Partie : Travaux dirigés & Travaux pratiques

Exercices et TP du chapitre I

Exercice 1 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1- La fonction *f* est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

2- Déterminer les points critiques de *f*, et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre alors le problème (P)

Solution :

1- Pour étudier la convexité de *f* (qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$), calculons sa matrice hessienne en tout point (*x*, *y*) de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\nabla f((x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4(x-y) \\ 4y^3 + 4(x-y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x^3 - x + y \\ y^3 + x - y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Hf(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons que *f* est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si sa matrice hessienne est semi-définie positive en tout point.

On calcule $Hf(0,0)$

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ et le $det(H(x,y))$ =0 donc *f* n'est pas semi-définie positive et par conséquent, f n'est pas convexe.

2- Les points critiques de *f* sont donnés par les solutions de $\nabla(x,y) = (0,0)$, autrement dit, les points critiques sont solutions du système :

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

On en déduit que f admet trois points critiques : $O(0,0)$, $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

La fonction *f* étant de classe C^2, on va utiliser la caractérisation des points critiques à l'aide de la hessienne calculée à la question précédente

- Point *A* : $H(f(A)) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ donc le $det[H(f(A))] = 384 > 0$, et la trace de $H(f(A))\ vaut\ 40 > 0$ et par conséquent le point critique ***A*** est un **minimum local** pour *f*.
- Point *B* : $H(f(B)) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ donc le $det[H(f(B))] = 384 > 0$, et la trace de $(Hf(B))\ vaut\ 40 > 0$ et par conséquent le point critique ***B*** est un **minimum local** pour *f*.
- Point *O* : $Hf(O) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ et le $det(H(O))$ =0 et la trace de $H(\ f(A))\ vaut\ -8 < 0$ On ne peut donc rien conclure dans ce cas à l'aide de la matrice hessienne.

En conclusion, puisque le problème (P) possède une solution, la caractérisation des points critiques de *f* nous assure que

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x(x,y) = \{f(A) = f(B) = -8\}$$

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f_\alpha(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha xy - 2x - 2y$

a- Pour quelles valeurs de a, la fonction f_α est-elle convexe ? Et strictement convexe ?
b- Discuter en fonction des valeurs du paramètre α de l'existence de solutions au problème d'optimisation $inf\ \{f_\alpha(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
c- Lorsque $\alpha \in]-2,2[$, résoudre le problème précédent.

Solution :

a- La fonction f_α est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale. Pour étudier la convexité de *f*, calculons sa hessienne : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$. Cette matrice ne dépend pas de *x* et *y*. Etant symétrique réelle, elle est diagonalisable et on note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres. On a $det\left[H\left(f_\alpha(x,y)\right)\right] = \lambda_1\lambda_2 = 4 - \alpha^2$ et la $\left(Hf_\alpha(x,y)\right) = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 > 0$, donc f_α n'est jamais concave, en effet la fonction f_α est convexe si, et seulement si $\alpha \in [-2,2]$, strictement convexe si, et seulement si $\alpha \in]-2,2[$ et n'est ni convexe, ni concave sinon.

b- Souvenons la fonction quadratique :
- si $\alpha \in [-2,2]$, la $H(f_\alpha(x,y))$ est constante et appartient à $\mathbb{R}$. Par conséquent, f_α est strictement convexe et coécrive sur $\mathbb{R}^2$ qui est fermé et de dimension finie. Par conséquent, le problème $inf_{\mathbb{R}^2}(f_\alpha)$ a une unique solution.
- si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$, la matrice $H(f_\alpha(x,y))$ a une valeur propre strictement négative μ, et il existe une direction $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ (vecteur propre associé à μ) dans laquelle $f(t\vec{e}) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$. Par conséquent, le problème $inf_{\mathbb{R}^2}(f_\alpha)$ n'a pas de solution.
- Cas $\alpha \in \{-2,2\}$. Dans ce cas, la matrice $H(f_\alpha(x,y))$ est semi-définie positive, mais pas définie positive. Le problème $inf_{\mathbb{R}^2}(f_\alpha)$ a une solution si, et seulement si $(2,2)^{\,T} ImH(f_\alpha(x,y))$. Or, puisque

$\alpha = \mp 2$, $ImH(f_\alpha(x,y)) = vect\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ Par conséquent, si $\alpha = 2$, $(2,2)^{\,T} \in ImH(f_\alpha(x,y))$ et le problème $inf_{\mathbb{R}^2}(f_\alpha)$ a une infinité de solutions. si $\alpha = -2$, $(2,2)^{\,T} \notin ImH(f_\alpha(x,y))$ et le problème $inf_{\mathbb{R}^2}(f_\alpha)$ n'a pas de solutions

c- Détermination des points critiques de f_α :

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + \alpha y - 2 \\ 2y + \alpha x - 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{2+\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après l'étude précédente, dans le cas considéré, le problème $inf_{\mathbb{R}^2}(f_\alpha)$ a une unique solution qui est donc donnée par $x = y = \frac{2}{2+\alpha}$ et l'infimum vaut alors $-\frac{4}{2+\alpha}$

Exercice 3 :

Soit les fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 3 \qquad g(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

Rechercher les points critiques et déterminer leurs natures (maximum local, minimum local, col) pour les deux fonctions *f* et *g*.

Solution :

A- Détermination des points critiques de *f* et leurs natures: $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 3$

a- le gradient de f : $\nabla f(x,y) = [2x+2 \quad 8y-4]^T$

1. $\nabla f(x,y) = 0 \equiv \begin{cases} 2x+2=0 \\ 8y-4=0 \end{cases}$ D'où le point critique de f est **(-1 , ½)**

b- la nature du point critique :

La matrice héssienne : $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $det\, H(x,y) = 16 >$ et $2+8=10>0$

Alors le point (-1, ½) est un **minimum local pour *f***.

B- Détermination des points critiques de g et leurs natures: $g(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$

a- le gradient de g: $\nabla g(x,y) = [2xy + y^2 - y \quad 2xy + x^2 - x]$

$\nabla f(x,y) = 0 \equiv \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ 2xy + x^2 - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y(2x+y-1) = 0 \\ x(2y+x-1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \; ou \; 2x+y-1 = 0 \\ x(2y+x-1) = 0 \end{cases}$

Si $y = 0$ alors $x(2y+x-1) = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$ donc on obtient deux points singuliers (0,0) et (1,0).

Si $2x+y-1 = 0$ alors $x = 0 \; ou \; 2y+x-1 = 0 \Rightarrow$ pour $x = 0$ alors $y = 1$ et pour $2y+x-1 = 0$ Alors $2x+y-1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$ et y=1/3 et donc on obtient deux autres ponts singuliers (0,1) et (1/3, 1/3).

La fonction g admet 4 points critiques sont : **(0,0), (1,0), (0,1)** et $\boldsymbol{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}$

b- la nature des points critiques :

La matrice héssienne : $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{bmatrix}$

- ❖ Au point critique (0,0) nous avons $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $det\, H(0,0) = -1 < 0$, alors le point critique (0,0) **est un point col ou selle.**
- ❖ Au point critique (1,0) nous avons $H(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $det\, H(1,0) = -1 < 0$, alors le point critique (1,0) **est un point col ou selle.**
- ❖ Au point critique (0,1) nous avons $H(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $det\, H(0,1) = -1 < 0$, alors le point critique (0,1) **est un point col ou selle.**

Au point critique $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nous avons $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $det\, H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} > 0$, et $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0$ alors le point critique $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ un **minimum local pour *g*.**

Exercice 4 :

Soit la fonction quadratique h: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3xz - 2yz + 5x - 4y + 2z - 8$$

1- Déterminer la matrice A, et les vecteur b et c.
2- Donner la forme quadratique de la fonction h.
3- h admet-elle des minima locaux ou globaux ?

Solution :

h: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3xz - 2yz + 5x - 4y + 2z - 8$

1- Détermination de A, b et c.

$$\nabla h(x,y,z) = [2x + 3z + 5 \quad 2y - 2z - 4 \quad 3x - 2y + 2]^T$$

$$A = Hh(x,y,z) = \nabla^2 h(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = [5 \quad -4 \quad 2]^T \quad \text{et} \quad c = -8$$

2- La forme quadratique de la fonction h :

$$h(x,y,z) = \frac{1}{2}[x \quad y \quad z]^T A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + b^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c$$

$$h(x,y,z) = \tfrac{1}{2}[x \quad y \quad z]^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [5 \quad -4 \quad 2]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 8$$

3- h admet-elle des minima locaux ou globaux ?

$$detA_1 = 2 > 0 \quad \text{et} \quad detA_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0 \quad \text{et} \quad detA_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -26 < 0$$

Donc *h* n'admet pas des minima locaux ou globaux.

Exercice 5 :
Déterminer la nature des points stationnaires de la fonction

$$f(x,y) = x^3 - 6x^2 + \frac{1}{8}y^3 - 6y$$

Solution :
Les points stationnaires sont donnés par la condition $\nabla f(x,y) = 0$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 12x \\ \frac{3}{8}y^2 - 6 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ \frac{3}{8}y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

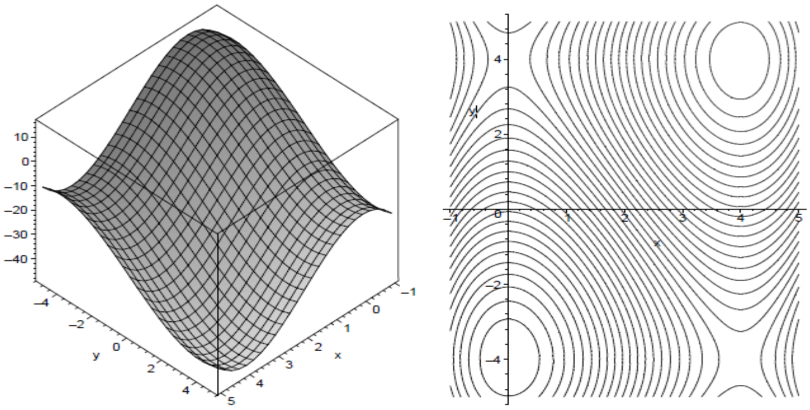
Il y a quatre points stationnaires de $f(x,y)$: $P_0 = (0,4)$, $P_1 = (0,-4)$,$P_2 = (4,4)$ et $P_3 = (4,-4)$
On a : la matrice Hessienne

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} 6x - 12 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}y \end{bmatrix}$$

Et par conséquent :

- $H(f(P_0)) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, det($H(f(P_0))) = -36 < 0$ donc f admet un point selle en $P_0 \Rightarrow f(P_0) = -16$
- $H(f(P_1)) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, det($H(f(P_0))) = 36 > 0$ et la trace $(-12 + (-3)) = -15 < 0$ donc f admet un maximum local strict en $P_1 \Rightarrow f(P_1) = 16$
- $(f(P_2)) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, det($H(f(P_2))) = 36 > 0$ et la trace $(12 + 3) = 15 > 0$ donc f admet un minimum local strict en $P_2 \Rightarrow f(P_2) = -48$
- $H(f(P_3)) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, det($H(f(P_3))) = -36 < 0$ donc f admet un point selle en

- $P_3 \Rightarrow f(P_3) = -16$



$f(x,y) = x^3 - 6x^2 + \frac{1}{8}y^3 - 6y$

Exercices et TP du chapitre II

Exercice 1

On considéré la fonction $f(x,y) = x^2 + y^4$ et (P) est le problème de minimisation sans contraintes suivant :

On suppose qu'à l'itération k on a le point $(x_0, y_0) = (1,1)$ et la direction $d_k = -\nabla f(x_0, y_0)$

$$min\{f(x,y) = x^2 + y^4, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \quad (P)$$

On note que :

$$\varphi_k(\rho_0) = f[(x_0, y_0) - \rho_0 \nabla f(x_0, y_0)]$$

Et ρ^* vérifiant :

$$\varphi(\rho^*) = min\{\varphi(\rho), \rho \in \mathbb{R}_+^*\}$$

1- Calculer

$$\varphi_k(\rho_0) = f(x_k + \rho_0 d_k), \quad \varphi_k'(\rho_0), \quad \varphi_k(0) \quad \text{et} \quad \varphi_k'(0)$$

2- Calculer

ρ_0, solution (pas) optimale globale du problème

$$min\{\varphi_k(\rho), \rho \in \mathbb{R}_+^*\} = \varphi(\rho_0)$$

3- Calculez le pas d'Armijo qu'on note ρ_{Armijo}, avec les données initiales suivantes :

$$\hat{\rho} = 1 \quad \text{et} \quad \delta = 0.9$$

4- Calculez le pas de Goldstein qu'on note ρ_{Gldstein}, avec les données initiales suivantes

$$\rho_0 = 1, \delta = 0.1, \quad a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 10^{100}$$

5- Calculez le pas de Wolfe qu'on note ρ_{Wolfe}, avec les données initiales suivantes :

$$\sigma_0 = 0.3, \ \rho_0 = 1, \delta = 0.1, \ a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 10^{99}$$

6- Calculer

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - \rho^* \nabla f(x_0, y_0) \ \text{ et } \ f(x_1, y_1)$$

7- Calculer

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - \rho_{Armijo} \nabla f(x_0, y_0) \ \text{ et } \ f(x_1, y_1)$$

8- Calculer

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - \rho_{Goldstein} \nabla f(x_0, y_0) \ \text{ et } \ f(x_1, y_1)$$

9- Calculer

$$(x_1,\ y_1) = (x_0,\ y_0) - \rho_{Wolfe}\nabla f(x_0,\ y_0) \text{ et } f(x_1,\ y_1)$$

10- Quelle conclusion peut-on tirer de cette étude ?

Solution

1- Calcul de $\varphi_k(\rho_0)$, $\varphi_k'(\rho_0)$, $\varphi_k(0)$ et $\varphi_k'(0)$

On a

$\varphi_k(\rho) = f[(x_k, y_k) + \rho d_k)]$ $f(x,y) = x^2 + y^4$

$d_k = -\nabla f(x_k, y_k) = \begin{bmatrix} -2x_k \\ -4y_k^3 \end{bmatrix}$

$(x_0,\ y_0) = (1,1) \Rightarrow d_0 = -\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\varphi_k(\rho_0) = f[(x_0,\ y_0) + \rho_0 d_0] = f\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho_0\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} 1-2\rho_0 \\ 1-4\rho_0 \end{pmatrix}$

$\varphi_k(\rho_0) = (1-2\rho_0)^2 + (1-4\rho_0)^4 = 256\rho_0^4 - 256\rho_0^3 + 100\rho_0^2 - 20\rho + 2$

$\varphi_k(\rho_0) = 256\rho_0^4 - 256\rho_0^3 + 100\rho_0^2 - 20\rho_0 + 2$

$\varphi_k(0) = 2$

$\varphi_k'(\rho_0) = 1024\rho_0^3 - 768\rho_0^2 + 200\rho_0 - 20$

$\varphi_k'(0) = \nabla f(x_0,\ y_0)^T d_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}(-2 \quad -4) = -20 < 0$

2- Calcul du pas optimal global du problème : ρ_0

$\varphi_k(\rho_0) = 0 \Leftrightarrow 256\rho_0^4 - 256\rho_0^3 + 100\rho_0^2 - 20\rho_0 + 2 = 0$

L'équation précédente admet une seule solution réelle : $\rho_0 \simeq 0.3544$

$\varphi_k''(\rho_0) = 3072\rho_0^2 - 1536\rho_0 + 200$

Alors $\varphi_k''(0.3544) \simeq 41.4764 > 0$, Donc $\rho_0 \simeq 0.3544$ est une solution minimale locale stricte. Par conséquent, $\forall\rho \in]0, +\infty[, \rho \neq 0.3544$: $\varphi_k(\rho) > \varphi_k(0.3544)$

Donc $\rho_0 \simeq 0.3544$ *est la solution optimale globale*.

3- Calculez le pas d'Armijo qu'on note ρ_{Armijo}, avec les données initiales suivantes :

$$\hat{\rho} = 1 \text{ et } \delta = 0.9$$

$f(x_0,\ y_0) = f(1,1) = 2$

$\nabla f(x_k,\ y_k) = (2x_k, 4y_k^3)$

$\|\nabla f(x_k,\ y_k)\|^2 = \|(2x_k, 4y_k^3)\|^2 = 4x_k^2 + 16y_k^6$

$\|\nabla f(x_0,\ y_0)\|^2 = \|(2x_0, 4y_0^3)\|^2 = 4x_0^2 + 16y_0^6 = 20$

On note que

$$f(x_k + \rho_k d_k) \leq f(x_k) + \rho_k \delta \nabla f(x_k)^T d_k,\ \delta \in]0,1[$$

$\theta_k(\rho_k) = f(x_k,\ y_k) + \rho_k\delta\nabla f(x_k,\ y_k)^T d_k = f(x_k,\ y_k) - \rho_k\delta\|\nabla f(x_k,\ y_k)\|^2$

$\theta_k(\rho_k) = 2 - 0.9 \times 20\rho_k = 2 - 18\rho_k$

$\varphi_k(\rho_0) = 256\rho_0^4 - 256\rho_0^3 + 100\rho_0^2 - 20\rho_0 + 2$

On démarre du point $\hat{\rho} = 1$

$\theta_k(\hat{\rho}) = \theta_k(1) = -16$

$\varphi_k(\hat{\rho}) = \varphi_k(1)$ =82

On aura $\varphi_k(\hat{\rho}) > \theta_k(\hat{\rho})$. Alors on divise $\hat{\rho}$ par 2, on prend $\hat{\rho}_0 = 0.5$, on obtient alors :

$\theta_k(\hat{\rho}_0) = \theta_k(0.5) = -7$
$\varphi_k(\hat{\rho}_0) = \varphi_k(0.5)$ =1

On aura $\varphi_k(\hat{\rho}_0) > \theta_k(\hat{\rho}_0)$. Alors on divise $\hat{\rho}$ par 2, on prend $\hat{\rho}_1 = 0.25$, on obtient alors :

$\theta_k(\hat{\rho}_1) = \theta_k(0.25) = -2.5$
$\varphi_k(\hat{\rho}_1) = \varphi_k(0.25)$ =0.25

On aura $\varphi_k(\hat{\rho}_1) > \theta_k(\hat{\rho}_1)$. Alors on divise $\hat{\rho}$ par 2, on prend $\hat{\rho}_2 = 0.125$, on obtient alors :

$\theta_k(\hat{\rho}_2) = \theta_k(0.125) = -0.25$
$\varphi_k(\hat{\rho}_2) = \varphi_k(0.125)$ =0.625

On aura $\varphi_k(\hat{\rho}_2) > \theta_k(\hat{\rho}_2)$. Alors on divise $\hat{\rho}$ par 2, on prend $\hat{\rho}_3 = 0.0625$, on obtient alors :

$\theta_k(\hat{\rho}_3) = \theta_k(0.0625) = 0.875$
$\varphi_k(\hat{\rho}_3) = \varphi_k(0.0625)$ =1.082

On aura $\varphi_k(\hat{\rho}_3) > \theta_k(\hat{\rho}_3)$. Alors on divise $\hat{\rho}$ par 2, on prend $\hat{\rho}_4 = 0.03125$, on obtient alors :

$\theta_k(\hat{\rho}_4) = \theta_k(0.03125) = 1.4375$
$\varphi_k(\hat{\rho}_4) = \varphi_k(0.03125)$ =1.4651

On aura $\varphi_k(\hat{\rho}_4) > \theta_k(\hat{\rho}_4)$. Alors on divise $\hat{\rho}$ par 2, on prend $\hat{\rho}_5 = 0.015625$, on obtient alors :

$\theta_k(\hat{\rho}_5) = \theta_k(0.015625) = 1.71825$
$\varphi_k(\hat{\rho}_5) = \varphi_k(0.015625)$ =1.711

On aura $\varphi_k(\hat{\rho}_5) < \theta_k(\hat{\rho}_5)$. Alors on arrête et on prend $\hat{\rho}_5 = 0.015625$ comme pas d'Armijo.
Conclusion :
$\hat{\rho}_{\text{Armijo}}$ = 0:015625

4- Calculez le pas de Goldstein qu'on note ρ_{Gldstein}, avec les données initiales suivantes

$$\rho_0 = 1, \delta = 0.1, \ \ a_0 = 0 \text{ et } \ b_0 = 10^{100}$$

Notons par $g(\rho)$ et $h(\rho)$ les 2 fonctions affines intervenant dans l'Algorithme de Goldstein

$g(\rho_k) \leq \varphi_k(0) + \delta\rho_k\varphi'_k(0) = 2 - 2\rho_k$
$h(\rho_k) \geq \varphi_k(0) + (1-\delta)\rho_k\varphi'_k(0) = 2 - 18\rho_k$

Etape1
On démarre avec $\rho_0 = 1$
$\varphi_k(\rho_0) = \varphi_k(1) = 82$
$g(\rho_0) = g(1) = 0$
$\varphi_k(\rho_0) > \varphi_k(0) + \delta\rho_0\varphi'_k(0) = g(\rho_0) \Rightarrow \rho_0 = 1$ ne vérifié pas Goldstein1
Poser $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = \rho_0 = 1$ et allez à Etape4

Etape2

$\varphi_k(\rho_1) = \varphi_k(0.5) = 1$

$g(\rho_1) = g(0.5) = 1$

$\varphi_k(\rho_1) = \varphi_k(0) + \delta\rho_1\varphi_k'(0) = g(\rho_1) \Rightarrow \rho_1 = 0.5$ Vérifié Goldstein1. Allez à Etape3

Etape3

$\varphi_k(\rho_1) = \varphi_k(0.5) = 1$

$\varphi_k(0) + (1-\delta)\rho_1\varphi_k'(0) = h(\rho_1) = h(0.5) = -7$

$\varphi_k(\rho_1) > \varphi_k(0) + (1-\delta)\rho_1\varphi_k'(0)$

Donc $\rho_1 = 0.5$ vérifié Goldstein2

Stop $\rho_{optim} = \rho_1 = 0.5$

Etape4

Calculer : $\rho_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.5$, Poser $k = 1$ et allez à Etape2

Conclusion

$\rho_{\text{Goldstein}} = 0.5$

5- Calculez le pas de Wolfe qu'on note ρ_{Wolfe}, avec les données initiales suivantes :

$$\sigma_0 = 0.3,\ \rho_0 = 1, \delta = 0.1,\ a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 10^{99}$$

Etape1 : Initialisation

$k(\rho_k) = \varphi_k(0) + \delta\rho_k\varphi_k'(0) = 2 - 2\rho_k$ (Fonction affine intervenant dans la condition Wolfe1)

$q(\rho_k) = \sigma\varphi_k'(0) = 0.3 \times (-20) = -6$ (Fonction constante intervenant dans la condition Wolfe2)

Etape2 : Tester Wolfe1 pour $\rho_0 = 1$

$\varphi_k(\rho_0) = \varphi_k(1) = 82$

$k(0) = \varphi_k(0) + \delta\rho_0\varphi_k'(0) = k(1) = 0$

$\varphi_k(\rho_0) > \varphi_k(0) + \delta\rho_0\varphi_k'(0) \Rightarrow$ (Wolfe1) n'est pas vérifiée ρ_0

Poser $a_1 = a_0 = 0,\ b_1 = \rho_0 = 1$

$[a_1, b_1] = [0,1]$

Allez à Etape4

Etape 4 : Calcul de ρ_1

$\rho_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.5$, Poser $k = 1$ et allez à Etape2

Etape2 (bis) tester Wolfe(1) pour $\rho_1 = 0.5$

$\varphi_k(\rho_1) = \varphi_k(0.5) = 1$

$k(0) = \varphi_k(0) + \delta\rho_1\varphi_k'(0) = k(0.5) = 1$

$\varphi_k(\rho_1) = \varphi_k(0) + \delta\rho_1\varphi_k'(0) \Rightarrow$ (Wolfe2) est vérifiée $\rho_1 = 0.5$ allez à Etape3

Etape3 : Tester Wolfe(2) pour $\rho_1 = 0.5$

Pour tester Wolfe2, on a besoin des expressions de

$\varphi_k'(\rho_0) = 1024\rho_0^3 - 768\rho_0^2 + 200\rho_0 - 20$

$\varphi_k'(\rho_1) = \varphi_k'(0.5) = 16$

$\sigma\varphi_k'(0) = -6$

$\varphi_k'(\rho_1) > \sigma\varphi_k'(0) \Rightarrow$ (Wolfe2) est vérifiée pour $\rho_1 = 0.5$

L'algorithme s'arrête

Conclusion

$\rho_{Wolfe} = 0.5$

6- Calcul de :

$$(x_1,\ y_1) = (x_0,\ y_0) - \rho^*\nabla f(x_0,\ y_0) \text{ et } f(x_1,\ y_1)$$

On a trouvé les valeurs suivantes :

$\rho_0 \simeq 0.3544$
$\hat{\rho}_{\text{Armijo}}$ = 0:015625
$\rho_{\text{Goldstein}} = 0.5$
$\rho_{Wolfe} = 0.5$

D'autre part

$-\nabla f(x,y)^T = (-2x, -4y^3) \Rightarrow\ -\nabla f(1,1)^T = (-2, -4)$

$(x_1,\ y_1) = (1,1) - 0.35(-2, -4) = (0.29, -0.41)$
$f(x_1,\ y_1) = 0.115$

7- Calcul de :

$$(x_1,\ y_1) = (x_0,\ y_0) - \rho_{Armijo}\nabla f(x_0,\ y_0)\ \text{ et }\ f(x_1,\ y_1)$$

$(x_1,\ y_1) = (1,1) - 0.015(-2, -4) = (0.96, -0.93)$
$f(x_1,\ y_1) = 1.71$

8- Calcul de :

$$(x_1,\ y_1) = (x_0,\ y_0) - \rho_{Goldstein}\nabla f(x_0,\ y_0)\ \text{ et }\ f(x_1,\ y_1)$$

$(x_1,\ y_1) = (1,1) - 0.5(-2, -4) = (0, -1)$
$f(x_1,\ y_1) = 1$

9- Calcul de :

$$(x_1,\ y_1) = (x_0,\ y_0) - \rho_{Wolfe}\nabla f(x_0,\ y_0)\ \text{ et }\ f(x_1,\ y_1)$$

$(x_1,\ y_1) = (1,1) - 0.5(-2, -4) = (0, -1)$
$f(x_1,\ y_1) = 1$

10- Conclusion :
Pour les différents pas, on calcule la descente

$$f(x_0,\ y_0) - f(x_1,\ y_1)$$

Pas	$f(x_0,\ y_0) - f(x_1,\ y_1)$	Classement
Optimal	1.8848	Meilleure décroissance
Armijo	0:288	$3^{\text{ème}}$
Goldstein	1:0	$2^{\text{ème}}$
Wolfe	1:0	$2^{\text{ème}}$

D'après ce tableau, la meilleure décroissance est obtenue par le pas optimal.

Exercice 2 :
En utilisant la méthode de recherche de la direction de descente de la plus forte pente trouver le minimum de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = \ x^2 + \ 2y^2 + 4x + 4y$$

En partant du point initial $(x_0, y_0)\ =\ (0, 0)^T$

Calculer (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3). Et quelle itération le point optimal est vérifié ?

Solution

On part du point initial $(x_0, y_0) = (0,0)^T$ $\nabla g(x,y) = (2x+4,\ 4y+4)^T$

Première itération :

On a $$\nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

D'où $$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} - \alpha_0 \nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\alpha_0\\-4\alpha_0\end{pmatrix}$$

Ainsi $$g\left[\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} - \alpha_0 \nabla f(x_0, y_0)\right] = (-4\alpha_0)^2 + 2(-4\alpha_0)^2 + 4(-4\alpha_0) + 4(-4\alpha_0)$$
$$g\left[\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} - \alpha_0 \nabla g(x_0, y_0)\right] = 48\alpha_0^2 - 32\alpha_0$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\alpha_0 = 0.333$ solution de
$$(48\alpha_0^2 - 32\alpha_0)' = 0$$

D'où
$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} - \alpha_0 \nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix}-4\alpha_0\\-4\alpha_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.333\\-1.333\end{pmatrix}$$

Deuxième itération :

On a $$\nabla g(x_1, y_1) = \begin{pmatrix}1.334\\-1.332\end{pmatrix}$$

D'où $$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - \alpha_1 \nabla g(x_1, y_1) = \begin{pmatrix}-1.333\\-1.333\end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix}1.334\\-1.332\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.333 - 1.334\alpha_1\\-1.333 + 1.332\alpha_1\end{pmatrix}$$

Ainsi $$g\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - \alpha_1 \nabla g(x_1, y_1)\right] = (-1.333 - 1.334\alpha_1)^2 + 2(-1.333 + 1.332\alpha_1)^2$$
$$+4(-1.333 + 1.332\alpha_1) + 4(-1.333 - 1.334\alpha_1) = 5.38\alpha_1^2 - 3.554\alpha_1 - 5.333$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\alpha_1 = 0.332$ solution de
$$(5.37\alpha_1^2 - 3.554\alpha_1 - 5.333)' = 0$$

D'où
$$(x_2, y_2) = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - \alpha_1 \nabla g(x_1, y_1) = \begin{pmatrix}-1.333 - 1.334\alpha_1\\-1.333 + 1.332\alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.77\\-0.89\end{pmatrix}$$

Troisième itération :

On a $$\nabla f(x_2, y_2) = \begin{pmatrix}0.46\\0.44\end{pmatrix}$$

D'où
$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} - \alpha_2 \nabla g(x_2, y_2) = \begin{pmatrix}-1.77\\-0.89\end{pmatrix} - \alpha_2 \begin{pmatrix}0.46\\0.44\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.77 - 0.46\alpha_2\\-0.89 - .44\alpha_2\end{pmatrix}$$

Ainsi $$g\left[\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} - \alpha_2 \nabla g(x_2, y_2)\right] =$$
$$= (-2.62 + 1.24\alpha_2)^2 + 2(-2.44 + 5.76\alpha_2)^2 + 4(-2.62 + 1.24\alpha_2) + 4(-2.4 + 5.76\alpha_2)$$
$$g\left[\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} - \alpha_2 \nabla f(x_2, y_2)\right] = 67.8928\alpha_2^2 - 29.4748\alpha_2 - 1.3084$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\rho_2 = 0.333$ solution de
$$(67.8928\alpha_2^2 - 29.4748\alpha_2 - 1.3084)' = 0$$

D'où
$$(x_3, y_3) = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} - \alpha_2 \nabla g(x_2, y_2) = \begin{pmatrix}-1.77 - 0.46\alpha_2\\-0.89 - 0.44\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.92\\-1.036\end{pmatrix}$$

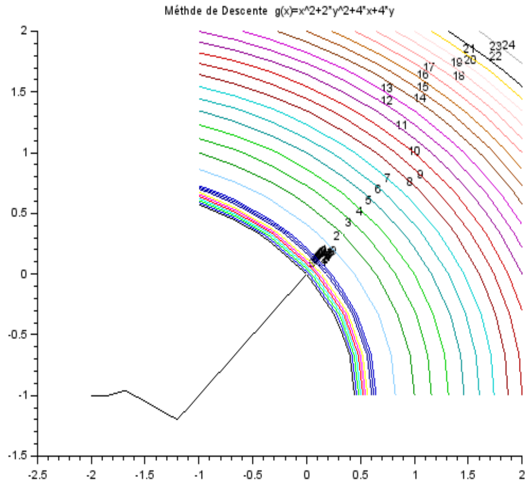
Dixième itération : point optimal est

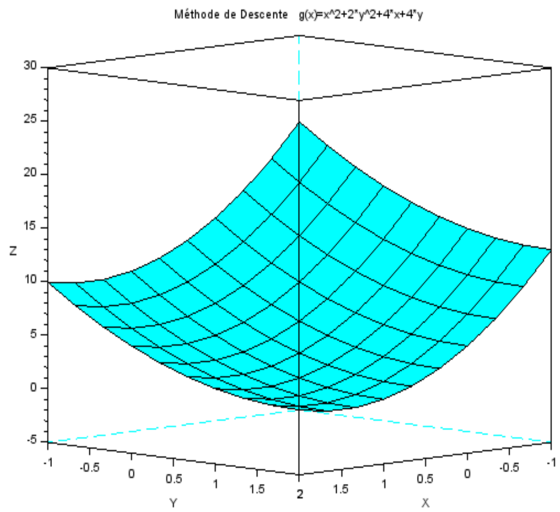
$$(x_{10}, y_{10}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Puisque
$$\nabla f(x_{10}, y_{10}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On donne le code Scilab

```
//   méthode de descente////
function z=g(X)
    x=X(1);y=X(2);
    z=x^2+2*y^2+4*x+4*y
endfunction
function Z=gradg(X)
     x=X(1);y=X(2);
     Z=[2*x+4;4*y+4];
endfunction
// parametres
alphainit=1
beta=0.1
tau=0.3
//
X0=[0;0];
Niter=evstr(x_dialog('nombre d''iterations','20'));
X=X0;
Xtot=X;
for i=1:Niter
  d=-gradg(X)
  alpha=alphainit
  while g(X+alpha*d)>g(X)+beta*alpha*(d'*gradf(X))
  alpha=tau*alpha;
  end
X=X+alpha*d;Xtot=[Xtot,X]
end
disp('valeur obtenue:');disp(X)
//////////////// tracé//////////
Nt=10;
x=linspace(-1,2,Nt);
y=linspace(-1,2,Nt);
z=zeros(Nt,Nt);
for i=1:Nt
    for j=1:Nt
       z(i,j)=f([x(i),y(j)])
    end
end
//
clf()
plot3d(x,y,z)
xset('window',1)
clf()
contour(x,y,z,[0:0.1:1,2:40])
plot2d(Xtot(1,:),Xtot(2,:))
```





Exercice 3 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 4y$$

En partant du point initial $(x_0, y_0) = (0,0)^T$ et en appliquant la méthode du gradient à pas optimal : Calculer (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3).

Solution

On connue la formule du pas optimal :

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{\|\nabla g(x_k)\|^2}{\nabla g(x_k)^T A \nabla g(x_k)}\right] \nabla g(x_k)$$

On part du point initial $(x_0, y_0) = (0, 0)^T$ $\quad \nabla g(x,y) = (2x+4,\ 4y+4)^T$

$$H(g(x,y)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Première itération :

On a $\quad \nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

D'où $\quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \alpha_0 \nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\alpha_0 \\ -4\alpha_0 \end{pmatrix}$

Ainsi

$$\alpha_0 = \frac{\|\nabla g(x_0)\|^2}{\nabla g(x_0)^T A \nabla g(x_0)} = \frac{\|4,\ \ 4\|^2}{(4,\ \ 4)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{32}{96} = 0.333$$

$$\alpha_0 = 0.333$$

D'où

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \alpha_0 \nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -4\alpha_0 \\ -4\alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.333 \\ -1.333 \end{pmatrix}$$

Deuxième itération :

On a $\quad \nabla g(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 1.334 \\ -1.332 \end{pmatrix}$

D'où $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \alpha_1 \nabla g(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} -1.333 \\ -1.333 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} 1.334 \\ -1.332 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.333 - 1.334\alpha_1 \\ -1.333 + 1.332\alpha_1 \end{pmatrix}$

Ainsi

$$\alpha_1 = \frac{\|\nabla g(x_1)\|^2}{\nabla g(x_1)^T A \nabla g(x_1)} = \frac{\|1.334,\ -1.332\|^2}{(1.334,\ -1.332)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1.334 \\ 1.332 \end{pmatrix}} = \frac{3.559}{10.656} = 0.333$$

$$\alpha_1 = 0.333$$

D'où

$$(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \alpha_1 \nabla g(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} -1.333 - 1.334\alpha_1 \\ -1.333 + 1.332\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.77 \\ -0.89 \end{pmatrix}$$

Troisième itération :

On a $\quad \nabla f(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.44 \end{pmatrix}$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \alpha_2 \nabla g(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -1.77 \\ -0.89 \end{pmatrix} - \alpha_2 \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.77 - 0.46\alpha_2 \\ -0.89 - 0.44\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\alpha_2 = \frac{\|\nabla g(x_2)\|^2}{\nabla g(x_2)^T A \nabla g(x_2)} = \frac{\|0.46,\ 0.44\|^2}{(0.46,\ 0.44)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.44 \end{pmatrix}} = \frac{0.4052}{1.1976} = 0.333$$

$$\alpha_2 = 0.333$$

D'où

$$(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \alpha_2 \nabla g(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -1.77 - 0.46\alpha_2 \\ -0.89 - 0.44\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.99 \\ -0.999 \end{pmatrix}$$

Dixième itération : point optimal est

$$(x_{10}, y_{10}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Puisque $$\nabla f(x_{10}, y_{10}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

On considère la même fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 4y$$

En partant du point initial $(x_0, y_0) = (0,0)^T$ et en appliquant la méthode du gradient conjugué : Calculer(x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3).

Solution

On connue la formule du pas optimal :

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{\|\nabla g(x_k)\|^2}{\nabla g(x_k)^T A \nabla g(x_k)}\right] \nabla g(x_k) \quad \text{et} \quad \beta_{k+1} = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T A d_k}{d_k{}^T A d_k}$$

On part du point initial $(x_0, y_0) = (0,0)^T$ $\quad \nabla g(x,y) = (2x+4,\ 4y+4)^T$

$$H(g(x,y)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1- $(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $d_0 = -\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

2- $\alpha_0 = \frac{\nabla f(x_0,y_0)^T d_0}{d_0{}^T A d_0} = \frac{\|(-4,\ -4)\|^2}{(-4,\ -4)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}} = \frac{32}{96} = 0.333$

3- $(x_1,\ y_1) = (x_0, y_0) + \alpha_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.333 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3333332 \\ -1.3333332 \end{pmatrix}$

4- $\nabla f(x_1,\ y_1) = \begin{pmatrix} 1.3333336 \\ -1.3333328 \end{pmatrix}$

5- $\beta_0 = \frac{\nabla f(x_1,y_1)^T A d_0}{d_0{}^T A d_0} = \frac{[1.334 \quad -1.332]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\left\| \begin{matrix} -4 \\ -4 \end{matrix} \right\|}{(-4,\ -4)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}} = \frac{[1.334 \quad -1.332]\left\| \begin{matrix} -8 \\ -16 \end{matrix} \right\|}{96} = \frac{10.64}{96}$

$$\beta_0 = 0.111111$$

6- $d_1 = -\nabla f(x_1,\ y_1)^T + \beta_0 d_0 = \begin{pmatrix} -1.3333336 \\ 1.3333328 \end{pmatrix} + 0.111111 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7777776 \\ 0.8888888 \end{pmatrix}$

7- $\alpha_1 = -\frac{\nabla f(x_1,y_1)^T d_1}{d_1{}^T A d_1} = \frac{\|(1.778,\ 0.888)\|^2}{(-1.778,\ 0.888)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1.778 \\ 0.888 \end{pmatrix}} = \frac{3.95}{9.48148} = 0.4166$

8- $x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{pmatrix} -1.3333332 \\ -1.3333332 \end{pmatrix} + 0.4166 \begin{pmatrix} -1.7777776 \\ 0.8888888 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Point optimal de la fonction g

Exercice 5 :

On considère la même fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 4y$$

En partant du point initial $(x_0, y_0) = (0,0)^T$ et en appliquant la méthode de Newton : Calculer (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3).

Solution

On connue la formule du pas optimal :

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$$

On part du point initial $(x_0, y_0) = (0,0)^T$ $\nabla g(x,y) = (2x+4,\ 4y+4)^T$

$$H(g(x,y)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad H^{-1}(g(x,y)) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$d_0 = -\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -H^{-1}(x_0)\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc le point $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ point optimal de la fonction *g*

On donne le code Scilabe

```
//   méthode de Newton////
function z=g(X)
   x=X(1);y=X(2);
   z=x^2+2*y^2+4*x+4*y
endfunction
function Z=gradg(X)
    x=X(1);y=X(2);
    Z=[2*x+4;4*y+4];
endfunction
function Z=hessien(X)
    x=X(1);y=X(2);
    Z=[2,0;0,4];
endfunction
epsilon=0.01
X0=[0;0];
X=X0;
Xtot=X;
   d=-inv(hessien(X))*gradg(X)
  while norm (gradg(X))>=epsilon do
    X=X+d;Xtot=[Xtot,X];
end
p=hessien(X)
q=inv(hessien(X))
disp('valeur obtenue:');disp(X)
```

*Exercice 6 :**TP1***

On considéré la fonction $f(x,y) = x^2 + y^4$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et (P) est le problème de minimisation sans contraintes suivant : On suppose qu'à l'itération k on a le point $(x_0, y_0) = (1,1)$ et la direction $d_k = -\nabla f(x_0, y_0)$ $\quad min\{f(x,y) = x^2 + y^4, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ (P) On note que:

$$\varphi_k(\rho_0) = f[(x_0, y_0) - \rho_0 \nabla f(x_0, y_0)] \quad \text{Et} \quad \rho^* \text{ vérifiant } \varphi(\rho^*) = min\{\varphi(\rho), \rho \in \mathbb{R}_+^*\}$$

1- Déterminer $\varphi_k(\rho_0) = f(x_k + \rho_0 d_k)$, $\varphi_k'(\rho_0)$, $\varphi_k(0)$ et $\varphi_k'(0)$

2- Determiner par Matlab ou Scilab :

a- ρ_0, solution (pas) optimale globale du problème $\quad min\{\varphi_k(\rho), \rho \in \mathbb{R}_+^*\} = \varphi(\rho_0)$

b- Le pas d'Armijo qu'on note ρ_{Armijo}, avec les données initiales suivantes : $(\hat{\rho} = 1$ et $\delta = 0.9)$, puis sortir le point $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - \rho^* \nabla f(x_0, y_0)$ ainsi que $f(x_1, y_1)$

c- Faire la même chose pour Goldstein qu'on note ρ_{Gldstein}, $(\rho_0 = 1, \delta = 0.1,$ $a_0 = 0$ et $b_0 = 10^{100})$

d- Faire la même chose pour Wolfe qu'on note ρ_{Wolfe}, $(\sigma_0 = 0.3,$ $\rho_0 = 1, \delta = 0.1,$ $a_0 = 0$ et $b_0 = 10^{99})$

Solution

1- $\varphi_k(\rho_0) = f(x_k + \rho_0 d_k)$, $\varphi_k'(\rho_0)$, $\varphi_k(0)$ et $\varphi_k'(0)$ sont déjà déterminées dans l'exercice 1

2- Détermination du pas de descente et la solution optimale avec le Matlab

f	*f1*	*rho ρ Pas d'Armijo*	*x Solution*
1	1		
82	0.5000	0.2500	
0.2500	0.2500	0.1250	
0.6250	0.6250	0.0625	
1.0820	1.0820	0.0313	
1.4651	1.4651	0.0156	
1.7110	1.7110	0.0156	0.9688 0.9375

Le code Matlab :

```
%% Optimisation / Pas d'Armijo
function result=Optim(mth)
time=cputime;
epsilon=10^-4;
x(1)=1.0;
x(2)=1.0;
gradient(1)=1.0;
gradient(2)=1.0;
rho=1.0;
delta=0.9;
k=0;
flag=true;
while flag
   k=k+1
   y=fun(x)
   gradient=grad(x)
   f0=y;
   f1=fun(x-rho*gradient);
```

```
  rho=1.0;
  if(f1<f0-rho*delta*(gradient*gradient'))
   while(f1<f0-rho*delta*(gradient*gradient'))
  rho=rho*2.0;
  f1=fun(x-rho*gradient);
   end
  else
     while(f1>f0-rho*delta*(gradient*gradient'))
       rho=rho/2.0
  f1=fun(x-rho*gradient)
     end
  end
  rho=rho
  x=x-rho*gradient
  if epsilon>normGradient
     flag=false;
  end
end
time=cputime-time
end
function f=fun(x)
f=x(1)^2+x(2)^4
end
```

*Exercice 7 :**TP2***

On considère la fonction *f de Rosenbrock* définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \ 10(y - x^2)^2 + \ (x - 1)^2$$

1- Montrer que $x_0 = (1, 1)^T$ est l'unique minimum local de cette fonction et qu'à ce point le Hessien est défini positif.
2- Représenter avec Scilab les lignes de niveau de *f* sur $[-1, 2] \times [-1, 2]$.
3- Adapter l'algorithme de gradient a pas fixe **GPF** écrit lors de la première séance pour construire une nouvelle fonction **GPF2** ayant pour arguments d'entrée ***f, gradf, x_0, epsilon, max iter, rho*** et les mêmes arguments de sortie, réalisant la recherche d'un minimum d'une fonction $f \in \mathbb{R}^2$.
4- Appliquer l'algorithme précédent au cas de la fonction de Rosenbrock. Que trouve-t-on pour $\boldsymbol{x_0} \in [\mathbf{1}, \mathbf{0}]$, $\boldsymbol{epsilon}\ \mathbf{1E-4}$ et ***rho*** égal respectivement à **0.01, 0.02** et *0.03*?
5- Ecrire avec Scilab un algorithme de Newton pour rechercher un minimum d'une fonction

Solution

1- Montrons que f possède un unique minimum

$$\nabla f(x, y) = [-40x(y - x^2) + 2(x - 1),\ \ 20(y - x^2)]^T$$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -40y + 120x^2 + 2 & -40x \\ -40x & 20 \end{bmatrix}$$

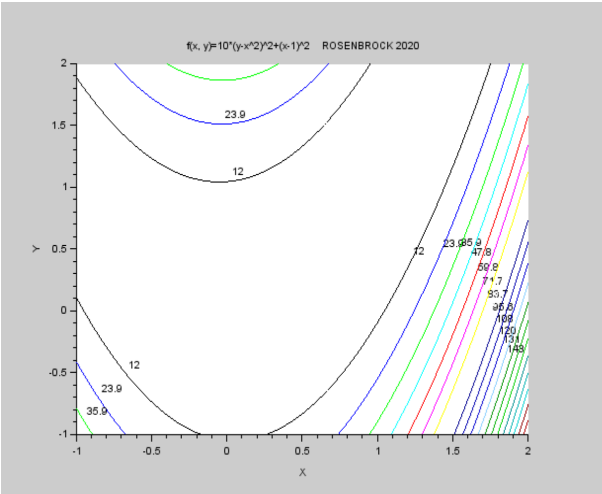
$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} -40x(y-x^2)+2(x-1)=0 \\ 20(y-x^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} -40y+120x^2+2 & -40x \\ -40x & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{bmatrix}$$

$detHf(1,1) = 40 > 0$ donc le Hessien est défini positif et la trace $82+20 = 102 > 0$ alors le point $(1,1)$ est un minimum local pour la fonction de Rosenbrock f.

$$f(1,1) = 0$$

2- Représentation avec Scilab les lignes de niveau de f sur $[-1,2] \times [-1,2]$.

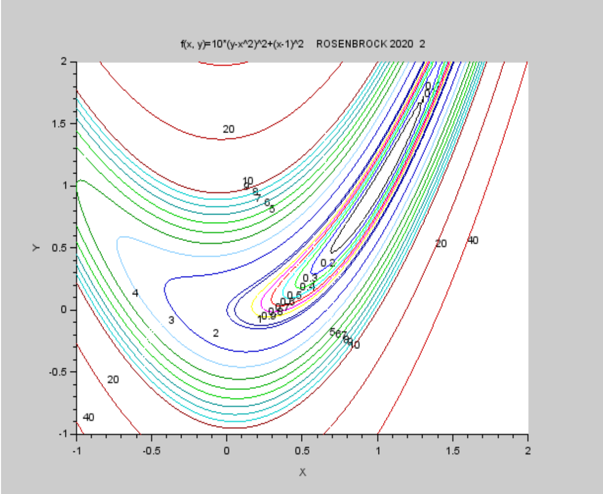


Code SCilab

```
// Fonction de Rosenbrock 1iér cas sur [-1,2] × [-1,2]
function Z=f(X)
   x=X(1);y=X(2);
  Z=10*(y-x^2)^2+(x-1)^2
endfunction
function Z=gradf(X)
    x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*x*(y-x^2)+2*(x-1);20*(y-x^2)]
endfunction
function z=Hesf(X)
   x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*y+120*x^2+2,-40*x;-40*x,20]
endfunction
X1=linspace(-1,2,100)
X2=linspace(-1,2,100)
z=zeros(100,100)
for i=1:100
   for j=1:100
      z(i,j)=f([X1(i),X2(j)])
      end
end
figure(1)
clf ()
contour(X1,X2,z,20)
```

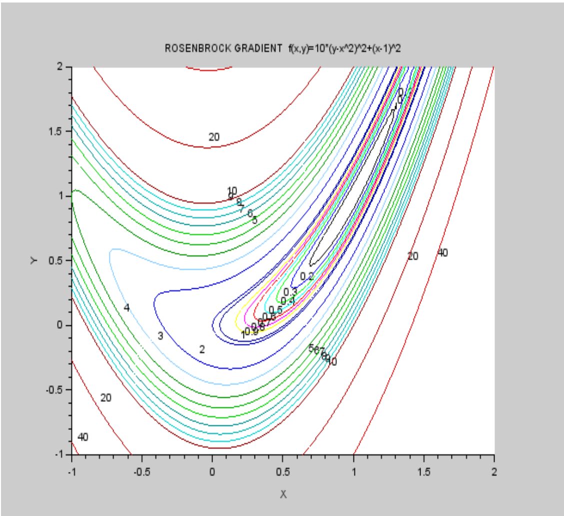
Code SCilab

```
// Fonction de Rosenbrock 2ime cas sur [-1,2] × [-1,2]
function Z=f(X)
   x=X(1);y=X(2);
  Z=10*(y-x^2)^2+(x-1)^2
endfunction
function Z=gradf(X)
    x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*x*(y-x^2)+2*(x-1);20*(y-x^2)]
endfunction
function z=Hesf(X)
   x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*y+120*x^2+2,-40*x;-40*x,20]
endfunction
X1=linspace(-1,2,100)
```




```
X2=linspace(-1,2,100)
z=zeros(100,100)
for i=1:100
   for j=1:100
      z(i,j)=f([X1(i),X2(j)])
      end
end
figure(1)
clf ()
contour(X1,X2,z,[0:0.1:1,1:10,20,40])
contour(x1,x2,z,)
```

3- Algorithme de gradient a pas fixe GPF



Valeur approchée du minimum du (Gradient)

0.9998886
0.9997727

Nombre itérations (Gradient)

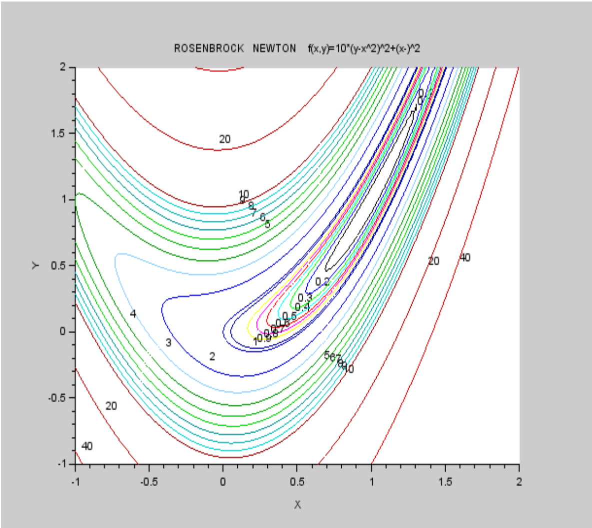
1951.

__Code SCilab__

```
//Fonction de Rosenbrock Gradient
function Z=f(X)
   x=X(1);y=X(2);
  Z=10*(y-x^2)^2+(x-1)^2
endfunction
function Z=gradf(X)
   x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*x*(y-x^2)+2*(x-1);20*(y-x^2)]
endfunction
function z=Hf(X)
   x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*y+120*x^2+2,-40*x;-40*x,20]
   endfunction
x1=linspace(-1,2,100)
x2=linspace(-1,2,100)
z=zeros(100,100)
for i=1:100
   for j=1:100
      z(i,j)=f([x1(i),x2(j)])
   end
end
figure(1)
clf ()
contour(x1,x2,z,[0:0.1:1,1:10,20,40])
function [X, k, residu]=GPF2(f, gradf, X0, epsilon,
kmax, rho)
   X=X0;
   k=0;
   residu=norm(gradf(X))
   while (k<kmax)&(residu>epsilon)
      X=X-rho*gradf(X)
      k=k+1
      residu=norm(gradf(X))
   end
endfunction
X0=[1;0]
epsilon=1E-4
kmax=20000
rho=0.01;
```

```
[X,k,residu]=GPF2(f,gradf,X0,epsilon,kmax,rho)
disp('Valeur approchée du minimum du
(Gradient)');disp(X)
disp('Nombre iterations (Gradient)');disp(k)
```

4- Algorithme de Newton



Valeur approchée du minimum du (Newton)

1.
1.

Nombre itérations (Newton)

6.

Valeur approchée du minimum du (Newton)

0.9999991
0.9999981

Nombre itérations (Newton)

4.

Code SCilab

```
//Fonction de Rosenbrock Newton
function Z=f(X)
   x=X(1);y=X(2);
  Z=10*(y-x^2)^2+(x-1)^2
endfunction
function Z=gradf(X)
    x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*x*(y-x(1)^2)+2*(x-1);20*(y-x^2)]
endfunction
function z=H(X)
   x=X(1);y=X(2);
   Z=[-40*y+120*x^2+2,-40*x;-40*x,20]
endfunction
x1=linspace(-1,2,100)
x2=linspace(-1,2,100)
z=zeros(100,100)
for i=1:100
   for j=1:100
      z(i,j)=f([x1(i),x2(j)])
   end
end
figure(1)
clf ()
contour(x1,x2,z,[0:0.1:1,1:10,20,40])
function [X, k, residu]=Newton(j, gradj, Hj, X0,
epsilon, kmax)
   X=X0;
   k=0;
   residu=norm(gradj(X))
   while (k<kmax)&(residu>epsilon)
      X=X-inv(Hj(X))*gradj(X)
      k=k+1
      residu=norm(gradj(X))
   end
endfunction
X0=[1;0]
epsilon=1E-4
kmax=20000
[X,k,residu]=Newton(f,gradf,Hf,X0,epsilon,kmax)
disp('Valeur approchée du minimum du
(Newton)');disp(X)
disp('Nombre iterations (Newton)');disp(k)
```

*Exercice 8 :**TP3***

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x - y + 3z$$

On veut tester qutre méthodes d'optimisation sous Matlab pour déterminer le minimum de cette fonction qui se coïncide avec le point $(x, y, z) = (0.25,\ -1.75,\ 2.25)$ en lequel la fonction vaut -4.375. Les méthodes sont les suivantes : la méthode de gradient à pas fixe, la méthode de gradient à pas optimal, la méthode de gradient conjugué et la méthode de Newton.

Solution

On donne les codes matlab des quatre méthodes dans le tableau ci-dessous :

<table>
<tr>
<td><pre>%% Méthode du gradient a pas fixe 2020
%%
A=[2 1 1;1 2 1;1 1 2]; % matrice A
b=[1;-1;3]; % vecteur b
% Initialisation
N=25; % Nbre itérations
x=[1;2;3]; % point x0
rho=0.4 % pas de descente
% Implémentation
for i=1:N
d=A*x-b % dk
if d==0
break;
end
x=x-rho*d % xk+1
end
umin=x % minimum de f
fmin=1/2*x'*A*x-b'*x % valeur min de f
grad=A*x-b % gradient de f au min</pre></td>
<td><pre>%% Méthode du gradient a pas optimal
%%
A=[2 1 1;1 2 1;1 1 2]; % matrice A
b=[1;-1;3]; % vecteur b
% Initialisation
N=10; % Nbre itérations
x=[1;2;3]; % point initial x0
% Implémentation
for i=1:N
d=A*x-b; % dk
if d==0
break;
end
rho=(d'*d)/(d'*A*d); % rhok
x=x-rho*d; % xk+1
end
umin=x % minimum de f
fmin=1/2*x'*A*x-b'*x % valeur min de f
grad=A*x-b % gradient de f au min</pre></td>
</tr>
<tr>
<td><pre>%% Méthode du gradient conjugue %%
A=[2 1 1;1 2 1;1 1 2]; % matrice A
b=[1;-1;3]; % vecteur b
% étape 1
x=[1;2;3]; % point initial x0
N=3; % Nbre iterations
d=A*x-b; % d0
rho=(d'*d)/(d'*A*d); % rho0
y=x; % x0
x=x-rho*d; % x1
% étape k > 1
for i=1:N
Gradx=A*x-b; Grady=A*y-b;
d=Gradx+(Gradx'*Gradx)/(Grady'*Grady)*d;
if d==0
break;
end
rho=((A*x-b)'*d)/(d'*A*d);
y=x;
x=x-rho*d; % xk+1
end
umin=x % minimum de f
fmin=1/2*x'*A*x-b'*x % valeur min de f
grad=A*x-b % gradient de f au min</pre></td>
<td><pre>%% Méthode de Newton %%
A=[2 1 1;1 2 1;1 1 2] % matrice A
b=[1;-1;3] % vecteur b
H=inv(A)
% Initialisation
N=10; % Nbre iterations
x=[1;2;3]; % point initial x0
% Implementation
for i=1:N
d=A*x-b; % dk
if d==0
break;
end
x=x-H*d; % xk+1
end
umin=x % minimum de f
fmin=1/2*x'*A*x-b'*x % valeur min de f
grad=A*x-b % gradient de f au min</pre></td>
</tr>
</table>

Le tableau suivant récapitule les résultats de la de comparaison de quatre méthodes d'optimisation

Itération	Gradient à pas fixe	Gradient à pas optimal	Gradient conjugué	Newton
Point initial	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix}-1.4000\\-1.6000\\0.6000\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.5455\\-0.3182\\1.4545\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2500\\-1.7500\\2.2500\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2500\\-1.7500\\2.2500\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}0.5200\\-0.4000\\2.5200\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.3086\\-1.4569\\2.3086\end{pmatrix}$		
5	$\begin{pmatrix}0.0362\\-1.7306\\2.0362\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2546\\-1.7271\\2.2546\end{pmatrix}$		
6	$\begin{pmatrix}0.2850\\-1.5750\\2.2850\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2504\\-1.7482\\2.2504\end{pmatrix}$		
8	$\begin{pmatrix}0.2626\\-1.6870\\2.2626\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2500\\-1.7499\\2.2500\end{pmatrix}$		
10	$\begin{pmatrix}0.2545\\-1.7273\\2.2545\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2500\\-1.7500\\2.2500\end{pmatrix}$		
13	$\begin{pmatrix}0.2464\\-1.7497\\2.2464\end{pmatrix}$			
15	$\begin{pmatrix}0.2487\\-1.7499\\2.2487\end{pmatrix}$			
18	$\begin{pmatrix}0.2501\\-1.7496\\2.2501\end{pmatrix}$			
20	$\begin{pmatrix}0.2500\\-1.7499\\2.2500\end{pmatrix}$			
22	$\begin{pmatrix}0.2500\\-1.7500\\2.2500\end{pmatrix}$			

Exercices et TP du chapitre III

Exercice 1

On veut minimiser la fonction suivante par la méthode de pénalité

$$\begin{cases} min\, f(x,y) = x^2 + 2y^2 \\ \quad sujet \text{ à} \\ \varphi(x,y) = x + y - \alpha = 0 \end{cases}$$

Solution

Le lagrangien de la fonction à optimiser est :

$$\mathcal{L}(x,y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - \alpha)$$

$\mathcal{L}$ est convexe en(x,y). Donc le minimum de la fonction *f* atteint lorsque

$$\nabla\mathcal{L}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 4y + \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2x \\ \lambda = -4y \end{cases} \iff x = 2y$$

$$x + y - \alpha = 0 \Leftrightarrow 3y = \alpha \Leftrightarrow y = \frac{\alpha}{3} \;\; \& \;\; x = \frac{2\alpha}{3}$$

Donc le point $\left(\frac{2\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}\right)$ est solution pour la fonction *f*

Exercice 2

Soit à minimiser la fonction suivante

$$\begin{cases} min(x-1)^2 + (y-1)^2 \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solution

Seule la première contrainte est critique. On néglige donc la seconde.
On sait que

$(\mathcal{P}) \begin{cases} minf(x) \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{P}_\varepsilon) \begin{cases} minf(x) + \frac{1}{\varepsilon}\alpha(x) \\ x \in R^n \end{cases}$

$$\alpha(x_k, \mu_k) = f(x_k) + + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i=1}^{m} g_i^2\,(x_k)$$

Avec $\mu > 0$

$$\alpha(x, y, \mu) = (x-1)^2 + +(y-1)^2 + \frac{1}{2\mu}(min[0, -x - y + 1])^2$$

Si on traite la première contrainte comme une contrainte d'égalité, nous avons

$$\alpha(x, y, \mu) = (x-1)^2 + +(y-1)^2 + \frac{1}{2\mu}(x + y - 1)^2$$

Les conditions de *KKT*

$$\nabla\alpha(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} 2(x-1) + \frac{1}{\mu}(x + y - 1) \\ 2(y-1) + \frac{1}{\mu}(x + y - 1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla\alpha(x, y, \mu) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) + \frac{1}{\mu}(x + y - 1) = 0 \\ 2(y-1) + \frac{1}{\mu}(x + y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \;\; x(\mu) = y(\mu) = \frac{2\mu + 1}{2\mu + 2}$$

On va tendre μ_k vers zéro, pour pénaliser les violations des contraintes
1°- Si $\mu = 1$ alors $x_0 = y_0 = \frac{3}{4}$, donc, le minimum de la fonction est de $\frac{1}{8}$ et $\nabla f(x_0, y_0) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $g(x_0, y_0) = \frac{1}{2} > 0$. Est par conséquent, ce cas ne porte pas une solution optimale pour la fonction *f*.

2°- Si $\mu = \frac{1}{100}$ alors $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$, donc, le minimum de la fonction est de $\frac{1}{2}$ et $\nabla f(x_1, y_1) = (-1, -1)$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $g(x_1, y_1) = 0 \leq 0$, est par conséquent c'est la solution optimale de *f*.

Cas général :

$$\alpha(x_k, \mu_k) = f(x_k) + \frac{1}{2\mu_k}\sum_{i=1}^{m} g_i^2\,(x_k) + \frac{1}{2\mu_k}\sum_{j=1}^{\ell}(h_j^-(x_k))^2$$

Or $h^- = \max(-h, 0)$

$$\alpha(x, y, \mu) = (x-1)^2 + +(y-1)^2 + \frac{1}{2\mu}(x+y-1)^2 + \frac{1}{2\mu}(x)^2$$

Les conditions de *KKT*

$$\nabla\alpha(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} 2(x-1) + \frac{1}{\mu}(x+y-1) + \frac{x}{\mu} \\ 2(y-1) + \frac{1}{\mu}(x+y-1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla\alpha(x, y, \mu) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) + \frac{1}{\mu}(x+y-1) + \frac{x}{\mu} = 0 \\ 2(y-1) + \frac{1}{\mu}(x+y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(\mu) = \dfrac{2\mu(2\mu+1)}{4\mu^2+6\mu+1} \\ y(\mu) = \dfrac{(2\mu+1)^2}{4\mu^2+6\mu+1} \end{cases}$$

1°- Si $\mu = 1$ alors $x_0 = \frac{6}{11}$, $y_0 = \frac{9}{11}$, donc, le minimum de la fonction est de $\frac{29}{121}$ et $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{20}{11}, \frac{14}{11}\right)$, $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $g(x_0, y_0) = \frac{4}{11} > 0$. Est par conséquent, ce cas ne porte pas une solution optimale pour la fonction *f*.

2°- Si $\mu = 10^{-6}$ alors $x_1 \approx 2 \times 10^{-6}$, $y_1 \approx 1$, donc, le minimum de la fonction est de (≈ 1) et $\nabla f(x_1, y_1) \approx (-2, -4 \times 10^{-5})$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $g(x_1, y_1) \approx 0 \leq 0$, est par conseqent c'est la solution optimale de *f*.

Exercice 3

Soit à minimiser la fonction suivante en utilisant la méthode du gradient projeté:

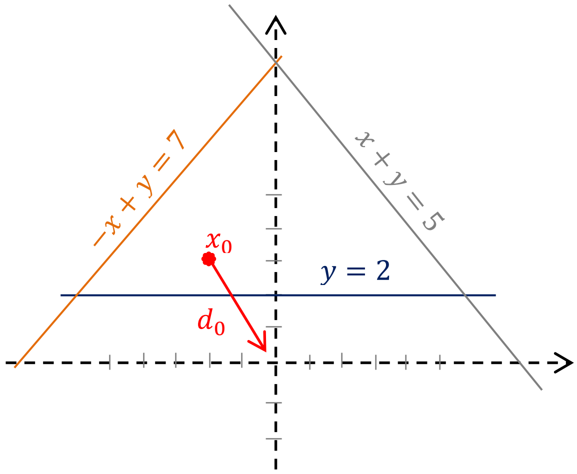
$$\begin{cases} min\, f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ -x + y - 1 \leq 7 \\ x + y \leq 5 \\ -y \leq -2 \end{cases}$$

Solution

Calcul du gradient : $(x_0, y_0) = (-2, 3)^T$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(x^2+y^2) \\ 2y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -\nabla f(x_0) = (2, -3)^T$$



On rappelle que La direction de descente est obtenue en projetant le vecteur $[-\nabla f(x_k)]$ sur le sous espace $\{x \in \mathbb{R} : a_i^T x_k = 0, i \in E_{ck}\}$ et $E_{ck} = \{i: a_i^T x_k = b_i\}$

On a: $b_i = (7,\ 5, -2)$ et $a_i^T = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array}} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$ l'ensemble des contraintes actives réalisable

Et on connait que:

La direction $\quad d_k = -\nabla f(x_k) - A_k^T v_k = -[I - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f(x_k)$

Et le vecteur des multiplicateurs associés aux contraintes actives

$$v_k = -(A_k A_k^T)^{-1} A_k \nabla f(x_k)$$

Première itération : $(x_0, y_0) = (-2, 3)^T$ Alors $E_{c0} = \emptyset$

D'où

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \rho_0 d_0 = (-2 + 2\rho_0, 3 - 3\rho_0)^T$$

La plus grande valeur du pas $\bar{\rho}_0$

Suivant à la méthode de décente réalisable on a : $a_i^T d_k < 0$ et $\rho_k \leq \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T d_k}$

$$a_3^T (x_0, y_0) = (0, -1) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -3$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^T d_0 &= -1 \times (2) + 1(-3) = -5 < 0 \\ a_2^T d_0 &= 1 \times (2) + 1(-3) = -1 < 0 \\ a_3^T d_0 &= 0 \times (2) - 1(-3) = 3 > 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \rho_0 = \frac{b_3 - a_3^T (x_0, y_0)}{a_3^T d_0} = \frac{-2+3}{3} = \frac{1}{3}$$

Par conséquent

La plus grande valeur $\bar{\rho}_0$ que peut prendre ρ_0 pour que $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$: lorsque la troisième contrainte devient active d'où

$$-y \leq -2 \Leftrightarrow -(3 - 3\rho_0) \leq -2 \Rightarrow \bar{\rho}_0 = \frac{1}{3}$$

Et par conséquent

$$(x_1, y_1) = \left[-\frac{4}{3}, 2\right]^T$$

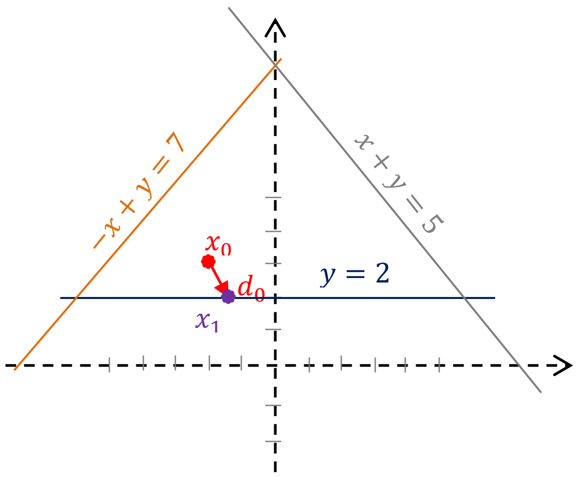
Cette solution n'est pas optimale, ainsi

D'autre part :

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{2}[(-2 + 2\rho_0)^2 + (3 - 3\rho_0)^2] = \frac{1}{2}(13\rho_0^2 - 26\rho_0 + 13)$$

$$\underset{0 \leq \rho_0 \leq \frac{1}{3}}{\text{Min}} f(x_1, y_1) = \underset{0 \leq \rho_0 \leq \frac{1}{3}}{\text{Min}} \frac{1}{2}(13\rho_0^2 - 26\rho_0 + 13)$$

$$\nabla f(\rho_0) = 26\rho_0 - 26 = 0 \Rightarrow \rho_0 = 1$$



Itération 2 : $(x_1, y_1) = \left[-\frac{4}{3}, 2\right]^T$ alors $E_{c0} = \{3\}$

La direction de descente $d_1$est obtenue en faisant la projection de $-\nabla(x_1, y_1) = -\left[-\frac{4}{3}, 2\right]^T$ sur $\{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 : a_3^T(x_{1,}y_1) = -y = 0\}$

On calcule la direction

$$d_1 = -\nabla f\big((x_{1,}y_1\big) - A_3^T v_1 = -[I - A_3^T(A_3A_3^T)^{-1}A_3]\nabla f(x_1, y_1)$$

$$d_1 = -\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\left([0 \quad -1]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)^{-1}[0 \quad -1]\right]\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = -\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(x_{1,}y_1) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix} \quad et \quad d_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

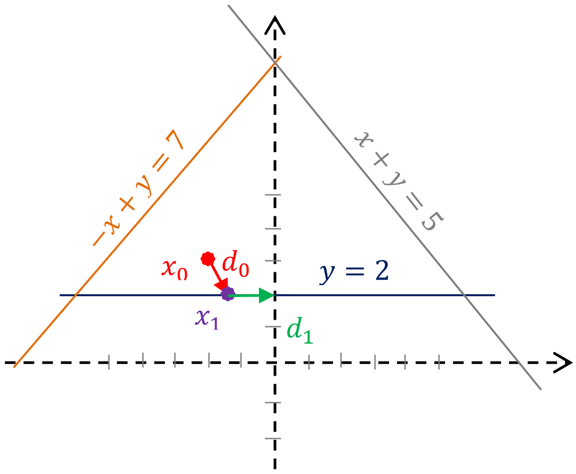
$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + \rho_1 d_1 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\rho_1, 2\right)^T$$

La plus grande valeur du pas $\bar{\rho}_1$

Suivant à la méthode de décente réalisable on a : $a_i^T d_k < 0$ et $\rho_k \leq \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T d_k}$

$$a_2^T(x_1, y_1) = (1,1)\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1^T d_1 = -1 \times \left(\frac{4}{3}\right) + 1(0) = -\frac{4}{3} < 0 \\ a_2^T d_1 = 1 \times \left(\frac{4}{3}\right) + 1(0) = \frac{4}{3} > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \rho_1 = \frac{b_2 - a_2^T(x_1, y_1)}{a_2^T d_1} = \frac{5 - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{13}{4}$$



Par conséquent

La plus grande valeur $\bar{\rho}_1$ que peut prendre ρ_1 pour que $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$: lorsque la deuxième contrainte devient active d'où

$$x + y \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\rho_1 + 2 \leq 5 \Rightarrow \bar{\rho}_0 = \frac{13}{4}$$

Cette solution n'est pas optimale, ainsi

D'autre part :

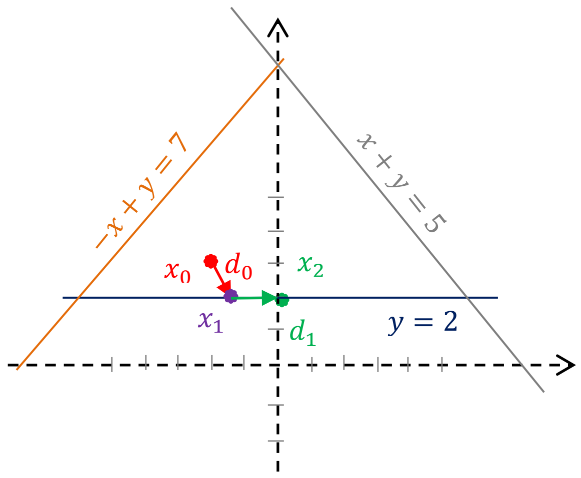
$$f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{9}(-1 + \rho_1)^2 + (2)^2\right]$$

$$\underset{0 \leq \rho_1 \leq \frac{1}{3}}{\text{Min}} f(x_1, y_1) = \underset{0 \leq \rho_1 \leq \frac{1}{3}}{\text{Min}} \frac{1}{2}\left[\frac{16}{9}(-1 + \rho_1)^2 + (2)^2\right]$$

$$\nabla f(\rho_1) = 2\rho_1 - 2 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 1$$

Et par conséquent

$$(x_2, y_2) = [0, 2]^T$$



D'autre part :
La direction de descente $d_1$est obtenue en faisant la projection de $-\nabla(x_2,y_2) = -[0,2]^T$ sur $\{(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 : a_3^T(x_{2,}y_2) = -y = 0\}$
On calcule la direction

$$d_2 = -\nabla f\big((x_{2,}y_2\big) - A_3^T v_1 = -[I - A_3^T(A_3A_3^T)^{-1}A_3]\nabla f(x_2,y_2)$$

$$d_2 = -\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\left([0 \quad -1]\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right)^{-1}[0 \quad -1]\right]\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

$$d_2 = -\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

$$d_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$(x_{2,}y_2) = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \quad et \quad d_1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$(x_2,y_2) = (x_1,y_1) + \rho_1 d_1 = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} + \rho_1\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Conclusion :

$$v_2 = -(A_3A_3^T)^{-1}A_3\nabla f(x_2,y_2)$$

$$v_2 = -\left[\left([0 \quad -1]\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right)^{-1}[0 \quad -1]\right]\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = 2$$

Donc :

Le point $(x_2,y_2) = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ satisfait les conditions KKT pour le problème puisque $d_2 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ et $v_2 = 2$

Et par conséquent :

$(x_2,y_2) = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ est la solution optimale de la fonction f

Exercice 4 *TP 4*

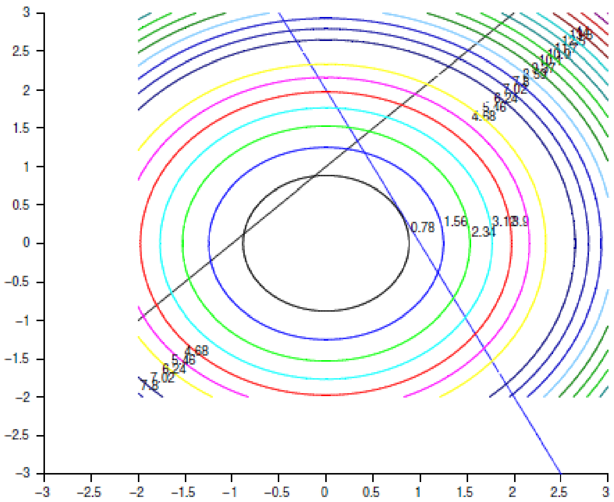
On cherche à résoudre le problème suivant

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} Min\, f(x,y) = x^2 + y^2 \\ Sous\ contraintes \\ x - y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Proposer une représentation graphique du problème et donner solution approchée à l'aide de ce dessin.
2. Prouver (de manière théorique) l'existence d'une solution au problème considère.
3. Ecrire un script Scilab mettant en œuvre la méthode d'Uzawa et de pénalisation.

Solution

1. On peut représenter la figure suivante:



Elle représente les lignes de niveau de la fonction à minimiser et le domaine sur lequel on la minimise (quart de plan à droite). Le minimum correspond à un point qui est sur la droite de pente négative pour lequel la ligne de niveau est tangente à cette droite. On peut aussi le voir comme le point réalisant la distance de (0,0) à cette droite.

2. Prouver (de manière théorique) l'existence d'une solution au problème considère.

On veut minimiser une fonction coécrive sur un ensemble fermé. Comme précédemment, on peut affirmer qu'il y a au moins un minimum global sur cet ensemble.
On remarque que f est une fonction coécrive c'est-à-dire:

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

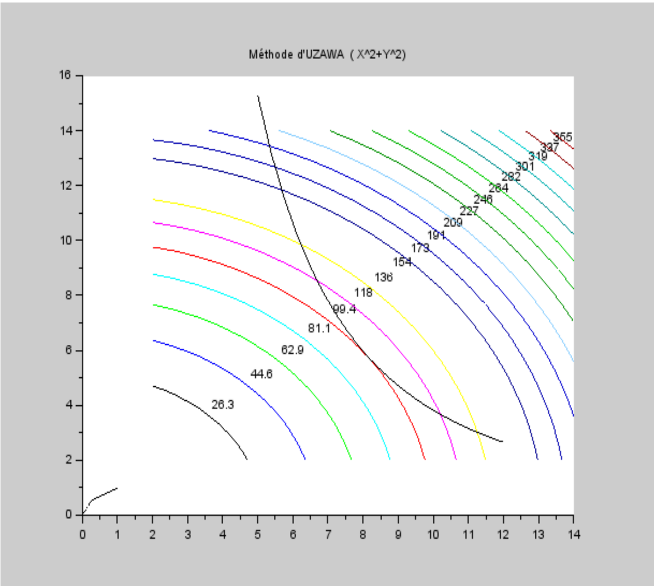
On en déduit que f possède un minimum global (cf cours). Celui-ci vérifié nécessairement $\nabla f(x,y) = 0$.
Le seul point qui convient $X^* = (x,y)$ vérifier donc

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\lambda_2) == x^2 + y^2 + \lambda_1(x - y + 1) + \lambda_2(2x + y - 2)$$

L'algorithme d'Uzawa consiste à faire évoluer un point $X_n = (x^n,\ y^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n)$ en faisant successivement un pas de gradient pour minimiser $\mathcal{L}$ en (x,y)puis un pas de gradient pour maximiser $\mathcal{L}$ en $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2$

Figure et la solution optimale	*Algorithme d'UZAWA*



Valeur exacte:

0.

0.

Valeur optimale obtenue:

0.0001077

0.0002202

```
//// Méthode d'UZAWA//////
function z=f(X)  // fonction non pénalisée
   x=X(1);y=X(2);
   z=x^2+y^2;
endfunction
function z=gradf(X)  // gradient fonction pénalisée
   x=X(1);y=X(2);
   z=[2*x;2*y];
endfunction
function z=g(X)   //contrainte g(X)>=0
   x=X(1);y=X(2);
   z=x-y+1;
endfunction
function z=gradg(X)  // gradient contrainte
        x=X(1);y=X(2);
        z=[1;-1]
endfunction
function z=g(X)   //contrainte g(X)>=0
   x=X(1);y=X(2);
   z=2*x+y-2;
endfunction
function z=gradg(X)  // gradient contrainte
        x=X(1);y=X(2);
        z=[2;1]
endfunction
function z=lagrangien(X, lamb)  // lagrangien
   z=f(X)+lamb*g(X);
endfunction
// solution exacte
x0=0;y0=0;
lambexact=gradf([x0;y0])./-gradg([x0;y0]);
X0=evstr(x_dialog('point initial','[1;1]'));
lamb0=evstr(x_dialog('lambda initial','1'));
alpha=0.001;
rho=0.1;
Niter=4000;
X=X0;
lamb=lamb0;
Xtot=[X;lamb];
for i=1:Niter
  dgrad=gradf(X)+lamb*gradg(X);
  d=-dgrad;
  X=X+alpha*d;
 lamb=max(0,lamb+rho*g(X));
 Xtot=[Xtot,[X;lamb]];
end
disp('valeur exacte:');disp([x0;y0])
disp('valeur optimale obtenue:');disp(X)
               //////////////// tracés //////////////////
Nt=20;
x=linspace(2,14,Nt);
y=linspace(2,14,Nt);
z=zeros(Nt,Nt);
```

	for i=1:Nt
	  for j=1:Nt
	    z(i,j)=f([x(i),y(j)])
	  end
	end
	figure(1)
	clf()
	contour(x,y,z,20)
	dplot=linspace(5,12,Nt);
	hplot=1200/%pi*ones(dplot)./(dplot.^2);
	plot2d(dplot,hplot)
	plot2d(Xtot(1,:),Xtot(2,:))
	plot2d(x0,y0,-1)

Exercice 5

Soit le problème d'optimisation

$$\underset{(x,y)\in\mathbb{C}}{Min}\ f(x) = +\infty$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\theta xy$$

Tel que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
On considère que l'ensemble des contraintes $\mathbb{C} = [1,2]^2$,

1- On admit que le problème ci-dessus a une solution (x^*, y^*). Monter que nécessairement, $x^* \in \{1,2\}$ ou $y^* \in \{1,2\}$.
2- Pour quelles valeurs de θ le point $(1, 1)$ est-il solution du problème ci-dessus
3- Dans le cas où $\theta = \frac{1}{2}$, on souhaite résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du gradient projeté à pas constant. On choisit comme initialisation $X_0 = (0,0)$, et le pas de la méthode de gradient est égal à 10^{-2}. On donnera en particulier l'expression de la projection sur C.

Solution :

1- On a nécessairement $\nabla \mathrm{f}(x^*, y^*) = 0$. Ainsi $\nabla f(x,y) = \begin{cases} 2x + 2\theta y \\ 2y + 2\theta x \end{cases}$, $\nabla f(x,y) = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ d'où le seul point critique de f et donc $(0,0)$, et $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2\theta \\ 2\theta & 2 \end{bmatrix}$ le $detH = 4(1 - \theta) \neq 0$ suivant l'énoncé du l'exercice puisque $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et la trace de H est $2 + 2 = 4 > 0$ et la conclusion s'ensuit.

2- Pour quelles valeurs de θ le point $(1, 1)$ est-il solution du problème.
On a $(x,y) = (1, 1)$ on aura :
$\nabla f(1,1,\theta) = \begin{cases} 2 + 2\theta \\ 2 + 2\theta \end{cases}$ $\nabla f(1,1,\theta) = 0 \Rightarrow \theta = -1$, d'après l'étude complète des variations de f sur le bord de C, on peut conclure que si $\theta \geq -1$, alors le point $(x,y) = (1, 1)$ minimise la fonction *f* sur le bord *C*.

3- Dans le cas où $\theta = \frac{1}{2}$, on souhaite résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du gradient projeté à pas constant. On choisit comme initialisation $X_0 = (0,0)$, et le pas de la méthode de gradient est égal à 10^{-2}. On donnera en particulier l'expression de la projection sur C.

D'après la question précédente, le point $(x,y) = (1, 1)$ minimise *f* sur *C*. La projection sur *C* s'écrit dans ce cas de la façon suivante :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ P_C(x,y)=\begin{pmatrix}Min\{Max\{1,x\},2\}\\ Min\{Max\{1,y\},2\}\end{pmatrix}$$

La méthode du gradient projeté s'écrit :
Algorithme gradient projeté

- Initialisation
  $X_0=(0,0),\ \rho_0 10^{-2}$ et $k=0$
- Itération k. Le point X_k est connu

$$X_{k+1}=\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix}=P_C\begin{pmatrix}x_k-2\rho(x_k+y_k)\\ y_k-2\rho(x_k+y_k)\end{pmatrix}=P_C\begin{pmatrix}x_k(1-2\rho)-2\rho y_k\\ y_k(1-2\rho)-2\rho x_k\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=P_C\begin{pmatrix}x_0-2\rho(x_0+y_0)\\ y_0-2\rho(x_0+y_0)\end{pmatrix}=P_C\begin{pmatrix}x_0(1-2\rho)-2\rho y_0\\ y_0(1-2\rho)-2\rho x_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\rho\\ \frac{1}{2}-\rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=P_C\begin{pmatrix}x_1-2\rho(x_1+y_1)\\ y_1-2\rho(x_1+y_1)\end{pmatrix}=P_C\begin{pmatrix}x_1(1-2\rho)-2\rho y_1\\ y_1(1-2\rho)-2\rho x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4\rho\\ 1-4\rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Exercice 6

On veut résoudre par la méthode de gradient à pas fixe et à pas optimal le problème suivant :

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2$$

1- Déterminer la direction de plus forte descente d_k
2- Déterminer le pas optimal ρ_k solution du problème à une dimension
3- Donner le comportement qui illustre les cas possible à partir du point initial $X_0=(7,1.5)$.
4- On veut résoudre par une méthode de gradient projeté le problème suivant :

$$(\mathcal{P})\ \begin{cases}\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2\\ s.c\ \ -x+y=1\end{cases}$$

On donne $X_0=(4,5.5)$

Solution :

- Direction de plus forte descente : Soit $X_k=(x_k,y_k)$ l'itéré courant tel que : $\nabla f(X_k)\neq 0$. on calcul par la méthode de plus profonde descente, l'itéré suivant :

$$d_k=-\nabla f(X_k)=\begin{pmatrix}-x_k\\ -7y_k\end{pmatrix}$$

- Calcul du pas optimal ρ_k solution, si elle existe, du problème à une dimension :

$$X_k+\rho_k d_k=\begin{pmatrix}x_k-\rho_k x_k\\ y_k-7\rho_k y_k\end{pmatrix}$$

$$f(X_k+\rho_k d_k)=\frac{1}{2}(x_k-\rho_k x_k)^2+\frac{7}{2}(y_k-7\rho_k y_k)^2=\frac{1}{2}{x_k}^2(1-\rho_k)^2+\frac{1}{2}{y_k}^2(1-7\rho_k)^2$$

$$\operatorname*{Min}_{\rho_k>0} f(X_k+\rho_k d_k)=\operatorname*{Min}_{\rho_k>0}\left[\frac{1}{2}{x_k}^2(1-\rho_k)^2+\frac{1}{2}{y_k}^2(1-7\rho_k)^2\right]$$

La solution se calcule de façon immédiate :

$$\nabla f(\rho_k)=\nabla\left(\frac{1}{2}{x_k}^2(1-\rho_k)^2+\frac{1}{2}{y_k}^2(1-7\rho_k)^2\right)=-{x_k}^2(1-\rho_k)-49{y_k}^2(1-7\rho_k)$$

$$\Rightarrow\ \rho_k=\frac{{x_k}^2+49{y_k}^2}{{x_k}^2+343{y_k}^2}$$

A chaque itération, la méthode génère donc le point :

$$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_k\\ 7y_k\end{pmatrix}+\left[\frac{{x_k}^2+49{y_k}^2}{{x_k}^2+343{y_k}^2}\right]\begin{pmatrix}-x_k\\ -7y_k\end{pmatrix}$$

- Comportement qui illustre les cas de gradient à pas fixe et à pas optimal :

Partant du point $X_0=(7,1.5)$. Leurs comportements sont illustrés par la figure suivante :

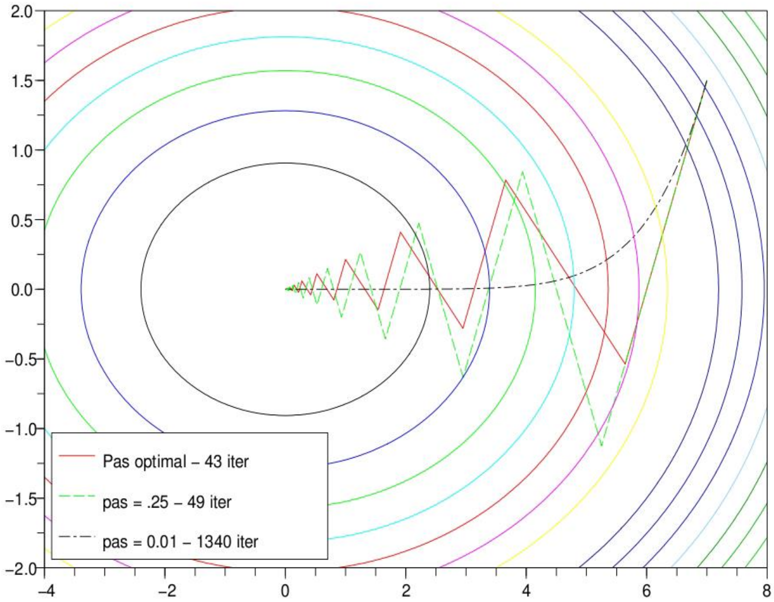


Figure – Itérations des algorithmes de gradient pas fixe et optimal, générées à partir du point $(7,1.5)$

On choisit un pas fixe $\rho_k=1$, ce qui implique : $X_{k+1}=Y_k=P_C[X_k-\rho_k\nabla f(X_k)]$.
Le comportement numérique de la méthode de gradient projeté ainsi définie, est illustré par la suivante des itérations. On observe une convergence de la suite d'itérés générés à partir du point $X_0=(4,5.5)$ vers le point $(-0.875,0.125)$.

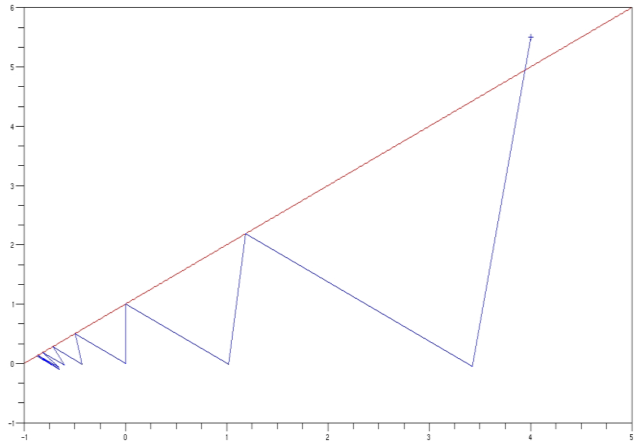


Figure 3.1 – Itérations successives (avant et après projection) de l'algorithme du gradient projeté à partir du point $(4, 5.5)$

Les itérations de la méthode du gradient projeté : $X_{k+1} = P_C[X_k - \rho_k \nabla f(X_k)]$. Le Critère d'arrêt $|d_k| < \varepsilon$ " est satisfait en 10 itérations pour une précision " $\varepsilon = 10^{-5}$.

Exercice 7 TP 5

Programmer les algorithmes du cours sur la minimisation avec contraintes dans $\mathbb{R}^n$ et les tester.

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 \\ s.c \quad -x + y = 1 \end{cases}$$

On donne $X_0 = (4, 5.5)$

1– Gradient projeté et Newton projeté pour des problèmes avec contraintes de borne
2– Méthode de Lagrange - Newton pour des problèmes avec contraintes en égalité
3– Méthode de pénalisation (inexacte)
4– Méthode d'Uzawa avec le Lagrangien ordinaire
On fera une comparaison numérique des quatre méthodes surtout en termes de vitesse de convergence, nombre d'itérations, robustesse et domaine de validité

Newton projeté

Poser n° Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $x_0 \geq 0$ Choisir une tolérance $\varepsilon > 0$ $k = 0$

Gradient projeté

Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Choisir une tolérance $\varepsilon > 0$ $\rho_0 > 0$ $k = 0$

Lagrange – Newton

$(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ $k = 0$

Méthode de pénalisation

Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Choisir une tolérance $\varepsilon > 0$ $\mu_0 > 0$ $k = 0$

Algorithme d'uzawa

Choisir $\mu_0 \in \mathbb{R}^l$ et Choisir $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^m$ $k = 0$

Exercices et TP du chapitre IV

Exercice 1

Soit le problème de Programmation linéaire suivant : résoudre le problème par la méthode algébrique de simplexe des tableaux

$$Min\ Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lr} \boldsymbol{Z - x_1 - 2x_2 = 0} & (\mathbf{0}) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 & (2) \end{array}$$

Avec $x_j \geq 0$, pour $j = 1, 2, 3, 4$

Solution :

On applique la méthode de simplexe on aura successivement les opérations suivantes :

1- Etape 1 remplissage du tableau de base

Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	Ligne
c_i	-1	-2	0	0	0	L_1
x_3	-1	$\boxed{1}$	1	0	2	L_2
x_4	1	1	0	1	4	L_3

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$ variable hors base, et $\{x_3 \;\; x_4\} = \{3 \;\; 4\}$ variable de base initiale et $Z = 0$

Solution admissible non optimale puisque on a deux valeurs de c_i sont négatives, alors

2- Etape 2 : itération 1

On cherche la variable entrante : critère de choix

C'est la valeur de la fonction objective ou (coût) la plus négative : c'est -2 (en rouge), donc la variable entrante est x_2.

On cherche la variable sortante : critère de choix

On voit le minimum positif de $\frac{Z_i}{x_{2i}} = \frac{0}{-2}, \frac{2}{1}, \frac{4}{1}$ le min de ces trois valeurs est 2 qui correspond à la ligne L_2 et par conséquent elle appelée linge pivot et x_2 colonne pivot et 1 (en vert) est le pivot et la variable x_3 (en bleu) est sortante.

Le pilotage

On détermine la ligne pivot de la façon suivante : $L'_2 = \frac{L_2}{pivot} = L_P$

Les autres lignes se calculent de la manière suivante :

$L'_1 = L_1 + 2L_2$

$L'_3 = L_3 - L_2$

Construction du 2^{ième} tableau :

Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Z Ratio	Ligne
c_i	-3	0	2	0	4	L1
x_2	-1	1	1	0	2	L2
x_4	$\boxed{2}$	0	-1	1	2	L3

$X = \binom{x_1}{x_3} = 0$ variable hors base, et $\{x_2 \ \ x_4\} = \{2 \ \ 2\}$ variable de base initiale et $Z = 4$

Solution admissible non optimale puisque on a une valeur de c_i qui est négative, alors

3- Etape 3 : itération 2

La variable entrante : x_1 et la variable sortante : x_4 et le pivot égal à 2

Le pilotage

On détermine la ligne pivot de la façon suivante : $L_3' = \frac{L_3}{pivot} = \frac{L_3}{2} = L_P$

Les autres lignes se calculent de la manière suivante :

$L_1' = L_1 + 3L_3$

$L_2' = L_2 + L_3$

Construction du 3ième tableau :

Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	Ligne
c_i	0	0	$1/2$	$3/2$	7	L1
x_2	0	1	$1/2$	$1/2$	3	L2
x_4	1	0	$-1/2$	$1/2$	1	L3

Conclusion : puisque les valeurs de c_i sont tous positives ou nulles, alors la solution $X^* = \binom{1}{3}$ est admisible et optimale et $Z(X^*) = 7$

Exercice 2

Soit le problème de Programmation linéaire suivant :

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llr} \boldsymbol{Z - 3x_1 - 2x_2} & \boldsymbol{= 0} & (\mathbf{0}) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 7 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 & = 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 2 & (3) \end{array}$$

Avec

$x_j \geq 0, \quad$ pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Solution :

On applique la méthode de simplexe on aura successivement les opérations suivantes :

1- Etape 1 remplissage du tableau de base

Standardisation et Solution Initiale

$$A = \begin{bmatrix} 1\ 2\ 1\ 0\ 0 \\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ -1\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Déterminer une solution de base réalisable
- Porter les variables hors base à zéro
- Solutionner les variables de base

Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z Ratio	Ligne
c_i	-3	-2	0	0	0	0	L_1
x_3	1	2	1	0	0	7	L_2
x_4	$\boxed{2}$	1	0	1	0	8	L_3
x_5	-1	1	0	0	1	2	L_4

z, x_3, x_4 et x_5 sont les variables de base Base initiale $= \{3\ \ 4\ \ 5\}$
x_1 et x_2 sont les variables hors base Hors base $= \{1\ \ 2\}$
On obtient:
$x_1 = 0$ et $x_2 = 0$
$x_3 = 7$, $x_4 = 8$ et $x_5 = 2$
$z = 0$
Solution de base initiale $x_j = [0\ \ 0\ \ 7\ \ 8\ \ 2]^T$ Fonction objective initiale $z = c^T x = 0 = z_0$
Itération 1 :
La variable entrante : x_1 et la variable sortante : x_4 et le pivot égal à 2
Le pilotage
On détermine la ligne pivot de la façon suivante : $L_3' = \frac{L_3}{pivot} = \frac{L_3}{2} = L_P$
Les autres lignes se calculent de la manière suivante :

$$L_1' = L_1 + \frac{3}{2} L_3$$

$$L_2' = L_2 - \frac{L_3}{2}$$

$$L_4' = L_4 + \frac{L_3}{2}$$

Construction du 2ième tableau :

Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	Ligne
c_i	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	12	L_1
x_3	0	$\boxed{3/2}$	1	$-1/2$	0	3	L_2
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	4	L_3
x_5	0	$3/2$	0	$1/2$	1	6	L_4

D'où : $c_i - z_i = (0\ \ -1/2\ \ 0\ \ 3/2\ \ 0)$ et $Z = 12$ $X = (4\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ 6)$
Solution admissible non optimale puisque on a une valeur de c_i qui est négative, alors
Itération 2:
La variable entrante : x_2 et la variable sortante : x_3 et le pivot égal à $\frac{3}{2}$

Le pilotage

On détermine la ligne pivot de la façon suivante : $L'_2 = \frac{L_2}{pivot} = \frac{2L_2}{3} = L_P$

Les autres lignes se calculent de la manière suivante :

$L'_1 = L_1 + \frac{L_2}{3}$

$L'_3 = L_3 - \frac{L_2}{3}$

$L'_4 = L_4 - L_2$

Construction du 3ième tableau :

Variable de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	Ligne
c_i	0	0	$1/3$	$4/3$	0	13	L_1
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	2	L_2
x_1	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	3	L_3
x_5	0	0	-1	1	1	3	L_4

D'où : $c_i - z_i = (0\ \ 1/3\ \ 0\ \ 4/3\ \ \ 0)$ et $Z = 13 \quad X = (3\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 3)$

Conclusion : puisque les valeurs de c_i sont tous positives ou nulles, alors la solution $X^* = \binom{3}{2}$ est admisible et optimale et $Z(X^*) = 13$

Exercice 3

Soit le problème de Programmation linéaire suivant : en utilisant la méthode matricielle

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z - 3x_1 - 5x_2} &= \boldsymbol{0} && (\boldsymbol{1}) \\ x_1 + x_3 &= 4 && (2) \\ 2x_2 + x_4 &= 12 && (3) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 && (4) \end{aligned}$$

Avec

$x_j \geq 0$, pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$

On a les formes matricielles suivantes :

$$C = [3\ \ 5],\ [A,\ I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ et } X_s = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Itération 0 :

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc

X_2 entre en base et X_4 sort

$$X_B = B^{-1}b \Leftrightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \text{ et } c_B = [0\ \ 0\ \ 0],$$

$$Z = c_B b = [0\ \ 0\ \ 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix} = 0$$

Itération 1 :

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc

X_2 entre en base et X_4 sort

$$X_B = B^{-1}b \Leftrightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ et } c_B = [0\ \ 5\ \ 0],$$

$$Z = c_B b = [0\ \ 5\ \ 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

Itération 2 :

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Donc

X_1 entre en base et X_5 sort

$$X_B = B^{-1}b \Leftrightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } c_B = [0\ \ 5\ \ 3],$$

$$Z = c_B b = [0\ \ 5\ \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

Donc : $X_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $c_B = [0\ \ 5\ \ 3]$, $Z = 36$

Exercice 4

Soit le problème de Programmation linéaire suivant :

$$Max\ Z = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z - 20x_1 - 12x_2 - 18x_2 = 0} \quad (\mathbf{0})$$

$$15x_1 + 10x_2 + 4x_3 + e_1 = 80 \quad (1)$$

$$15x_1 + 12x_2 + 5x_3 + e_2 = 120 \quad (2)$$

$$7x_1 + 21x_2 \quad + 3x_3 \qquad + e_3 = 84 \qquad (3)$$

Avec $x_j \geq 0$, pour $j = 1, 2, 3$, $e_i \geq 0$, pour $i = 1, 2, 3$

Solution :

On applique la méthode de simplexe on aura successivement les opérations suivantes :

1- Etape 1 remplissage du tableau de base

2- On applique la méthode de simplexe on aura successivement les opérations suivantes :

Standardisation et Solution Initiale

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 21 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix}$$

z, e_1, e_2 et e_3 sont les variables de base Base initiale $= \{4 \ \ 5 \ \ 6\}$

x_1, x_2 et x_3 sont les variables hors base Hors base $= \{1 \ \ 2 \ \ 3\}$

Variable de base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Z Ratio	Ligne
c_i	-20	-15	-18	0	0	0	0	L_1
e_1	$\boxed{15}$	10	4	1	0	0	80	L_2
e_2	15	12	5	0	1	0	120	L_3
e_3	7	21	3	0	0	1	84	L_4

$Z = 0 \quad X = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 80 \ \ 120 \ \ 84)$

Solution admissible non optimale puisque on a une valeur de c_i qui est négative, alors

Itération 1:

La variable entrante : x_1 et la variable sortante : e_1 et le pivot égal à 15

Le pilotage

On détermine la ligne pivot de la façon suivante : $L'_2 = \frac{L_2}{pivot} = L_P$

Les autres lignes se calculent de la manière suivante :

$$L'_1 = L_1 + \frac{4}{3} L_2$$

$$L'_3 = L_3 - L_2$$

$$L'_4 = L_4 - \frac{7}{15} L_2$$

Construction du 2[ième] tableau :

Variable de base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Z Ratio	Ligne
c_i	0	$-5/3$	$-38/3$	$4/3$	0	0	$320/3$	L_1
x_1	1	$2/3$	$\boxed{4/15}$	$1/15$	0	0	$80/15$	L_2
e_2	0	2	1	-1	1	0	40	L_3
e_3	0	$22/3$	$17/3$	$-7/15$	0	1	$140/3$	L_4

Alors $X = [0 \quad -5/3 \quad -38/3 \quad 4/3 \quad 0 \quad 0\,]$ et $Z = 320/3$

Solution admissible non optimale puisque deux valeurs de c_i sont négative, alors

Itération 2:

La variable entrante : x_3 et la variable sortante : x_1 et le pivot égal à $\frac{4}{15}$

Le pilotage

On détermine la ligne pivot de la façon suivante : $L'_2 = \frac{L_2}{pivot} = \frac{15L_2}{4} = L_P$

Les autres lignes se calculent de la manière suivante :

$$L'_1 = L_1 + \frac{95L_2}{2}$$
$$L'_3 = L_3 - \frac{15L_2}{4}$$
$$L'_4 = L_4 - \frac{85L_2}{4}$$

Construction du 3ième tableau :

Variable de base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Z Ratio	Ligne
c_i	$95/2$	30	0	$27/6$	0	0	360	L_1
x_3	$15/4$	$5/2$	1	$1/4$	0	0	20	L_2
e_2	$-15/4$	$-1/2$	0	$-5/4$	1	0	20	L_3
e_3	$-85/4$	$-41/6$	0	$-339/180$	0	1	24	L_4

D'où : $c_i - z_i = (95/2 \;\; 30 \;\; 0 \;\; 27/6 \;\; 0 \;\; 0)$ et $Z = 360$ $X = (0\;\; 0\;\; 20\;\; 0\;\; 20\;\; 24)$

Conclusion : puisque les valeurs de c_i sont tous positives ou nulles, alors la solution $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$ est admisible et optimale et $Z(X^*) = 360$

Exercice 5

Soit le problème de Programmation linéaire suivant : en utilisant la méthode matricielle

$$Max\ Z = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3$$
$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{Z - 20x_1 - 12x_2 - 18x_2} & & = \mathbf{0} & (\mathbf{0}) \\ 15x_1 + 10x_2 + 4x_3 + e_1 & & = 80 & (1) \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 & + e_2 & = 120 & (2) \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 & + e_3 & = 84 & (3) \end{array}$$

Avec $x_j \geq 0$, pour $j = 1, 2, 3$, $e_i \geq 0$, pour $i = 1, 2, 3$

On a les formes matricielles suivantes :

$$C = [20 \;\; 15 \;\; 18],\ [A,\ I] = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 21 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ et } X_s = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Itération 0 :

$X_B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc

X_1 entre en base et e_1 sort

$X_B = B^{-1}b \Leftrightarrow X_B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix}$ et $c_B = [0 \ \ 0 \ \ 0]$,

$Z = c_B b = [0 \ \ 0 \ \ 0] \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix} = 0$

Itération 1 :

$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{15} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc

X_1 entre en base et e_1 sort

$X_B = B^{-1}b \Leftrightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{15} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ 40 \\ \frac{140}{3} \end{bmatrix}$ et $c_B = [20 \ \ 0 \ \ 0]$,

$Z = c_B b = [20 \ \ 0 \ \ 0] \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ 40 \\ \frac{140}{3} \end{bmatrix} = \frac{320}{3}$

Itération 2 :

$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X_B = B^{-1}b \Leftrightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix}$ et $c_B = [18 \ \ 0 \ \ 0]$,

Donc

$Z = c_B b = [18 \ \ 0 \ \ 0] \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} = 360$

Donc : $X_B = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix}$, $c_B = [18 \ \ 0 \ \ 0]$, $Z = 360$

Exercice 6

En utilisant la méthode graphique, minimiser le problème de programmation linéaire suivant

$$Min\ z = -8x - 6y$$

$$\begin{cases} 5x + 3y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ x + 3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Solution :

a- Domaine réalisable :

On trace la droite

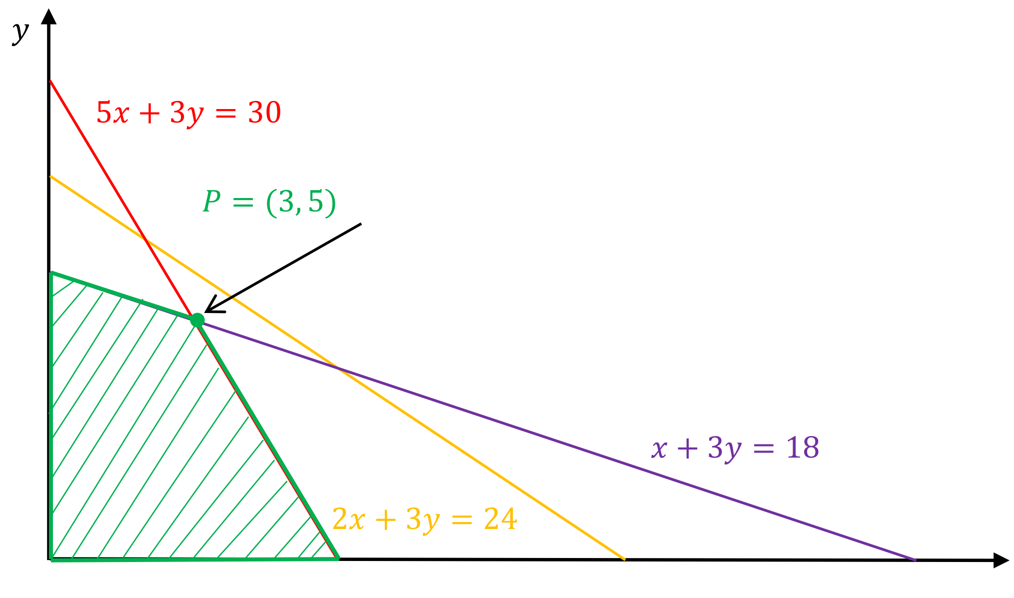
$5x + 3y = 30$. L'ensemble des points qui satisfont la contrainte $5x + 3y \leq 30$ sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation

Puis on trace la droite

$2x + 3y = 24$. L'ensemble des points qui satisfont la contrainte $2x + 3y \leq 24$ sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation

Ensuite on trace la droite

$x + 3y = 18$. L'ensemble des points qui satisfont la contrainte $x + 3y \leq 18$ sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation



La partie encadrée et hachurée en vert représente le domaine réalisable du problème linéaire

b- Résolution et analyse

On considère la fonction économique : $z = -8x - 6y$. $drite\ de\ pente\ -\frac{8}{6} \Rightarrow y = -\frac{8}{6}x - \frac{z}{6}$

• Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue: $x = 0$ et $y = 0$ $=> z = 0$

$x + 3y = 18$, $x = 0$ et $y = 6$ $=> z = -36$, $5x + 3y = 30$, $x = 6$ et $y = 0$ $=> z = -48$

$x = 3$ et $y = 5$ $=> z = -54$ c'est la solution optimale du PL, Impossible d'aller plus loin sans sortir du domaine réalisable.

Exercice 7 TP 6

Ecrire un programme sous Scilab pour maximiser le problème suivant :

$$Max\ Z = 30x + 20y$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}y \leq 7 \\ \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z} - 30x - 20y \quad &= \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{0}) \\ x + \tfrac{1}{4}y + e_1 \quad &= 7 \quad (1) \\ x + y \quad + e_2 &= 12 \quad (2) \end{aligned}$$

Solution :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 30 & 20 \end{bmatrix}$$

```
////Méthode de Simplexe Algebrique /////
function [xbase]=Solutiondebase(A, b, B)
   [m,n]=size(A);
   for i=1:m
      xbase(i)=b(i)/A(i,B(i));
   end
endfunction
///
function [A, b]=Pivoter(A, b, N, e, s)
   m=length(b);
   for i=1:m
      if(A(s,N(e))<>0)
         if(i<>s)
            b(i)=b(i)-b(s)*A(i,N(e))/A(s,N(e));
            A(i,:)=A(i,:)-A(s,:)*A(i,N(e))/A(s,N(e));
         else
            b(i)=b(i)/A(s,N(e));
            A(i,:)=A(i,:)/A(s,N(e))
         end
         end
   end
endfunction
///
function i=indice_variable_sortante(A, b, N, e)
   m=length(b);
   for k=1:m
      if(A(k,N(e))>0)
         Y(k)=b(k)/A(k,N(e));
      else
         Y(k)=%inf;
         end
   end
   [X,i]=min(Y);
endfunction
///
function [xsol, z]=SimplexAlgebre(A, b, c)
   [m,n]=size(A);
   Ac=[A,eye(m,m)];
   B=[n+1:n+m];
   N=[1:n];
   z=0;
   l=0;
   while(1)
      l=l+1;
      disp('Iréation'+string(1)+':..');
      disp(B,'...les indices des variable de base:');
      disp(N,'...les indices des variable hors base:');
              xbase=Solutiondebase(Ac,b,B);
      if(min(xbase)<0)
         disp('solution de base non réalisable!!!');
```

```
          break;
        end
        disp(xbase,'la solution de base');
        if(max(c)<=0);
          disp('stop tous les contraintes sont négatives!!!');
          break;
        else
          [maxcout,e]=max(c);
          disp('les indices de la variable entrante'+string(N(e)));
        end
                s=indice_variable_sortante(Ac,b,N,e);
        disp(' indice de la variable sortante'+string(B(s)));
                [Ac,b]=Pivoter(Ac,b,N,e,s);
        disp('efectuer un pivot');
        disp(Ac,'A=',b,'b=');
        z=z+b(s)*c(e);
        for j=1:n
          if (j<>N(e))
            tab(j)=Ac(s,N(j))*c(e);
          else
           tab(j)=Ac(s,B(j))*c(e);
          end
        end
        tab=tab;
        for j=1:n
          if (j<>e)
            c(j)=c(j)+tab(j);
          else
             c(j)=tab(j);
           end
         end
         tmp=B(s);
         B(s)=N(e);
         N(e)=tmp;
      end
      x=[zeros(n,1),xbase];
      t=[N,B];
      for k=1:n+m
         xsol(k)=x(t(k));
      end
endfunction
///
A=[1 1/4;1 1]
b=[7;12]
c=[30 20]
[xsol,z]=SimplexAlgebre(A,b,c)
```

Résultat

x sol

5.33333

6.66666

0.

0.

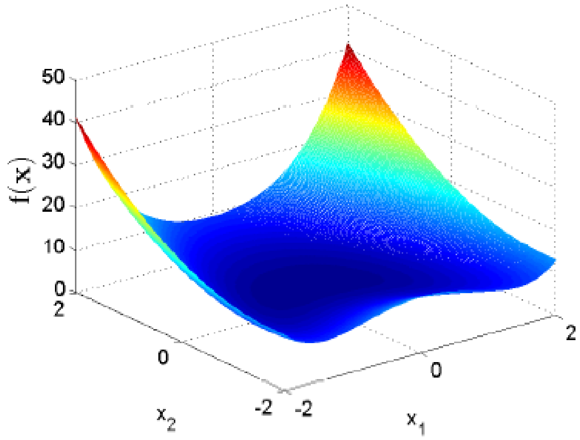
z

293.3333

Exercices et TP du chapitre V

Exercice 1

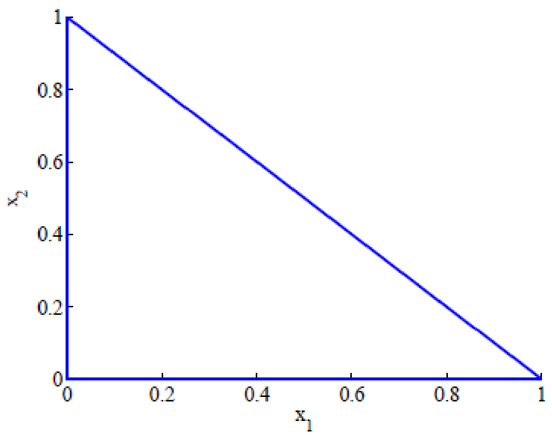
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 2x_2^2 - x_2 + 3$, représentée dans la figure suivante



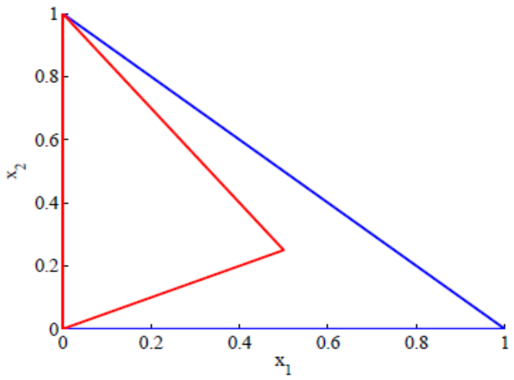
Cette fonction admet un minimum unique au point $\left(0, \frac{1}{4}\right)^T$, vérifiable à l'aide des méthodes analytiques. Ici, on essaye de trouver ce minimum en utilisant la méthode de Nelder Mead.

Solution :

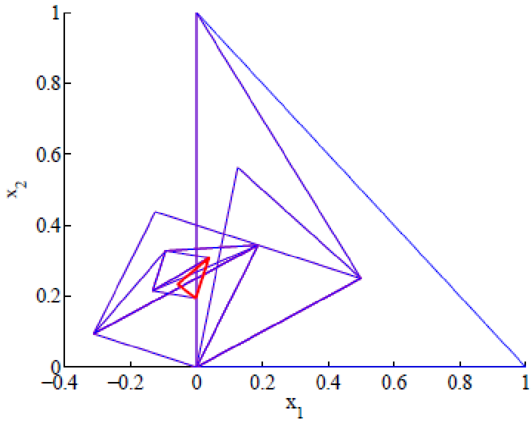
On utilise la méthode Nelder-Mead. Les points initiaux sont pris respectivement comme suite: $[0, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 0]^T$ sont representés dans la figure suivante, et la tolérance est choisie comme $\varepsilon = 10^{-4}$.



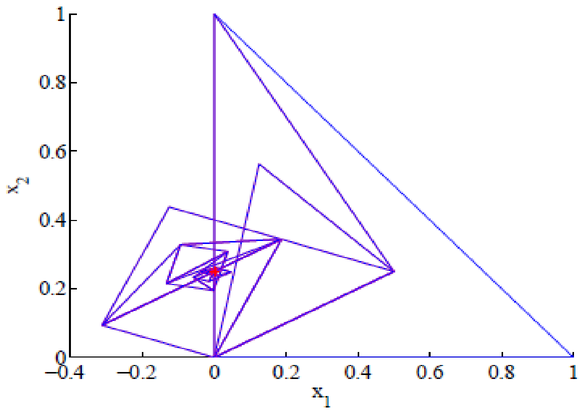
Après la première étape, ce simplexe est contracté, voir figure ci-dessous, les sommets devenant $[0, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[0.5, 0.25]^T$



Le simplexe obtenu après 10 étapes présenté dans la figure suivante, les sommets devenant $[0.002, 0.194]^T$, $[0037, 0.307]^T$, $[-0.057, 0.233]^T$



Après 37 étapes, les longueurs des arêtes du simplex deviennent inférieures à la tolérance choisie ε, les sommets étant : $[0.1210^{-4}, 0.25]^T$, $[-06510^{-4}, 0.25]^T$, $[-0.310^{-4}, 0.25]^T$
qui peut être bien approximé par $[0,\ 0.25]$, voir figure suivante :



TP6
Méthode de Nelder-Mead
On considère la fonction f *de Rastrigin* définie sur $\mathbb{R}^2$ par

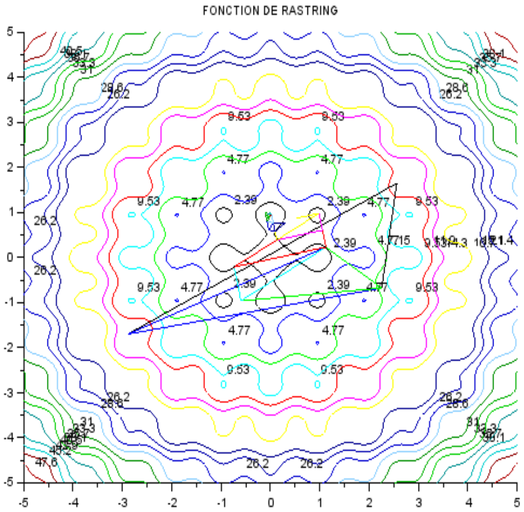
$$f(x_1, x_2) = \sum (x^2 - \cos(2\pi x) + n)$$

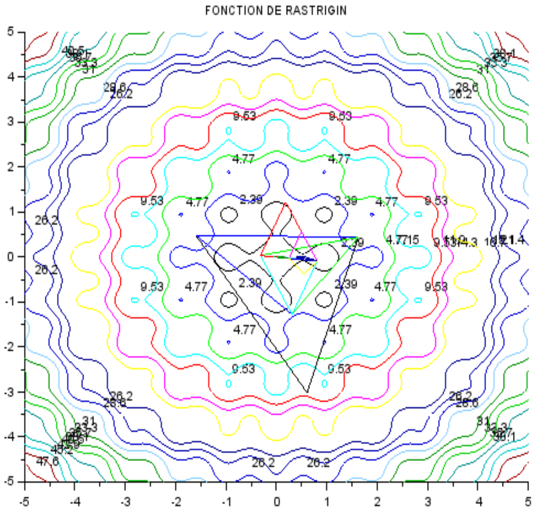
On considère aussi la fonction quadratique g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x_1, x_2) = 6x_1^2 + x_2^2 + x_2$$

On veut optimiser ces deux fonctions par la méthode de la Nelder-Mead avec Matlab ou Scilab

Fonction de Rastring





Meilleur point:
  -0.0022698   0.9508782
 Valeur de f en ce point:
   0.951529
 Nombre d'évaluations:
   48.

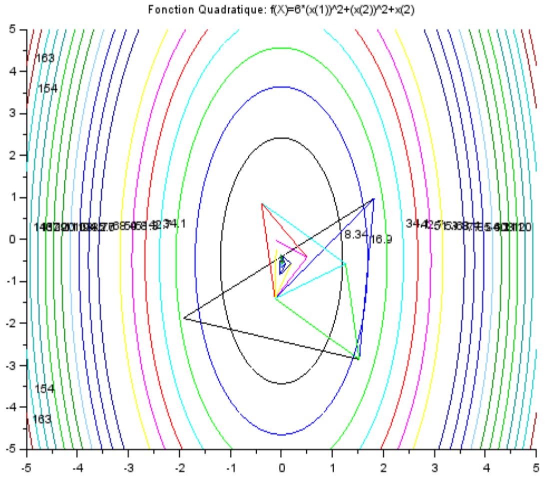
Meilleur point:
  -0.0015953   0.0001691
 Valeur de f en ce point:
   0.0000534
 Nombre d'évaluations:
   50.

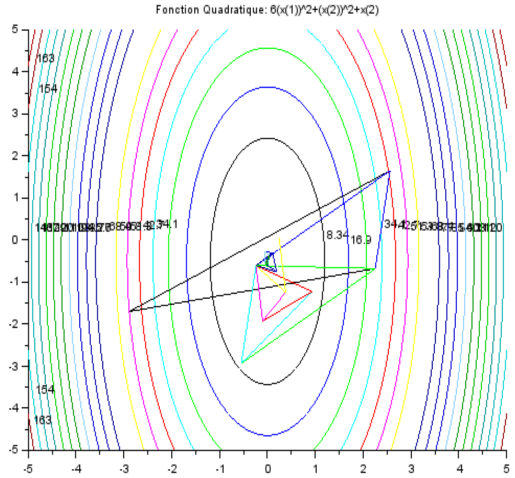
Code Scilab

```
// Methode d'optimisation sans gradient
//   Methode Nelder Mead
deff('y=f(x)','y=sum(x.*x-cos(2*%pi*x))+n');   // fonction de Rastrigin
n=evstr(x_dialog('nombre de parametres (contours si n=2)','2'));
Nit=evstr(x_dialog('nombre d''iterations','100'));
xmin=-5;xmax=5;
// Trace des lignes de niveau
if (n==2)
N=300;
xplot=xmin:((xmax-xmin)/(N-1)):xmax;
yplot=xplot;
zplot=zeros(N,N);
for i=1:N
for j=1:N
zplot(i,j)=f([xplot(i),yplot(j)]);
end
end
xset('window',0)
clf()
contour2d(xplot,yplot,zplot,20);
end
// Création du premier simplexe
X=xmin+(xmax-xmin)*rand(n+1,n+1);
```

```
// Evaluation du premier simplexe
for i=1:n+1
  X(i,n+1)=f(X(i,1:n))
end
Neval=n+1;
// Debut boucle principle
for k=1:Nit
 sh=0;
 // Ordonnement du simplexe
 [a,b]=gsort(-X(:,n+1));
 X=X(b,:);
 //
 xc=1/n*sum(X(1:n,1:n),'r');
 d=xc-X(n+1,1:n);
 xr=X(n+1,1:n)+2*d;
 fr=f(xr);fnew=fr;Neval=Neval+1;
 // Cas 1
 if (X(1,n+1)<fr)&(fr<X(n,n+1)) then
   xnew=xr
 end
 // Cas 2
 if (fr<X(1,n+1)) then
   xe=X(n+1,1:n)+3*d;fe=f(xe);
   if (fe<fr) then xnew=xe;fnew=fe;Neval=Neval+1;else xnew=xr;end;
 end
 // Cas 3
 if (X(n,n+1)<fr)&(fr<X(n+1,n+1)) then
   xtilde=X(n+1,1:n)+3/2*d;ftilde=f(xtilde);
   if (ftilde<fr) then xnew=xtilde;fnew=ftilde;Neval=Neval+1;else xnew=xr;end;
 end
 // Cas 4
 if (X(n+1,n+1)<fr) then
   xhat=X(n+1,1:n)+1/2*d;fhat=f(xhat);
   if (fhat<X(n+1,n+1)) then xnew=xhat;fnew=fhat;Neval=Neval+1;else
     //    Retrecissement
     sh=1;
     for j=2:n+1
       X(j,1:n)=X(1,1:n)+1/2*(X(j,1:n)-X(1,1:n));
       X(j,n+1)=f(X(j,1:n));
     end
     Neval=Neval+n;
   end;
 end
 // Ajout du nouveau point
 //
 if (sh==0) then
   X(n+1,1:n)=xnew;X(n+1,n+1)=fnew;
 end
 //
 //Trace si n=2
 if (n==2) then
   plot2d([X(:,1);X(1,1)],[X(:,2);X(1,2)],k,rect=[xmin,xmin,xmax,xmax]);
 end
end
disp('meilleur point:'); disp(X(1,1:n));
disp('valeur de f en ce point:'); disp(X(1,n+1));
disp('nombre d''evaluations:');disp(Neval)
```

Fonction quadratique





Meilleur point:
 -0.0006445 -0.4994984
 Valeur de f en ce point:
 -0.2499973
 Nombre d'évaluations:
 52.

Meilleur point:
 -0.0006809 -0.5014308
 Valeur de f en ce point:
 -0.2499952
 Nombre d'évaluations:
 50.

TP 8

On considère la fonction *f de Rosenbrock* définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1,x_2) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$$

On aussi considère la fonction quadratique g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x_1,x_2) = (x_2 - 2)^4 + (x_1 - 1)^4$$

On veut optimiser ces deux fonctions par la méthode de la région de confiance avec Matlab ou Scilab

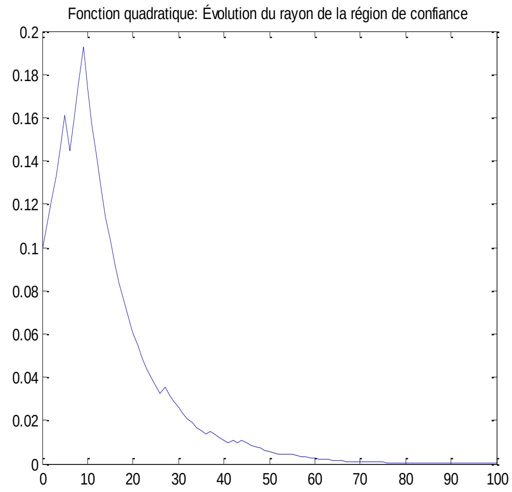
Solution:

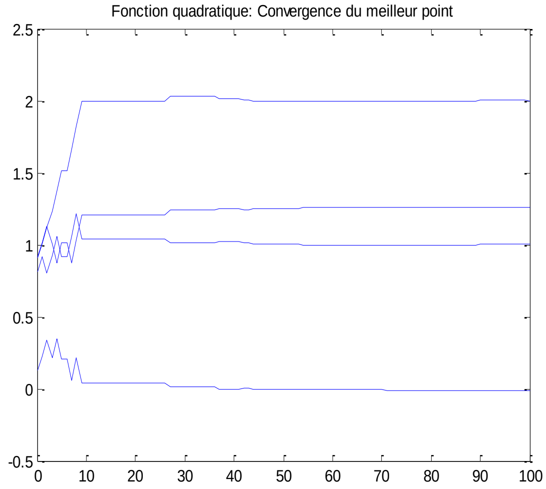
```
function y=model_lin(g,c,h)
    y=c+g'*h;

function y=f(x)
   n=length(x);
   y=0;
   y=(x(1)-1)^2+10*((x(2)-x(1))^2)^2; %% Fonction de Rosenbrock
        %y=(x(1)-1)^4+(x(2)-2)^4;      %% Fonction quadratique
   for i=2:n
      y=(x(1)-1)^2+10*((x(2)-x(1))^2)^2;
   end

function w=lagrange_lin(X,Xla);
n=length(X);
```

```
p=n+1;
% Interpolation linéaire de Lagrange centrée en X pour le cas 2D
%  X: point central, Xla: points d'interpolation
XDelta=Xla-X*ones(1,p);
A=ones(p,p);
A(:,2:p)=XDelta';
b=zeros(p,1);
for i=1:p
   b(i)=f(Xla(:,i));
end
w=A\b;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Méthode de la région de confiance soit avec une approximation du premier%
% ordre, soit avec une interpolation Lagrange                             %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n=4;  % dimension
p=n+1;
%
gamma=1.1;
theta=0.9;
eta=0.01;
Nstep=100;
%% Initialisation
X=rand(n,1); delta=0.1;
% Points de Lagrange initiaux autour de X
Xla=[X,X*ones(1,p-1)+delta*(ones(n,p-1)-2*rand(n,p-1))];
Xlatot=Xla;
Xtot=[X];Dtot=[delta];
for i=1:Nstep
    k=size(Xlatot,2);
    u=zeros(k,1);
    for j=1:k
     u(j)=norm(Xlatot(:,j)-X);
    end
    [a,b]=sort(u);
    Xla=Xlatot(:,b(1:p));
    w=lagrange_lin(X,Xla);g=w(2:p);
    hplus=linprog(g,zeros(n,n),zeros(n,1),zeros(n,n),zeros(n,1),-
delta*ones(n,1),delta*ones(n,1));
    Xplus=X+hplus;
    Xlatot=[Xlatot,Xplus];
    rhok=(f(X)-f(Xplus))/(f(X)-model_lin(g,f(X),hplus)+1E-16);
    if (rhok>eta)
       X=Xplus;delta=gamma*delta;
    else
       delta=theta*delta;
    end
    Dtot=[Dtot,delta];
    Xtot=[Xtot,X];
end
disp('Meilleure valeur: Fonction de Rosenbrock');disp(X)
figure(1)
clf
for k=1:n
   plot(0:Nstep,Xtot(k,:));
   hold on
end
title('Fonction de Rosenbrock: Convergence du meilleur point');
figure(2)
clf
```

```
plot(0:Nstep,Dtot);
title('Fonction de Rosenbrock: Évolution du rayon de la région de confiance');
```

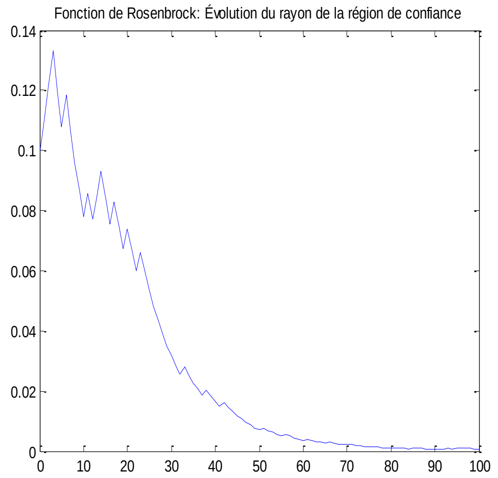
Fonction quadratique

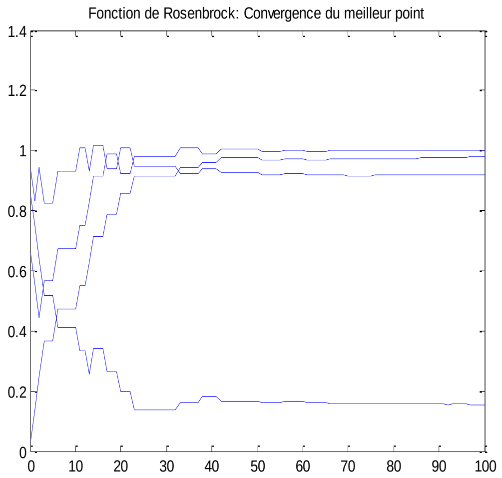




Meilleure valeur: Fonction quadratique
 1.0000
 1.9999
 -0.0088
 1.2549

Fonction de Rosenbrock





Meilleure valeur: Fonction de Rosenbrock
 0.9993
 0.9792
 0.1551
 0.9183