16}\cos 2x$

S.G $\quad y=y_h+y_p=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x-\dfrac{x^2}{8}\cos 2x+\dfrac{x}{16}\cos 2x$

Méthode 2 :

$$y''-4y'+4y=\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}$$

S.H : ÉC : $k^2-4k+4=0 \Rightarrow k=2 \;\; donc \quad y_h=(C_1+xC_2)e^{2x}$

S.P : $k=2$

On cherche des solutions particulières de :

$(y_1)\; y''-4y'+4y=\dfrac{e^{i2x}}{2}$

$\alpha=2i\;\neq k_1 et\; \alpha\neq k_2 \Rightarrow deg(y_1)=deg\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

$y_1\;=\;Ae^{i2x}$
$y_1'\;=\;i2Ae^{i2x}\;;$
$y_1''\;=\;-4Ae^{i2x}$

On remplace à l'EDL :

$-4A-i8A+4A=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=-\dfrac{1}{16i}\Rightarrow y_1=-\dfrac{1}{16i}e^{i2x}$

$(y_2)\quad y''-4y'+4y=\dfrac{e^{-i2x}}{2}$

$\alpha=-2i\;\neq k_1 et\; \alpha\neq k_2 \Rightarrow deg(y_2)=deg\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

$y_2\;=\;Be^{-i2x}$
$y_2'=-\,i2Be^{-i2x}$
$y_2''\;=\;-4Be^{-i2x}$

On remplace à l'E :

$4B+i8A-4B=\dfrac{1}{2}\Rightarrow B=\dfrac{1}{16i}\Rightarrow y_2=\dfrac{1}{16i}e^{-i2x}$

$d'où \quad y_p=y_1+y_2=-\dfrac{1}{16i}e^{i2x}+\dfrac{1}{16i}e^{-i2x}=-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)=-\dfrac{1}{8}\sin 2x$

S.G $\quad y=y_h+y_p=(C_1+xC_2)e^{2x}-\dfrac{1}{8}\sin 2x$

III.2.1.3– Solution particulière par variation des constantes

Soient y_1 *et* y_2 deux solutions indépendantes de l'EH. On cherche une solution particulière sous la forme

$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

$y_p' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2$

$y_p'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + 2C_1{}'(x)y_1' + 2C_2{}'(x)y_2' + C_1{}''(x)y_1 + C_2{}''(x)y_2$

On remplace à l'EDL

$$a(2C_1{}'(x)y_1' + 2C_2{}'(x)y_2' + C_1{}''(x)y_1 + C_2{}''(x)y_2) + b(C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2) = f(x)$$

Où C_1 et C_2 sont des fonctions vérifiant $A'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 = 0$.

Ainsi, $C_1{}'(x)y_1' + C_2{}'(x)y_2' = \frac{f(x)}{a(x)}$

Donc$C_1{}', C_2{}'$ sont solutions du système

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 = 0 \\ C_1{}'(x)y_1' + C_2{}'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Exemple n° III.13

Résoudre

$$y'' + y = \frac{1}{sin^3 x}$$

Solution

S.H : ÉC : $k^2 + 1 = 0 \implies k_1 = i \; et \; k_2 = -i \;\; donc \quad y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

S.P :

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 = 0 \\ C_1{}'(x)y_1' + C_2{}'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a(x)} \end{cases} \implies \begin{cases} C_1{}'(x) \cos x + C_2{}'(x) \sin x = 0 \\ -C_1{}'(x) \sin x + C_2{}'(x) \cos x = \dfrac{1}{sin^3 x} \end{cases}$$

$$\omega\,(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1{}'(x) = \frac{1}{\omega\,(x)} \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{sin^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{1}{sin^2 x} \implies C_1(x) = \frac{1}{\tan x}$$

$$C_2{}'(x) = \frac{1}{\omega\,(x)} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{sin^3 x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{sin^3 x} \implies C_2(x) = -\frac{1}{2\,sin^2 x}$$

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \frac{1}{\tan x}\cos x - \frac{1}{2\,sin^2 x}\sin x = \frac{cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2 \sin x} = \frac{\cos 2x}{2 \sin x}$$

S.G $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{\cos 2x}{2 \sin x}$

III.2.2- Équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients variables

Définition 10

Une équation différentielle linaire du deuxième ordre à coefficients variables est une équation de la forme :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

ou a, b, c, d sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}\ et\ a(x) \neq 0$.

Par simplification nous posons :

$A(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}; B(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}; f(x) = \dfrac{d(x)}{a(x)}$

$$d'où \quad y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

L'équation "homogène", ou "sans second membre" associée à est l'équation :

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0$$

Théorème 1

Comme pour les équations différentielles à coefficients constants :

Si $y_1\ et\ y_2$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'EH, alors la solution homogène $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$; $C_1\ et\ C_2$ étant des constantes arbitraires.

III.2.2.1– Résolution d'équation homogène

Il faut considérer plusieurs cas :

a- On connaît une solution particulière

On connaît une solution particulière y_1 alors on cherche une deuxième solution de la forme : $y_2 = zy_1$ où z est une fonction à déterminer.

D'où $y_2' = zy_1' + z'y_1$ et $y_2'' = zy_1'' + 2z'y_1' + z''y_1$

En reportant dans EH, il vient :

$$zy_1'' + 2z'y_1' + z''y_1 + A(x)(zy_1' + z'y_1) + B(x)zy_1 = 0$$
$$z(y_1'' + A(x)y_1' + B(x)y_1) + z''y_1 + (2y_1' + +A(x)y_1)z' = 0$$

Donc : $z''y_1 + (2y_1' + +A(x)y_1)z' = 0$

C'est une équation linéaire du premier ordre par rapport à la fonction $u = z'$

$$u'y_1 + (2y_1' + +A(x)y_1)u = 0$$

Après intégration on en déduit z par une quadrature, puis y_2

Exemple n° III.14

Résoudre $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ avec $y_1 = x$ solution particulière.

Solution

$y'' - \frac{1}{x(\ln x-1)}y' + \frac{1}{x^2(\ln x-1)}y = 0$

$donc\ A(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x - 1)}\ et\ B(x) = \dfrac{1}{x^2(\ln x - 1)}$

On pose $y_2 = zy_1 = zx$

On a : $z''y_1 + (2y_1' + +A(x)y_1)z' = 0 \Rightarrow$: $z''x + \left(2 - \frac{1}{x(\ln x-1)}x\right)z' = 0$

On pose $u = z'$ d'où

$u'x + \left(\dfrac{2\ln x - 3}{\ln x - 1}\right)u = 0 \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -\dfrac{1}{x} \times \dfrac{2\ln x - 2 - 1}{\ln x - 1}dx$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = \left(-\frac{2}{x} + \frac{1/x}{\ln x - 1}\right) dx \Rightarrow \ln u = -2\ln x + \ln(\ln x - 1) + C_1 \Rightarrow u = C_2 \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

$$z' = u \Rightarrow z = \int C_2 \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = C_2 \int \left(\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\begin{cases} v = \ln x \\ w' = \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v' = \dfrac{1}{x} \\ w = -\dfrac{1}{x} \end{matrix}$$

$$z = C_2 \left(\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx\right) = C_2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

Alors $y_2 = zy_1 = C_2 \ln x$

$$y = C_1 x + C_2 \ln x$$

b- On ne connaît aucune solution particulière

On ne connaît aucune solution particulière alors on cherche la solution y_h sous la forme d'un produit de fonctions inconnues : $y_h = uv$

On choisit la fonction v pour rendre nul le facteur $de\ u'$. L'équation différentielle du deuxième ordre en u'' ainsi obtenue peut "dans certains cas" s'intégrer facilement.

En effet :

$y_h = uv \;\; alors\ y_h = u'v + uv' \;\; et \;\; y_h'' = u''v + 2u'v' + uv''$

Reportons dans ED

$$u''v + 2u'v' + uv'' + A(x)(u'v + uv') + B(x)uv = 0$$
$$u''v + (2v' + A(x)v)u' + (v'' + A(x)v' + B(x)v)u = 0$$

En choisissant la fonction v telle que le facteur de u' soit nul, c'est à dire : $2v' + A(x)v = 0$

Par intégration, nous obtenons v et la résolution de l'équation différentielle réduite :

$$u''v + (v'' + A(x)v' + B(x)v)u = 0$$

Qui conduit à u .

La connaissance des fonctions $u\ et\ v$ détermine la solution homogène y_h.

Exemple n≗ III.15

Résoudre $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$

Solution

On a $A(x) = 2x\ et\ B(x) = x^2 + 1$

On pose $y_h = uv$

Après remplacement sur EH, on pose $2v' + A(x)v = 0$

$$\Rightarrow 2v' + 2xv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -xdx \Rightarrow v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La constante d'intégration est prise égale à 1

En remplace $y = vu = ue^{-\frac{x^2}{2}}$ sur EH $u''v + (v'' + A(x)v' + B(x)v)u = 0$

$$on\ a : v = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow v' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}\ et\ v'' = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow u''e^{-\frac{x^2}{2}} + \left((x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2x\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) + (x^2 + 1)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)u = 0 \Rightarrow u'' + (0)u = 0$$

D'où $u = C_1 x + C_2$

Alors

$$y = uv = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

III.2.2.2– Solution particulière par variation des constantes

De la même façon que les équations linéaires 2 ordre à coefficient constant

Exemple n° III.16

Résoudre

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x$$

Solution

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x \Longrightarrow y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x}$$

S.H : $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$

$On\ a\ \ A(x) = -\frac{4}{x}\ et\ B(x) = \frac{6}{x^2}\quad ;\quad On\ pose\quad y_h = uv$

Après remplacement sur EH, on pose $2v' + A(x)v = 0$

$$\Longrightarrow 2v' - \frac{4}{x}v = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{x}dx \Longrightarrow v = x^2$$

La constante d'intégration est prise égale à 1

En remplace $y = vu = ux^2$ sur EH $u''v + (v'' + A(x)v' + B(x)v)u = 0$

$$on\ a : v = x^2 \Longrightarrow v' = 2x\ et\ v'' = 2$$

$$\Longrightarrow u''2x + \left(2 - \frac{4}{x}2x + \frac{6}{x^2}x^2\right)u = 0 \Longrightarrow 2xu'' + (0)u = 0$$

D'où $u = C_1x + C_2$

$Alors\quad y_h = uv = (C_1x + C_2)x^2 = C_1x^3 + C_2x^2$

S.P :

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 = 0 \\ C_1{}'(x)y_1' + C_2{}'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a(x)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1{}'(x)x^3 + C_2{}'(x)x^2 = 0 \\ C_1{}'(x)3x^2 + C_2{}'(x)2x = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\omega\ (x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{vmatrix} = 2x^4 - 3x^4 = -x^4$$

$$C_1{}'(x) = \frac{1}{\omega\ (x)}\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{1}{x} & 2x \end{vmatrix} = \frac{-x}{-x^4} = \frac{1}{x^3} \Longrightarrow C_1(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

$$C_2{}'(x) = \frac{1}{\omega\ (x)}\begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{-x^4} = -\frac{1}{x^2} \Longrightarrow C_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = -\frac{1}{2x^2}x^3 + \frac{1}{x}x^2 = \frac{1}{2}x$$

S.G $y = y_h + y_p = C_1x^3 + C_2x^2 + \frac{1}{2}x$