

Equation aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 1 [01763] [Correction]

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 2 [00044] [Correction]

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$$

Exercice 3 [01765] [Correction]

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \text{ via } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Exercice 4 [01764] [Correction]

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 5 [01766] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 6 [00080] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 7 [00076] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 8 [01768] [Correction]

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 9 [02461] [Correction]

Montrer que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré p si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = p f(x_1, \dots, x_n)$$

Exercice 10 [00047] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Montrer la constance de l'application suivante

$$\varphi: r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$$

Exercice 11 [03675] [\[Correction\]](#)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Exprimer

$$\varphi: r \in [0; +\infty[\mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$$

Exercice 12 [03793] [\[Correction\]](#)

On étudie l'équation aux dérivées partielles

$$(E): x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

où la fonction inconnue f est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

- a) Montrer l'existence de solutions non nulles.
- b) Soit $g: t \mapsto f(tx, ty)$ avec (x, y) un couple de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exploiter cette fonction pour résoudre l'équation (E).

Exercice 13 [02912] [\[Correction\]](#)

- a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

- b) Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}$$

Exercice 14 [02913] [\[Correction\]](#)

On note U l'ensemble des (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x, y) \in U, \Phi(f)(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

- a) Déterminer $\ker \Phi$.
- b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.
- c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x, y) associe $(x^2 + y^2)^{3/2}xy$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3u - v \\ y = v - 2u \end{cases}$$

Posons $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u, v) = (3u - v, v - 2u)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f(3u - v, v - 2u),$$

Par composition $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(3u - v, v - 2u) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(3u - v, v - 2u)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ ce qui conduit à $g(u, v) = h(v)$ puis $f(x, y) = h(2x + 3y)$ avec h fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = v - u \\ y = 3u - 2v \end{cases}$$

Posons $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u, v) = (v - u, 3u - 2v)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ (et même un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme)

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par « $g(u, v) = f(x, y)$ » i.e.

$$g(u, v) = f(v - u, 3u - 2v)$$

$g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

f est solution de l'équation si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ soit $g(u, v) = \varphi(v)$ avec φ fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont $f(x, y) = \varphi(3x + y)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3 : [énoncé]

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = (u + v)/2 \\ y = (u - v)/2 \end{cases}$$

Posons $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\phi(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2} \right)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f((u + v)/2, (u - v)/2).$$

Par composition $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)_{(x, y) = \phi(u, v)}$$

Par suite f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, g est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$2 \frac{\partial g}{\partial u} = g$$

Après résolution, on obtient $g(u, v) = C(v)e^{u/2}$ avec C fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ puis

$$f(x, y) = C(x - y)e^{(x+y)/2}$$

Exercice 4 : [énoncé]

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(u, u + v)$.

Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, u + v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, u + v) = f(u, u + v) = g(u, v)$$

La fonction $u \mapsto g(u, v)$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ donc il existe $C(v) \in \mathbb{R}$ tel que $g(u, v) = C(v)e^u$.

Notons que $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car $C(v) = g(0, v)$ avec g de classe $\mathcal{C}^1$.

Par suite, on obtient $f(x, y) = C(y - x)e^x$.

Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Exercice 5 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \left(-y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)_{x=r \cos \theta, y=r \sin \theta}$$

Par surjectivité de l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

on peut affirmer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$$

c'est-à-dire, si, et seulement si, $g(r, \theta) = C(r)$ avec C fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0; +\infty[$.

On obtient alors $f(x, y) = C(\sqrt{x^2 + y^2})$ puis $f(x, y) = D(x^2 + y^2)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0; +\infty[$.

Exercice 6 : [énoncé]

Soit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ solution de

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Soit $g: \mathbb{R}_+^* \times]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0; \pi[$ et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -g(r, \theta)$$

Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\theta \mapsto g(r, \theta)$ est solution de l'équation différentielle $y'(\theta) = -y(\theta)$.

Après résolution il existe $C(r) \in \mathbb{R}$ tel que $g(r, \theta) = C(r) e^{-\theta}$

De plus, la fonction $r \mapsto C(r) = g(r, 0)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi

$$f(x, y) = C(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{\arctan(x/y) - \pi/2} = h(x^2 + y^2) e^{\arctan(x/y)}$$

où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 7 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g: \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Par composition g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$ et

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$ ce qui conduit à $g(r, \theta) = h(\theta)$ puis $f(x, y) = h(\arctan \frac{y}{x}) = \tilde{h}(\frac{y}{x})$ avec $\tilde{h}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : [énoncé]

Soient $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g: \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$ et

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(\rho, \theta) = r$$

ce qui conduit à $g(r, \theta) = r + h(\theta)$ puis

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + h\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \sqrt{x^2 + y^2} + k\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec k fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : [énoncé]

Supposons f homogène de degré p i.e.

$$\forall t > 0, f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n)$$

En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = p f(x_1, \dots, x_n)$$

Inversement, posons

$$g(t) = f(tx_1, \dots, tx_n)$$

Si f vérifie l'équation aux dérivées partielles proposée, la fonction $t \mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$tg'(t) = pg(t)$$

et, après résolution, on obtient

$$g(t) = t^p g(1)$$

ce qui donne f homogène de degré p .

Notons que pour $n = 1$, $f(x) = |x|^3$ vérifie la relation et n'est pas homogène de degré 3 que dans le sens précisé initialement.

Exercice 10 : [énoncé]

L'application φ est bien définie car $\varphi(r)$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

Posons $g: (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$.

La fonction g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R} \times [0; 2\pi]$.

Pour $a > 0$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur le compact $[-a; a] \times [0; 2\pi]$ et donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (r, t) \in [-a; a] \times [0; 2\pi], \left| \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) \right| \leq M = \psi(t)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0; 2\pi]$ et donc, par domination sur tout segment, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) dt$$

On en déduit $r\varphi'(r) = 0$ puis $\varphi'(r) = 0$, d'abord pour $r \neq 0$, puis pour tout $r \in \mathbb{R}$, par continuité.

Par suite φ est constante égale à $\varphi(0) = 2\pi f(0)$.

Exercice 11 : [énoncé]

L'application φ est bien définie car $\varphi(r)$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

Posons $g: (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$.

La fonction g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0; 2\pi]$.

Pour $a > 0$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur le compact $[0; a] \times [0; 2\pi]$ et donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (r, t) \in [-a; a] \times [0; 2\pi], \left| \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) \right| \leq M = \psi(t)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0; 2\pi]$ et donc, par domination sur tout segment, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) dt$$

On en déduit

$$r\varphi'(r) = \lambda\varphi(r)$$

puis après résolution de cette équation différentielle sur $]0; +\infty[$

$$\varphi(r) = \lambda r^\alpha$$

La fonction φ étant définie et continue en 0, le cas où $\alpha < 0$ oblige $\lambda = 0$ et alors $\varphi(r) = 0$.

Le cas $\alpha \geq 0$, n'impose rien de particulier et alors $\varphi(r) = \lambda r^\alpha$ pour tout $r \geq 0$.

Exercice 12 : [énoncé]

a) Les fonctions données par $f(x, y) = ax + by$ sont solutions.

b) Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$$

de sorte que

$$tg'(t) = f(tx, ty) = g(t)$$

La résolution de l'équation différentielle $ty'(t) = y$ après raccord donne

$$y(t) = \lambda t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

On en déduit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(tx, ty) = tf(x, y)$$

En dérivant cette relation en le paramètre x , on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

En simplifiant par t

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Or la relation engage des fonctions continues, elle donc encore valable en $t = 0$ ce qui fournit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

De même, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Enfin, en posant

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ et } b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

l'équation initiale fournit

$$f(x, y) = ax + by$$

Exercice 13 : [énoncé]

- a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r \sin \theta$ et $y = r \cos \theta$.

On parvient à

$$f(x, y) = C(x/y)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

- b) Idem, on parvient à

$$f(x, y) = \frac{2}{3} \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3} + C(x/y)$$

avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : [énoncé]

- a) L'application ϕ est clairement un endomorphisme de E .

Posons $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$,
 $(r, \theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$

Pour $f \in E$, on considère $g \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

On remarque

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Ainsi

$$\Phi(f) = 0 \iff r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

pour tout $(r, \theta) \in V$.

La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r, \theta) = C(\theta)$ avec C de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2; \pi/2[$.

Par suite on obtient la solution générale $f(x, y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- b) Si f est homogène de degré α alors en dérivant la relation $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ par rapport à t puis en évaluant le résultat en $t = 1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$.
 Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant g comme ci-dessus, on obtient

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \alpha g(r, \theta)$$

ce qui donne $g(r, \theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis

$$f(x, y) = D(y/x)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que f est homogène de degré α .

- c) La fonction h est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \ker \Phi$.