Chapitre V : Transformation de Fourier

3 Semaines

Chapitre V: Transformation de Fourier

V.1- Introduction

Considérons dans l'intervalle de $-T/2$ à $T/2$ une fonction $f(x)$ de la variable réelle x. Dans cet intervalle supposons que la fonction $f(x)$ remplisse les conditions suivantes dites conditions de Dirichlet:

- La fonction $f(x)$ est bornée ;
- Ses points de discontinuité et ses maxima et minima sont en nombre limité.

(Par exemple la fonction $1/x$ et $\sin 1/x$ ne remplissent respectivement pas les conditions 1 et 2 pour un intervalle comprenant la valeur $x = 0$.

Il est alors possible de représenter dans cet intervalle la fonction par une série de la forme

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Dans laquelle a_0, a_n et b_n sont des coefficients indépendants de x. Cette série s'appelle le développement en série de Fourier de la fonction.

Exemple n≗ V.01

Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \cos^3 x$$

Solution

Il suffit d'écrire

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\,\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

Pour obtenir :

$$f(x) = S_f(x) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

On a donc

$$a_1 = \frac{3}{4} \quad et \quad a_3 = \frac{1}{4}$$

Et tous les autres coefficients de Fourier sont nuls.

V.2- Calcul des coefficients

Nous allons nous appuyer sur les propositions suivantes :

01) $$\int_{-T/2}^{T/2} \sin nx \times \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T/2 & n = m \end{cases}$$

02) $$\int_{-T/2}^{T/2} \cos nx \times \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T/2 & n = m \end{cases}$$

03) $$\int_{-T/2}^{T/2} \sin nx \times \cos mx \, dx = 0$$

En effet, on a

$$\sin nx \times \sin mx = \frac{1}{2}\cos(n-m)x - \frac{1}{2}\cos(n+m)x$$

La première intégrale égale à :

$$\int_{T/2}^{T/2} \sin nx \times \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-T}^{T} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_{-T}^{T}$$

Est manifestement nul si m≠ n.

Si m = n, nous avons :

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} dx - \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos 2nx \, dx = \frac{T}{2}$$

En ce qui concerne les formules (2) et (3) elles seront aisément établies par un calcul élémentaire analogue au précédent.

Multiplions les deux membres de la série de Fourier par $\sin mx$ et intégrons de $-T/2$ à $T/2$; il vient :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \times \sin mx \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sin mx \times \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) \ + b_n \sin(nx)\right] dx$$

Toutes les intégrales du second membre sont nulles d'après les formules (1), (2) et (3), sauf

$$\int_{-T/2}^{T/2} b_m \sin mx \times \sin mx \, dx = b_m \, T/2$$

Donc

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \times \sin nx \, dx$$

Un calcul analogue donne :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \times \cos nx \, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

V.2.2- Ecriture complexe

On a

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) \ + b_n \sin(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}$$

$$S_f(x) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$$

Avec

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx \\ c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \times e^{-inx} dx \end{cases}$$

Exemple n≗ V.02

Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \cos^2 x$$

Solution

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \quad d'où \quad a_0 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$$

Méthode générale

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\times\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\times\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos nx + \cos 2x\cos nx]\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(n+2)x + \cos(n-2)\,x]\, dx$$

Pour n≠2

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx + \frac{1}{2(n+2)}\sin(n+2)x + \frac{1}{2(n-2)}\sin(n-2)\,x\right]_0^{2\pi} = 0$$

Pour n=2

$$a_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\times\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\times\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos nx + \cos 2x\sin nx]\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\sin(n+2)x + \sin(n-2)\,x]\, dx$$

Pour n≠2

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx - \frac{1}{2(n+2)}\cos(n+2)x - \frac{1}{2(n-2)}\cos(n-2)\,x\right]_0^{2\pi} = 0$$

Pour n=2

$$b_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right]_0^{2\pi} = 0$$

V.3- Série de Fourier des fonctions paires et impaires

ⓘ Paire $f(-x) = f(x)$; Impaire $f(-x) = -f(x)$

- Si la fonction f est paire, on a :

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\times\cos nx\, dx \qquad b_n = 0$$

- Si la fonction f est impaire, on a :

$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\times\sin nx\, dx$$

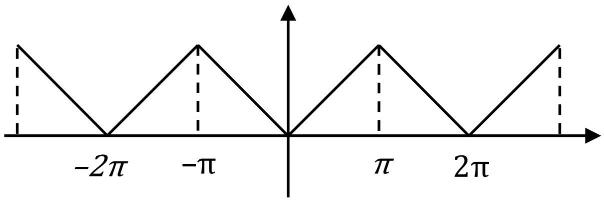
Exemple n≗ V.03

Soit f la fonction périodique sur R telle que $f(x) = |x|, si\ x \in [-\pi, +\pi]$, et prolongée à R par périodicité ; Déterminer la série de Fourier de f (La fonction dent de scie)

Solution

$$f = \begin{cases} -x & -\pi \le x \le 0 \\ +x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

f est une fonction paire.



Analyse complexe

Pour n=0

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|x|dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{+\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Et pour n≠0

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\times e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inx}|x|dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -xe^{-inx}dx + \int_{0}^{+\pi} xe^{-inx}dx\right)$$

$$\int xe^{-inx}dx$$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v' = e^{-inx} \qquad v = \frac{-1}{in}e^{-inx}$$

$$= \frac{-x}{in}e^{-inx} + \int \frac{1}{in}e^{-inx}dx = \frac{-x}{in}e^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{in}e^{-inx} - \frac{1}{n^2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-x}{in}e^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2i}\right) + \frac{1}{\pi.n^2}\left(\frac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2}\right) - \frac{1}{\pi n^2}$$

$$= \frac{1}{n}\sin n\pi + \frac{1}{\pi.n^2}\cos n\pi - \frac{1}{\pi n^2}$$

$$c_n = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi.n^2}$$

$$S_f(x) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{\pi.n^2}e^{inx} + \frac{\cos n\pi - 1}{\pi.n^2}e^{-inx}$$

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{\pi.n^2}\left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) - \frac{2}{\pi.n^2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cos n\pi}{\pi.n^2}\cos nx - \frac{2}{\pi.n^2}.\cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi.n^2}.(\cos n\pi - 1)\cos nx$$

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi.n^2}.(\cos n\pi - 1)\times \cos nx$$

Analyse trigonométrique

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{+\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \times \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \times \cos nx \, dx$$

$$\int x.\cos nx \, dx$$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v' = \cos nx \qquad v = \frac{1}{\mathrm{n}}\sin nx$$

$$= \frac{x}{n}\sin nx - \int \frac{1}{n}\sin nx \, dx = \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi.n^2}\big((\cos n\pi) - 1\big) = \frac{2}{\pi.n^2}((-1)^n - 1)$$

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi.n^2}(\cos n\pi - 1) \times \cos nx$$

Simplification :

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2p, \qquad paire \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & n = 2p+1, \qquad impaire \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier est :

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)x\big)$$

V.4- Théorème fondamental

V.4.1- Théorème de Dirichlet

Théorème 1

Si la fonction f définie sur le segment $[0;2\pi]$, satisfait sur ce segment aux conditions de Dirichlet, alors la série de Fourier de cette fonction converge sur tout segment $[0,2\pi]$ et la somme de cette série est :

01) $f(x)$ En tout point de continuité de f située à l'intérieur du segment,

02) $\frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}$ En tout point de discontinuité,

03) $\frac{f(0^+)-f(2\pi^-)}{2}$ Aux extrémités du segment, où $f(0^+)$ est la limite à droite au point $x = 0$, $f(2\pi^-)$ est la limite à gauche au point $x = 2\pi$.

Exemple n≗ V.04

01) Déterminer la série de Fourier associée à la fonction périodique (T = 2π) définie par :

$$f(x) = x \quad pour \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

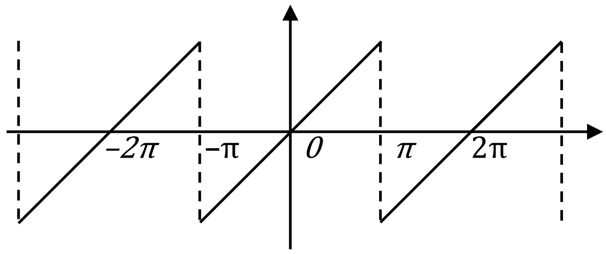
02) La série de Fourier associée à f converge-t-elle vers f ?

Solution

01) La série de Fourier

Cette fonction est monotone par morceaux et bornée.

f est impaire



La série de Fourier associée à f

$$S_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times \sin nx$$

Avec

$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^T f(x) \times \sin nx \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin nx \, dx$$

$$\int x.\sin nx \, dx$$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v' = \sin nx \qquad v = -\frac{1}{\mathrm{n}}\cos nx$$

$$= -\frac{x}{n}\cos nx + \int \frac{1}{n}\cos nx \, dx = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

D'où la série de Fourier associée à f est donnée par :

$$S_f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times \sin nx$$

02) Convergence

Vérification des conditions de Dirichlet :

- La fonction f est continue sur $]-\pi,\pi[$ et elle n'est pas continue en $-\pi$ et en π avec

$$\lim_{n\to-\pi} f(x) = -\pi \;\; et \quad \lim_{n\to+\pi} f(x) = +\pi$$

(Nombre fini de points de discontinuité);

- La fonction f est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et elle n'est pas dérivable en $-\pi$ et en π, car f n'est pas continue en ces points (nombre fini de points de non dérivabilité).

Ainsi, les conditions de Dirichlet sont vérifiées et donc;

$$f(x) = S_f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times \sin nx \quad pour\ x \in]-\pi,\pi[$$

Cette égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite,

C'est-à-dire

$$\frac{\lim_{n\to-\pi} f(x) + \lim_{n\to+\pi} f(x)}{2} = 0$$

V.4.2- Égalité de Parseval

Théorème 1

Si f est une fonction réelle périodique de période T telle que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \ + b_n \sin(nx)$$

Alors

$$\frac{1}{T}\int_{-\mathrm{T}/2}^{T/2} f(x)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

dite égalité de Parseval.

En utilisant la forme complexe des séries de Fourier, on montre que l'égalité de Parseval s'écrit aussi :

$$\frac{1}{T}\int_{-\mathrm{T}/2}^{T/2} f(x)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$