

Table des Matières

1	Théorème des accroissements finis	2
1.0.1	Théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}$	2
1.0.2	Inégalité des accroissements finis sur $\mathbb{R}$	2
1.0.3	Théorème des accroissements finis à valeurs dans $\mathbb{R}$	3
1.1	Inégalité des accroissements finis (cas général))	3
1.1.1	Connexité des ensembles	4

Chapitre 1

Théorème des accroissements finis

Rappelons le résultat classique

1.0.1 Théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.0.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Preuve. Si $g(x) = f(x) - \frac{(f(b) - f(a))}{b - a}(x - a)$ alors

$g(a) = f(a)$, $g(b) = f(a)$ et g est une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$.

d'après théorème de Rolle on trouve $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. ■

1.0.2 Inégalité des accroissements finis sur $\mathbb{R}$

Lemme 1.0.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $M \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$, pour tout $x, y \in [a, b]$, alors $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ pour tout $x, y \in [a, b]$.

Preuve. Exercice 1. ■

1.0.3 Théorème des accroissements finis à valeurs dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.0.2 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable dans l'ouvert $U \subset X$. Soit $a, b \in U$, si le segment $[a, b]$ est contenu dans U , il existe $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) - f(a) = Df(c).(b - a).$$

$$[a, b] = \{x \in U / \exists t \in [0, 1] \text{ tel que } x = a + t(b - a)\}$$

Définition 1.0.1 Un ouvert $U \subset E$ est dit convexe si $\forall a, b \in U, [a, b] \subset U$.

Preuve. Si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f(a + t(b - a)), t \in [0, 1]$. Alors g est différentiable sur $[0, 1]$ et $g'(t) = Df(a + t(b - a))(b - a)$. D'après théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}$ on trouve, il existe $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a).$$

■

Remarque 1 si f est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension supérieur ou égal à 2 ce résultat est faux.

Exemple 1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (x^2, x^3)$.

Corollaire 1.0.3 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \rightarrow (f_1(x), \dots, f_m(x))$ une fonction différentiable. Soit $a, b \in U$, si le segment $[a, b]$ est contenu dans U , il existe m points $c_1, \dots, c_m \in]a, b[$ telle que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ on a:

$$f_j(b) - f_j(a) = Df_j(c_j).(b - a)$$

Preuve. Exercice. ■

1.1 Inégalité des accroissements finis (cas général))

Théorème 1.1.1 Soient E et F deux evn et $f : U \rightarrow F$ une application différentiable. U ouvert de E . Soient $x, y \in U$ tels que le segment $[x, y] \subset U$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ telle

que $\|Df(x + t(y - x))\| \leq M$ pour tout $t \in]0, 1[$, alors

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M \|x - y\|.$$

Preuve. Soient $x, y \in U$ tels que le segment $[x, y] \subset U$. On définit $g : [0, 1] \rightarrow F$, $t \rightarrow g(t) = f(x + t(y - x))$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on aura $Dg(t) = Df(x + t(y - x)) \cdot (y - x)$ et par suite $\|Dg(t)\| \leq \|Df(x + t(y - x))\| \cdot \|y - x\| \leq M \|y - x\|$. On applique le lemme précédent à g pour obtenir le résultat $\|f(y) - f(x)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq M \|y - x\|$. ■

1.1.1 Connexité des ensembles

Définition 1.1.1 Un ouvert $U \subset E$ est dit connexe si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux ouverts non vides et disjoints.

* C'est à dire $\forall U_1, U_2$ deux ouverts, $U = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ alors $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$.

Exercice 1 Montrer que si U est un ouvert, alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. U est connexe.
2. Toute fonction $f : U \rightarrow F$ localement constante est nécessairement constante.

Exercice 2 Montrer que tout ouvert convexe est connexe.

Donner un exemple d'ouvert connexe qui ne soit pas convexe.

Corollaire 1.1.2 Soient E et F deux evn, U ouvert connexe de E .

Soit $f : U \rightarrow F$ une application différentiable telle que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Alors f est constante.

Preuve. Soit $a \in U$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et $B(a, r)$ est un convexe, donc $\forall x \in B(a, r)$ on a $[x, a] \subset U$. Sachant que $\|Df(x)\| = 0$ alors on trouve

$$\|f(x) - f(a)\| \leq 0 \|x - a\| = 0$$

ce qui implique que $f(x) = f(a), \forall x \in B(a, r)$, c'est à dire f est localement constante comme U est un ouvert connexe de E alors f est constante. ■